13회수학 나형 정답

1	①	*2*	⑤	*3*	①	*4*	①	*5*	③
6	④	*7*	④	*8*	①	*9*	④	*10*	①
11	④	*12*	①	*13*	②	*14*	④	*15*	②
16	②	*17*	②	*18*	②	*19*	①	*20*	③
21	③	*22*	2	*23*	14	*24*	307	*25*	22
26	14	*27*	5	*28*	68	*29*	13	*30*	12

해 설

1. 정답 ①
[출제의도]함수의 극한값 구하기

$$\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{3(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{3(x+1)}=-\frac{1}{9}$$

2. [정답] ⑤

[출제의도] 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 3^{n+1}+5}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 3+\frac{5}{3^n}}{1}=6$$

3. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 계산하기

[해설] $\log_2\left(\frac{2}{9}\times 12^2\right)=\log_2 2^5=5$

4. [출제의도] 서로 독립인 두 사건의 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

두 사건 A, B는 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

또, $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{9}{16}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\frac{9}{16}=\frac{15}{16}$

5.정답 ③

[출제의도] 확률분포표에서 평균을 구할 수 있는가?

주어진 확률분포표에서 확률의 합은 1이므로

$a+\frac{1}{4}+b=1,\ \ a+b=\frac{3}{4}$ ---㉠

또 확률변수 X의 평균 $E(X)=5$이므로

$1\times a+3\times\frac{1}{4}+7\times b=5,\ \ a+7b=\frac{17}{4}$ ---㉡

㉡−㉠ 을 계산하면

$6b=\frac{14}{4}\quad\therefore\ b=\frac{7}{12}$

6. [정답] ④

[출제의도] 이항분포에서의 평균과 분산을 구하여 이항분포에서의 확률을 구할 수 있는가?

X가 이항분포 $\mathrm{B}(9,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=9\cdot p,\ \ \mathrm{V}(X)=9\cdot p\cdot(1-p)$

$\therefore\ \{9\cdot p\}^2=9\cdot p\cdot(1-p)$에서

$9p=1-p\ (\because\ 0<p<1)$

$\therefore\ p=\frac{1}{10}$

7. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 수학외적문제 해결하기

상품에 대해 긍정적인 평가를 할 사건을 A
그 사람이 남자인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$=\frac{0.6\times 0.6}{0.6\times 0.6+0.4\times 0.5}=\frac{9}{14}$

.

8.정답 ①

출제의도 : 함수의 극한 - 극한값의 계산

준식)$=\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{(2x-1)(x+1)}$

$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x-1}\cdot\frac{1}{2x-1}\right)$(

$f(x)=t$ 라 하면)

$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}\times\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x+1}$

$=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

9.[출제의도] 수열의 극한값 구하기

[해설] $f(-2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$

10. 정답 ①

S가 S자신을 원소로 가지면 $S\in S$
또, 자기 자신을 원소로 갖지 않는 집합들의 전체 집합은 $\{A\,|\,A\not\in A,\ A$는 집합$\}$

11. 정답 ④

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-P(A\cup B)$

$P(A\cap B)\leq P(B)$

$\therefore\ \frac{5}{12}\leq P(A\cap B)\leq\frac{2}{3}$

12. [출제의도] 등차수열의 일반항, 합과 일반항 상이의 관계를 이용하여 공차를 구할 수 있는가?

$a_n=6+(n-1)\cdot d$에서

$a_8-a_6=2d$

$S_8-S_6=a_7+a_8=12+13d$

$\frac{2d}{12+13d}=2$에서 $\quad\therefore\ d=-1$

13.정답 ②

[출제의도] 상용로그의 가수의 성질을 이용한 수학내적 문제해결하기

$2^4\times 3^3$은 20개의 양의 약수를 갖는다.

약수들의 곱 $\mathrm{A}=(2^4\times 3^3)^{10}=2^{40}\times 3^{30}$

$\left[\frac{\mathrm{A}}{10^{n-1}}\right]$는 A의 최고자리의 숫자이고

$\log\mathrm{A}=40\log 2+30\log 3=26.353$이다.

