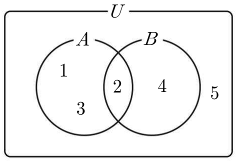
16회수학 나형 정답

1	④	2	②	3	⑤	4	①	5	②
6	①	7	④	8	①	9	②	10	①
11	④	12	②	13	②	14	⑤	15	③
16	③	17	②	18	①	19	③	20	③
21	③	22	53	23	200	24	8	25	9
26	16	27	64	28	251	29	228	30	5

해 설

1. [출제의도] 집합의 연산법칙 이해하기



$(A^C \cap B)^C = A \cup B^C = \{1, 2, 3, 5\}$

따라서 집합 $(A^C \cap B)^C$의 모든 원소의 합은 11

2. 정답 ②

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$

$\therefore\ b=-1-a\ \cdots$ ㉠

이 때, ㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax-(1+a)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1+a)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1+a)}=\frac{1}{a+2}=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ a=1$

한편, ㉠에서 $b=-2\ \therefore\ ab=-2$

3. [출제의도] 변환된 확률변수의 평균을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)+5=30$ 이므로 $\mathrm{E}(X)=50$

4. 정답 ①

$y=x^2-2x+a$의 그래프를 y축의 방향으로 -4 만큼

평행이동하면 $y+4=x^2-2x+a$이므로

$y=x^2-2x+a-4$

x축과 접하므로, $\frac{D}{4}=1-(a-4)=0$

$\therefore\ a=5$

5.[출제의도] 등비수열의 일반항 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1a_3=\frac{1}{36}$에서 $a^2r^2=\frac{1}{6^2}$이므로

$ar=\frac{1}{6}$ $(\because\ ar>0)$ ……㉠

$a_5=\frac{4}{81}$에서 $ar^4=\frac{4}{81}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $r=\frac{2}{3}$, $a=\frac{1}{4}$

따라서 $a_4=ar^3=\frac{2}{27}$

6. [출제의도] 미분계수의 정의를 이해하여 미정계수를 구한다.

$f'(x)=2x+a$이므로 $f'(1)=2+a$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}(2+a)$$

따라서 $\frac{1}{2}(2+a)=6$ 에서 $a=10$

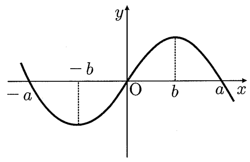
7.[출제의도] 조건부 확률을 이해하여 확률을 구한다.

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{7}{12}$

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{4}{7}$

8.정답 ①

$f(x)=-x(x+a)(x-a)$의 개형은 다음과 같다.



$$\mathrm{A}=\int_{-b}^{a}f(x)\,dx=\int_{-b}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{a}f(x)\,dx$$

$$\mathrm{B}=\int_{b}^{a+b}f(x-b)\,dx=\int_{0}^{a}f(x)\,dx$$

$$\therefore\int_{-b}^{0}f(x)\,dx=\mathrm{A}-\mathrm{B}$$

따라서 $\int_{-b}^{a}|f(x)|\,dx$

$=-\int_{-b}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{a}f(x)\,dx$

$=-(\mathrm{A}-\mathrm{B})+\mathrm{B}$

$=-\mathrm{A}+2\mathrm{B}$

9. [출제의도] 함수의 극한을 이해하고 조건을 만족하는 값을 구한다.

$\lim_{x\to-1-0}f(x)+\lim_{x\to1+0}f(x)=2+0=2$

10. [출제의도] 모비율의 신뢰구간을 이해하여 표본의 크기를 추측한다.

신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\left[0.2-1.96\times\frac{\sqrt{0.2\times0.8}}{\sqrt{n}},\ 0.2+1.96\times\frac{\sqrt{0.2\times0.8}}{\sqrt{n}}\right]$$

$2\times1.96\times\frac{\sqrt{0.2\times0.8}}{\sqrt{n}}=0.112$ 이므로 $n=196$

.