$\log 2<0.353<\log 3$이므로

$\left[\frac{\mathrm{A}}{10^{n-1}}\right]=2$

14. 정답 ④

ㄱ. $3^3=27$이므로 $a_3=7$(참)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{5}a_{2k}=a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$

$=4+6+6+6+0=22$(참)

ㄷ. $13^{13}=(10+3)^{13}$이므로 13^{13}의 일의 자리수와 3^{13}의 일의 자리수는 서로 같고,

$3^1=3,\ 3^2=9,\ 3^3=27,\ 3^4=81,\ 3^5=243,\ \cdots$ 이므로 3^n의 일의 자리수는 $3,\ 9,\ 7,\ 1,\ 3,\ \cdots$ 으로 반복되어 13^{13}의 일의 자리수는 3이다. 이와 같은 방법으로 23^{23}의 일의 자리수는 7이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

15. 정답 ②

ㄱ. $f(x)$는 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이므로
함수 $\{f(x)\}^2$, $(f\circ f)(x)$는 모두 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 3-0}g(x)=\lim_{x\to 3-0}\{f(x)\}^2=1^2=1$

$\lim_{x\to 3+0}g(x)=\lim_{x\to 3+0}(f\circ f)(x)$

$=\lim_{t\to 1-0}f(t)=2$

$\therefore\ \lim_{x\to 3-0}g(x)\neq\lim_{x\to 3+0}g(x)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이므로 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이 아니다.

ㄴ. $f(x)$는 폐구간 $[0,\ 3]$에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$는 폐구간 $[0,\ 3]$에서 연속이다.

한편, 함수 $f(x)$는 $x\neq 4$인 모든 x에서 연속이므로 합성함수 $(f\circ f)(x)$는 $x\neq 4$이고 $f(x)\neq 4$인 x에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 $x=4$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이다.

(i) $x=3$에서의 연속성

$\lim_{x\to 3-0}g(x)=\lim_{x\to 3-0}\{f(x)\}^2=2^2=4$

$\lim_{x\to 3+0}g(x)=\lim_{x\to 3+0}(f\circ f)(x)$

$=\lim_{t\to 2-0}f(t)=4$

$g(3)=\{f(3)\}^2=2^2=4$

$\therefore\ \lim_{x\to 3-0}g(x)=\lim_{x\to 3+0}g(x)=g(3)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(ii) $x=4$에서의 연속성

$\lim_{x\to 4-0}g(x)=\lim_{x\to 4-0}(f\circ f)(x)$

$=\lim_{t\to +0}f(t)=3$

$\lim_{x\to 4+0}g(x)=\lim_{x\to 4+0}(f\circ f)(x)$

$=\lim_{t\to 1+0}f(t)=3$

$g(4)=f(f(4))=f(0)=3$

$\therefore\ \lim_{x\to 4-0}g(x)=\lim_{x\to 4+0}g(x)=g(4)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$는 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)$는 폐구간 $[0,\ 3]$에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$는 폐구간 $[0,\ 3]$에서 연속이다.

한편, 함수 $f(x)$는 $x\neq 4$인 모든 x에서 연속이므로 합성함수 $(f\circ f)(x)$는 $x\neq 4$이고 $f(x)\neq 4$인 x에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 $x=4$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이다.

(i) $x=3$에서의 연속성

$\lim_{x\to 3-0}g(x)=\lim_{x\to 3-0}\{f(x)\}^2=2^2=4$

$\lim_{x\to 3+0}g(x)=\lim_{x\to 3+0}(f\circ f)(x)$

$=\lim_{t\to 2-0}f(t)=4$

$g(3)=\{f(3)\}^2=2^2=4$

$\therefore \lim\limits_{x\to3-0} g(x)=\lim\limits_{x\to3+0} g(x)=g(3)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(ii) $x=4$에서의 연속성

$\lim\limits_{x\to4-0} g(x)=\lim\limits_{x\to4-0}(f\circ f)(x)$

$=\lim\limits_{t\to+0} f(t)=2$

$\lim\limits_{x\to4+0} g(x)=\lim\limits_{x\to4+0}(f\circ f)(x)$

$=\lim\limits_{t\to1+0} f(t)=3$

$\therefore \lim\limits_{x\to4-0} g(x)\neq\lim\limits_{x\to4+0} g(x)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 불연속이므로 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이 아니다.

이상에서 함수 $g(x)$가 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이 되도록 하는 함수 $f(x)$의 그래프는 ㄴ이다.

16. [출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구한다.

꺼낸 3개의 공에 적힌 수 중 네 수 0, 2, 3, 5의 개수를 각각 $a,\ b,\ c,\ d$라 하자.

세 수의 곱은 0 또는 $2^b3^c5^d$이고

$a+b+c+d=3\ (a\ge0,\ b\ge0,\ c\ge0,\ d\ge0)$

이다.

ⅰ) $a\neq0$일 때

세 수의 곱은 항상 0이므로 구하는 정수는 1개이다.

ⅱ) $a=0$일 때

순서쌍 $(b,\ c,\ d)$가 다르면 $2^b3^c5^d$의 값도 다르므로 구하는 정수의 개수는 $b+c+d=3$을 만족시키는 순서쌍 $(b,\ c,\ d)$의 개수와 같다. 즉, ${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$이다.

위의 ⅰ), ⅱ)에서 구하는 정수의 개수는 11이다.

17. 정답 ②

$A(0,\ 4)$, $B(0,\ 8)$라 하자.

OA를 한 변으로 하는 사각형은 $(4,\ 0)$ 또는 $(8,\ 0)$을 한 꼭짓점으로 하고 나머지 한 꼭짓점을 $(4,\ 4)$, $(4,\ 8)$, $(8,\ 4)$, $(8,\ 8)$로 하면 되므로 8가지,

OB를 한 변으로 하는 사각형은 $(4,\ 0)$ 또는 $(8,\ 0)$을 한 꼭짓점으로 하고 나머지 한 꼭짓점을 $(4,\ 4)$, $(4,\ 8)$, $(8,\ 4)$, $(8,\ 8)$로 하면 되는데, 그 중 $(8,\ 0)$, $(4,\ 4)$을 꼭짓점으로 하면 삼각형이 되므로 그 경우를 제외하면 7가지이다.

따라서 전체 경우는 $8+7=15$가지이다.

18.[정답] ②

[해설]

집에서 시장까지의 거리를 확률변수 X라 하면

X는 정규분포 $N(1740,\ 500^2)$을 따른다.

따라서, $\mathrm{P}(X\ge2000)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{2000-1740}{500}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge0.52)=0.3$

여기에서 집에서 시장까지의 거리와 자가용 이용에 관한 표를 만들면

	자가용 이용	자가용 이용 안 함	계
$2000m$ 미만	0.05×0.7	0.95×0.7	0.7
$2000m$ 이상	0.15×0.3	0.85×0.3	0.3
계			1

따라서, $\frac{0.05\times0.7}{0.05\times0.7+0.15\times0.3}=\frac{35}{80}=\frac{7}{16}$

19. [정답] : ①

$P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$ 에서

$\frac{-a+2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{a+2}{10}+\frac{2a+2}{10}=1$

$\frac{2a+8}{10}=1\quad\therefore a=1$

$E(X)=-1\times\frac{1}{10}+0\times\frac{2}{10}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{4}{10}=1$

$E(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{10}+0^2\times\frac{2}{10}+1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{4}{10}$

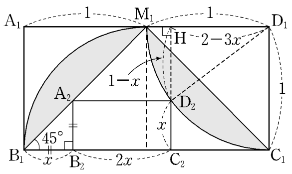
$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=1$

$\therefore V(3X+2)=3^2\cdot V(X)=9$

20.[정답] ③

[출제의도] 반복되는 도형에서 규칙을 찾아 넓이의 극한값을 구할 수 있는가?

무한등비급수 $S=\frac{a}{1-r}$를 구한다.



R_1의 넓이 $a=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\times2=\frac{\pi}{2}-1$

공비 r를 구하기 위해 먼저 길이의

닮음비 $\frac{\overline{\mathrm{C_2D_2}}}{\overline{\mathrm{C_1D_1}}}$를 구한다.