11. [출제의도] 함수의 뜻을 알고 추론하기

$f(0)=3,\ f(1)=1,\ f(2)=3$

$g(0)=a+b,\ g(1)=b,\ g(2)=a+b$

두 함수 f와 g가 서로 같으므로

$f(0)=g(0),\ f(1)=g(1),\ f(2)=g(2)$

$\therefore\ a+b=3,\ b=1$이므로

$a=2,\ b=1$

따라서 $2a-b=3$

12.[출제의도] 정규분포를 활용하여 실생활과 관련된 문제를 해결한다.

임의로 추출된 야구공 9개 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면, $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(144.9,\ 2^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(141.7\le\overline{X}\le148.9)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{141.7-144.9}{2}\le Z\le\frac{148.9-144.9}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.6\le Z\le2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le1.6)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.9224$

13. [출제의도] 무한급수와 일반항 사이의 관계 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2-\frac{a_n}{9^n}\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{a_n}{9^n}\right)=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{9^n}=2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{9^n}{2a_n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\times\frac{a_n}{9^n}+\frac{1}{9^n}}=\frac{1}{4}$

14.[출제의도] 합성함수의 성질 추론하기

ㄱ. $f(g(2))=f(2)=2$ (참)

ㄴ. 함수 $(g\circ f)(x)$는

ⅰ) $x>2$일 때, $g(f(x))=g(2)=2$

ⅱ) $|x|\le2$일 때, $g(f(x))=g(x)=x^2-2$

ⅲ) $x<-2$일 때, $g(f(x))=g(-2)=2$

함수 $(g\circ f)(-x)$는

ⅰ) $x>2$일 때, $g(f(-x))=g(-2)=2$

ⅱ) $|x|\le2$일 때, $g(f(-x))=g(-x)=x^2-2$

ⅲ) $x<-2$일 때, $g(f(-x))=g(2)=2$

$\therefore\ (g\circ f)(-x)=(g\circ f)(x)$ (참)

ㄷ. 함수 $(f\circ g)(x)$는

ⅰ) $x>2$일 때, $x^2-2>2$이므로

$f(g(x))=f(x^2-2)=2$

ⅱ) $|x|\le2$일 때, $-2\le x^2-2\le2$이므로

$f(g(x))=f(x^2-2)=x^2-2$

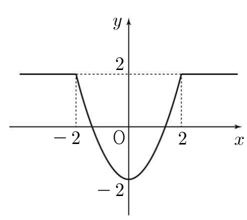
ⅲ) $x<-2$일 때, $x^2-2>2$이므로

$f(g(x))=f(x^2-2)=2$

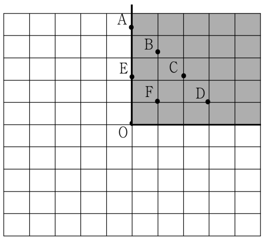
$\therefore\ (f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

[참고] 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프는 그림과 같다.



15. 정답 ③



그림과 같이 로봇이 O를 출발하여 4번 움직여서 도착할 수 있는 지점은 어두운 영역에 대하여 A, B, C, D, E, F의 6가지의 경우이고 그 가짓수에 4를 곱한 값이 답이 된다.