$\overline{\mathrm{C_2D_2}}=x$라 두면 $\mathrm{D_2}$에서 $\overline{\mathrm{A_1D_1}}$에서 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{\mathrm{B_1M_1}}$과 $\overline{\mathrm{B_1C_1}}$이 이루는 각이 $45°$이므로

$\overline{\mathrm{B_1B_2}}=\overline{\mathrm{A_2B_2}}=x$, $\overline{\mathrm{B_2C_2}}=2x$,

$\overline{\mathrm{HD_1}}=2-3x$, $\overline{\mathrm{HD_2}}=1-x$가 되고

$\overline{\mathrm{HD_1}}^2+\overline{\mathrm{HD_2}}^2=\overline{\mathrm{D_1D_2}}^2=1$에서

$(2-3x)^2+(1-x)^2=1$

$5x^2-7x+2=0$

$(5x-2)(x-1)=0\quad\therefore\ x=\frac{2}{5},\ 1$

$x\neq1$이므로 $x=\frac{2}{5}$

따라서, 넓이의 비는 $\frac{4}{25}$이고, 이것이 공비가 된다.

$\therefore\ S=\frac{\frac{\pi}{2}-1}{1-\frac{4}{25}}=\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

21. 정답 ③

ㄱ. $[a,\ b]$에서 $\mathrm{F}'(x)=f(x)>0$이므로 $\mathrm{F}(x)$는 $[a,\ b]$에서 증가한다. [참]

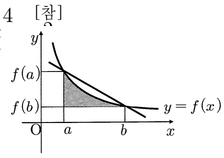
ㄴ.(직선 PQ의 기울기)$=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 이므로 직선 PQ의 기울기가 일반적으로 $\frac{\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)}{b-a}$와 같다고 할 수는 없다. [거짓]

ㄷ. $\int_a^b\{f(x)-f(b)\}dx$ 는 [그림1]의 어두운 부분의 넓이이고,

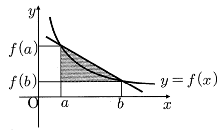
$\frac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}$ 는 [그림2]의 직각삼각형의 넓이이다.

$\therefore\int_a^b\{f(x)-f(b)\}dx\ \leqq\ \frac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}$

[참]



[그림1]



[그림2]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

22.정답 2

출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+x}{x+1}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x(x+1)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to2}x=2$

23. 정답 14

$f'(x)=2(x-1)(x-4)+(x-1)^2$

$=(x-1)\{2(x-4)+(x-1)\}$

$=(x-1)(3x-9)$

$=3(x-1)(x-3)$

따라서 $x=3$에서 극솟값 $f(3)=(3-1)^2(3-4)+a$를 가지는데 조건에서 극솟값이 10이므로

$(3-1)^2(3-4)+a=10\quad\therefore\ a=14$

24. [출제의도] 주어진 규칙에 따라 수열의 항을 추측할 수 있는가를 묻는 문제이다.

백의 자리수가 1인 자연수(1□△)가 $9\cdot8=72$개, 백의 자리수가 2인 자연수(2□△)가 $9\cdot8=72$개다.모두 144개 이므로 150번째 수는 백의 자리수가 3이고, 작은 수부터 6번째 수인 307이다.

25. [정답] 22

[출제의도] 삼차함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

삼차함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값을 가지므로

$f'(1)=0$이다.

$f'(x)=6x^2-24x+a$이므로

$f'(1)=6-24+a=0$

$\therefore\ a=18$

따라서, $f(x)=2x^3-12x^2+18x-4$이고

$f(1)=2-12+18-4$

$=4=M$

$\therefore\ a+M=18+4=22$

26. $A_1=\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right),\ A_n=\dfrac{1}{n}f(1)$ 이므로

$$A_1+A_n=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f(1)\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{a}{n}+b+1+a+b\right)$$
$$=\frac{1}{n^3}\{1+an+(1+a+2b)n^2\}$$
$$=\frac{7n^2+1}{n^3}$$

따라서 $a=0$이고 $1+a+2b=7$ 즉, $b=3$이다.