(1) A에 도착하는 경우 : 1가지

(2) B에 도착하는 경우 : $\dfrac{4!}{3!}=4$가지

(3) C에 도착하는 경우 : $\dfrac{4!}{2!2!}=6$가지

(4) D에 도착하는 경우 : $\dfrac{4!}{3!}=4$가지

(5) E에 도착하는 경우 :
① ↑→↑← ② →↑←↑ ③ →↑↑← ④ ↑←↑→ ⑤ ←↑→↑ ⑥ ←↑↑→
의 6가지

(6) F에 도착하는 경우 :
① →→↑← ② ↓→↑↑ ③ ←↑→→ ④ ↑↑→↓
의 4가지

$\therefore\ (1+4+6+4+6+4)\times 4=100$가지

16. **[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 추론한다.**

$n=2m-1$을 대입하면 $\dfrac{a_{2m+1}}{a_{2m-1}}=\dfrac{(2m-1)^2}{2m(2m+1)}$

그러므로 (가)는 $\dfrac{(2m-1)^2}{2m(2m+1)}$

$m-1$개의 식을 곱하여 정리하면

$\dfrac{a_{2m+1}}{a_1}=\dfrac{1^2\times 3^2\times 5^2\times \cdots \times(2m-1)^2}{2\times 3\times 4\times 5\times \cdots \times(2m+1)}$

$a_{2m+1}=\dfrac{1\times 3\times 5\times \cdots \times(2m-1)}{2\times 4\times 6\times \cdots \times 2m}\times\dfrac{1}{2m+1}$

그러므로 (나)는 $\dfrac{1}{2m+1}$

따라서 $f(5)\times g(4)=\dfrac{9}{110}$

17. **[출제의도] 중복조합의 성질을 이해하여 경우의 수를 구한다.**

네 자리 자연수의 각 자리의 수를 각각 x, y, z, w라 하면 $x+y+z+w=14$

x, y, z, w가 모두 홀수이므로

$x=2a+1$, $y=2b+1$, $z=2c+1$, $w=2d+1$

(단, a, b, c, d는 0이상 4이하의 정수)

$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)+(2d+1)=14$

$a+b+c+d=5$

a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 5개를 택한다. 이때 a, b, c, d는 4이하의 정수이므로 한 가지만 5번 택하는 4가지 경우는 제외한다.

${}_4H_5-4={}_{4+5-1}C_5-4={}_8C_5-4=\dfrac{8!}{5!3!}-4=52$

18. **[출제의도] 등비수열의 일반항을 추측하여 무한등비급수의 합을 구한다.**

점 A_2를 지나고 선분 B_1C_1에 평행한 직선과 선분 A_1B_1, 선분 A_1C_1의 교점을 각각 P, Q라 하자.

두 삼각형 $A_1B_1C_1$, A_1PQ의 닮음비는 $3:2$, 두 삼각형 A_1PQ, $A_2B_2C_2$의 닮음비는 $2:1$이므로 삼각형 $A_1B_1C_1$과 삼각형 $A_2B_2C_2$의 닮음비는 $3:1$

그러므로 과 의 넓이의 비는 $9:1$

$S_1=\left\{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2-\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right\}\times\dfrac{2}{3}+2\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}\right.$

$=\dfrac{7}{6}\sqrt{3}-\dfrac{2}{9}\pi \quad \therefore\ \dfrac{S_1}{1-\dfrac{1}{9}}=\dfrac{1}{16}(21\sqrt{3}-4\pi)$

19. 답 ③

다항함수 $f(x)$가 $f_0(x)=1$, $f_1(x)=x$,

$f_{n+1}(x)=xf_n(x)+f_{n-1}(x)$ (n은 자연수)

을 만족하므로, $x=0$을 대입하면

$f_0(0)=1$, $f_1(0)=0$

이 때, $n=1$을 대입하면,

$f_2(0)=0 \cdot f_1(0)+f_0(0)=1$

같은 방법으로, $f_3(0)=0\cdot f_2(0)+f_1(0)=0$

$\vdots$

따라서 짝수 번째항은 1, 홀수 번째 항은 0,

즉, $f_{2n-1}(0)=0$, $f_{2n}(0)=1$이다.

또한, $f_0(x)$는 우함수이고, $f_1(x)$는 기함수이므로

$f_2(x)=xf_1(x)+f_0(x)$는 우함수이다.

(기함수·기함수=우함수, 우함수+우함수=우함수)

같은 방법으로 $f_3(x)=xf_2(x)+f_1(x)$는 기함수이다.

즉, 홀수 번째 항은 모두 기함수이고,

짝수 번째항은 모두 우함수이다.

따라서, $f_{2n-1}(x)$: 기함수, $f_{2n}(x)$: 우함수

한편, $f_2(x)=xf_1(x)+f_0(x)$에서

$f_1(x)$이 1차이므로 $f_2(x)$의 차수는 2차이다.

같은 방법으로 $f_3(x)=xf_2(x)+f_1(x)$에서

$f_2(x)$이 2차이므로 $f_3(x)$의 차수는 3차이다.

즉, $f_n(x)$은 n차 다항식이다.

이 때, $f_{2n-1}(x)$은 $2n-1$차 다항식이고, 기함수이므로,

항 중에 짝수차 항이 없으므로,

$0, 1, 2, 3, \cdots, 2n-1$

중 짝수를 뺀 $1, 3, 5, \cdots, 2n-1$

은 모두 n개의 홀수이므로

$f_{2n-1}(x)$은 n개의 항을 갖는 다항식이다.

하지만, $f_{2n}(x)$은 모두 $2n+1$개의 항 중에

$0, 1, 2, 3, 4, \cdots, 2n-1, 2n$

짝수차수를 갖는 항은 $0, 2, 4, 6, \cdots, 2n$으로 0부터이므로 모두 $n+1$개이다.

20. **[출제의도] 절대부등식의 의미를 이해하여 문제해결하기**

점 P의 좌표를 (a, b)라 하자.

$b=\dfrac{2}{a-1}+2$이므로

직사각형 PRSQ의 둘레의 길이 $2(\overline{PR}+\overline{PQ})$는

$2(a-1)+2(b-2)\ge 2\sqrt{2(a-1)\times 2(b-2)}$

$=2\sqrt{2(a-1)\times\dfrac{4}{a-1}}$

$=4\sqrt{2}$

(단, 등호는 $a-1=b-2$일 때 성립하므로

$a=1+\sqrt{2}$, $b=2+\sqrt{2}$이다.)

따라서 직사각형 PRSQ의 둘레의 길이의 최솟값은 $4\sqrt{2}$

21. 답 ③

[정적분과 넓이]

ㄱ. 구간 $[a, b]$에서 $F'(x)=f(x)>0$이므로 함수 $F(x)$는 증가함수이다. (참)

ㄴ. 직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (거짓)

ㄷ. 점 Q에서 직선 PA에 내린 수선의 발을 R라 놓으면

$\dfrac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}=\triangle PQR$

$\displaystyle\int_a^b\{f(x)-f(b)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(b)dx$

$\displaystyle=\int_a^b f(x)dx-\square QRAB$

$\displaystyle\therefore\ \int_a^b\{f(x)-f(b)\}dx$

$\le\dfrac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

22. 정답 53

[출제의도] 이항분포에서 평균과 분산 구하기

동전 2개 모두 앞면이 나올 확률이 $\dfrac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100, \dfrac{1}{4}\right)$을 따른다.

$E(X)=100\times\dfrac{1}{4}=25$

$E(Y)=E(2X+3)=2E(X)+3=53$

23. **[출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 계산한다.**

$\displaystyle\int_0^{10}(x+1)^2dx-\int_0^{10}(x-1)^2dx=\int_0^{10}4x\,dx=200$

24. **[출제의도] 필요조건과 충분조건 이해하기**

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x\,|\,0<x\le 7\}$

$Q=\{x\,|\,-1\le x\le a\}$

$R=\{x\,|\,x\ge b\}$

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$

r는 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset R$

$P \subset Q \subset R$이므로 $a \geq 7,\ b \leq -1$
따라서 $a-b$의 최솟값은 $7-(-1)=8$

25. **[출제의도] 지수법칙 이해하기**

$3^{a-1}=2$에서 $3^a=6$

$5=6^{2b}=\left(3^a\right)^{2b}=3^{2ab}$

따라서 $5^{\frac{1}{ab}}=\left(3^{2ab}\right)^{\frac{1}{ab}}=3^2=9$

[다른 풀이]