$\therefore\ f(x)=x^2+3$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k=8\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\times\frac{1}{n}\times f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$=8\int_0^1 xf(x)\,dx=8\int_0^1 x(x^2+3)\,dx$$
$$=8\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=2+12=14$$

27. **[출제의도] 삼차함수의 그래프를 이용하여 미분계수를 구한다.**

조건 (가)에서 $f(a)=f(2)=f(6)=k$로 놓으면

$f(a)-k=f(2)-k=f(6)-k=0$

$g(x)=f(x)-k$라 하면

$g(a)=g(2)=g(6)=0$

$g(x)=(x-a)(x-2)(x-6)$

그러므로 $f(x)=(x-a)(x-2)(x-6)+k$

$f(x)$를 미분하면

$f'(x)=(x-2)(x-6)+(x-a)(x-6)+(x-a)(x-2)$

조건 (나)에서 $f'(2)=-4$이므로

$-4(2-a)=-4\ \ \therefore\ a=1$

$\therefore\ f'(a)=(a-2)(a-6)=(-1)\times(-5)=5$

28.정답 68

8명이 자리에 앉는 경우의 수는 $8!$

이때, 적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정되는 사건을 A라 하면 A^c은 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정되지 않는 사건이다.

이때, 사건 A^c이 일어날 경우는 다음 두 가지이다.

	1열	2열	3열
1행	남	여	남
2행	여		여
3행	남	여	남

	1열	2열	3열
1행	여	남	여
2행	남		남
3행	여	남	여

따라서 A^c이 일어나는 경우의 수는 $4!\times4!\times2$

$$\therefore\ p=\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^c)=1-\frac{4!\times4!\times2}{8!}$$
$$=1-\frac{4\times3\times2\times2}{8\times7\times6\times5}=1-\frac{1}{35}=\frac{34}{35}$$
$$\therefore\ 70p=70\times\frac{34}{35}=68$$

[다른 풀이]

여사건은 이웃한 남학생이 없는 경우이므로

$$p=1-\frac{4!4!\times2}{8!}=\frac{34}{35}$$

$\therefore\ 70p=68$

29. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질 이해하기

[해설] $10^{f(x)+g(x)}=x$의 양변에 상용로그를 취하면 $f(x)+g(x)=\log x$이다.

즉, $\log x$의 지표가 $f(x)$, 가수가 $g(x)$이다.

$f(a)=3$이므로 $\log a$의 지표는 3이다.

$\log a=3+g(a)$

$$\log\sqrt{a}=\frac{3}{2}+\frac{g(a)}{2}=1+\left\{\frac{1}{2}+\frac{g(a)}{2}\right\}$$

$\log\sqrt{a}$의 가수는 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{g(a)}{2}$이다.

$g(a)+g(\sqrt{a})=g(a)+\left\{\dfrac{1}{2}+\dfrac{g(a)}{2}\right\}=1$이므로

$g(a)=\dfrac{1}{3}$이다.

따라서 $\log a=3+\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{3}$이므로 $a=10^{\frac{10}{3}}$이다

$\log a=\log 10^{\frac{10}{3}}=\dfrac{10}{3}=\dfrac{q}{p}$에서

$p=3,\ q=10,\ \ \therefore\ p+q=13$

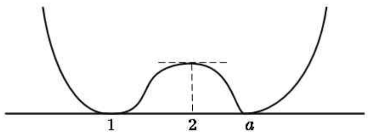
30.정답 12

$g(x)=f(x)-f(1)$ 이라 하면

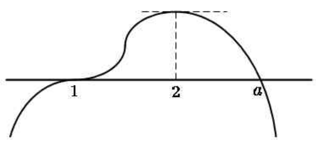
$g(1)=g'(1)=0,\ g'(2)=0$

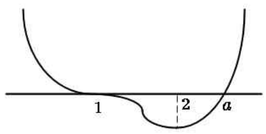
$y=|g(x)|$는 $x=1$에서 극값을 갖는다.

따라서 (나)의 조건에 맞도록 $y=|g(x)|$의 그래프를 그려 보면 아래그림과 같다.



$y=g(x)$의 그래프는 다음 두 가지 경우에 해당한다.





$\therefore\ g'(x)=a(x-1)^2(x-2)=f'(x)\ \ (a\neq0)$

$$\frac{f'(5)}{f'(3)}=\frac{48a}{4a}=12$$