$3^{a-1}=2$에서 $3^a=6$이므로 $a=\log_3 6$

$6^{2b}=5$이므로 $b=\dfrac{1}{2}\log_6 5$

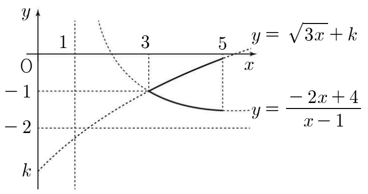
$ab=\dfrac{1}{2}\log_3 6\times\log_6 5=\dfrac{1}{2}\log_3 5$

따라서 $5^{\frac{1}{ab}}=5^{2\log_5 3}=9$

26. **[출제의도] 유리함수와 무리함수의 그래프의 성질 이해하기**

$3 \leq x \leq 5$에서 정의된 함수

$y=\dfrac{-2x+4}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}-2$의 그래프는 그림과 같다.



$y=\sqrt{3x}+k$가 점 $(3,\ -1)$을 지날 때,
실수 k가 최댓값을 가지므로 $M=-4$
따라서 $M^2=16$

27. **[출제의도] 무한수열의 극한을 활용하여 문제해결하기**

직각삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n$에서

$\angle\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n=\dfrac{\pi}{3}$이고 $\overline{\mathrm{OP}_n}=n+2$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}_n}=\dfrac{1}{2}(n+2),\ \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(n+2)$

$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}_n}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\dfrac{\sqrt{3}(n+2)^2}{8}$

S_n은 $\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n$의 넓이에서 원 C_n의 넓이의 $\dfrac{1}{6}$을 빼면 된다.

$\therefore\ S_n=\dfrac{\sqrt{3}(n+2)^2}{8}-\dfrac{n\pi}{6}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\dfrac{\sqrt{3}(n+2)^2}{8}-\dfrac{n\pi}{6}}=\frac{8}{\sqrt{3}}=a$

따라서 $3a^2=64$

28. 정답 251

[출제의도] 미분을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

분침의 속력 : $\dfrac{2\pi}{60}=\dfrac{\pi}{30}$

시침의 속력 : $\dfrac{\frac{\pi}{6}}{60}=\dfrac{\pi}{360}$

3시 정각에서 t(분) 후 분침과 시침이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, 4시 정각 근처에서

$\theta=\dfrac{\pi}{30}t-\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{360}t\right)=\dfrac{\pi}{30}t-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{360}t$

$\angle\mathrm{POQ}=2\pi-\theta$ 이므로

$S=\dfrac{1}{2}\times2\times3\sin(2\pi-\theta)=3\cos\dfrac{11\pi}{360}t$

$\dfrac{dS}{dt}=-3\times\dfrac{11\pi}{360}\times\sin\dfrac{11\pi}{360}t$

$t=60$일 때, $\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{11}{240}\pi$

$\therefore\ p+q=251$

29.답 228

5개의 공을 상자 A, B, C에 넣는 전체 방법의 수는

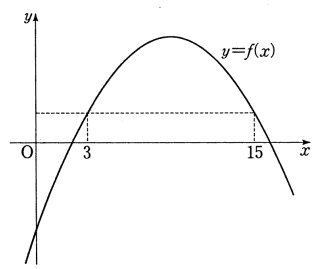
$3^5=243$

합이 13 이상이 되는 경우는

$\{(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)\},\ \{(1),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5)\},$
$\{(2),\ (1,\ 3,\ 4,\ 5)\}$

$\therefore\ 243-(3+3\times2+3\times2)=228$

30.정답 5



$a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{15}$

$f(15)-f(m-1)<0$

$\therefore\ f(15)<f(m-1)$

그림에서 $4 \leqq m-1 \leqq 14$

$5 \leqq m \leqq 15$ 이므로

m 의 최솟값은 5