14회수학 나형 정답

1	①	*2*	②	*3*	③	*4*	⑤	*5*	③
6	①	*7*	④	*8*	②	*9*	⑤	*10*	④
11	②	*12*	①	*13*	①	*14*	⑤	*15*	④
16	②	*17*	④	*18*	②	*19*	①	*20*	③
21	①	*22*	256	*23*	3	*24*	51	*25*	98
26	76	*27*	27	*28*	130	*29*	18	*30*	120

해 설

1. 정답 ①

[출제의도] 수열의 극한을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-3}{3n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{2+0-0}{3-0}=\frac{2}{3}$$

2. [출제의도] 무한등비급수의 합을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$$\log_2 2+\log_2\sqrt{2}+\log_2\sqrt[4]{2}+\log_2\sqrt[8]{2}+\cdots$$

$$=\log_2 2+\frac{1}{2}\log_2 2+\frac{1}{4}\log_2 2+\frac{1}{8}\log_2 2+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

3. 함수의 극한과 연속성

$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+ax}=b$에서 $x\to2$일 때 (분자) $\to0$이고 $b(\neq0)$로 수렴하므로 (분모) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^2+ax)=0$이므로

$4+2a=0 \quad \therefore a=-2$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x}$$

$$=\frac{2+2}{2}=2=b$$

$\therefore a+b=-2+2=0$

4. 정답 ⑤

[출제의도] 다항함수의 극한의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x}=3$이므로

$f(x)-x^2$은 일차항의 계수가 3인 일차식이다.

$f(x)-x^2=3x+a$에서

$f(x)=x^2+3x+a$

이때 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{(x-1)f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{f(x)}=1$이므로

$\frac{2}{f(1)}=1$ 즉, $f(1)=2$이다.

$f(1)=1+3+a=2$에서

$a=-2$

따라서 $f(x)=x^2+3x-2$이므로

$f(2)=2^2+3\cdot2-2=8$

5. [출제의도] 조건부확률의 뜻을 알고 이를 구하기

남학생을 뽑을 사건을 A, 희망한 학생을 뽑을 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{48}{100}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{30}{100}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{30}{48}=\frac{5}{8}$

답 ③

6.함수의 극한과 연속성 정답 ①

점$(t,\ \sqrt{t})$에서 두 점$(1,\ 0)$, $(2,\ 0)$까지의 거리 d_1, d_2는

$$d_1=\sqrt{(t-1^2)+(\sqrt{t})^2}=\sqrt{t^2-t+1}$$

$$d_2=\sqrt{(t-2^2)+(\sqrt{t})^2}=\sqrt{t^2-3t+4}$$

$$\therefore\lim_{t\to\infty}(d_1-d_2)$$

$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2-3t+4})$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t-3}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2-3t+4}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2-\frac{3}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{4}{t^2}}}$$

$$=\frac{2}{1+1}=1$$

7.[출제의도] 미분계수의 기하학적 의미를 알고 계산하기

$g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로

ㄱ.$f(1)+g'(1)=f'(1)<0 \quad \therefore$ 거짓

답 ④

8.[출제의도] 무한등비급수의 합을 구하기

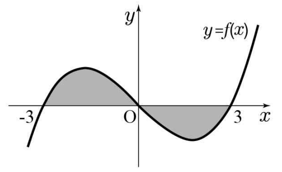
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}=\frac{0}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\frac{0}{4^4}+\frac{1}{4^5}+\frac{2}{4^6}+\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{4^8}+\cdots\right)+\left(\frac{2}{4^3}+\frac{2}{4^6}+\frac{2}{4^9}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{4^2}}{1-\frac{1}{4^3}}+\frac{\frac{2}{4^3}}{1-\frac{1}{4^3}}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{63}{64}}+\frac{\frac{2}{64}}{\frac{63}{64}}=\frac{2}{21}$$

9. [출제의도] 정적분과 넓이 이해하기

$f(x)=x^3-9x=x(x-3)(x+3)$



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-3}^{3}|f(x)|\,dx=2\int_{-3}^{0}f(x)\,dx$$

$$=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\right]_{-3}^{0}=\frac{81}{2}$$

10. [출제의도] 지표와 가수의 성질을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$\log A=n+\alpha$ (n은 정수, $0<\alpha<1$)라 하면

$\log\frac{1}{A}=-\log A=-n-\alpha$

$=(-n-1)+(1-\alpha)$ 이므로

지표는 $-n-1$, 가수는 $1-\alpha$

이 때, 지표의 합은 -1, 가수의 합은 1이다.

$\therefore\ a^2+b^2=2$

11. 정답 ②

[출제의도] 원순열에 대한 경우의 수를 구할 수 있는가?

A와 B를 한 묶음으로 생각해서 5개를 원형의 실험기구에 넣는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

또한, A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는

$24\times2=48$

12.정답 ①

① $A*U=(A\cap U)\cup(A\cup U)^c=A\cup\phi=A$

② $B*A=(B\cap A)\cup(B\cup A)^c$이므로

$A*B=B*A$

③ $A*\phi=(A\cap\phi)\cup(A\cup\phi)^c=\phi\cup A^c=A^c$

④ $A^c*B^c=(A^c\cap B^c)\cup(A^c\cup B^c)^c$

$=(A\cup B)^c\cup(A\cap B)=A*B$

⑤ $A*A^c=(A\cap A^c)\cup(A\cup A^c)^c=\phi\cup U^c=\phi$

13. [출제의도] 등차수열 이해하기

두 점 A, B의 x좌표는 각각 $-\sqrt{k}$, $\sqrt{k}$

세 수 $-\sqrt{k}$, $\sqrt{k}$, 3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $2\sqrt{k}=-\sqrt{k}+3$, $\sqrt{k}=1$

따라서 $k=1$

14.[출제의도] 접선의 방정식 이해하기

$f'(x)=2x$이고 $f'(1)=2$이므로

점 $\mathrm{P}(1,1)$에서의 접선 l의 방정식은

$y=2x-1$

접점 Q의 좌표를 (a,b)라 하면 $b=2a-1$

직선 l에 곡선 $y=g(x)$가 접하므로

$g'(x)=-2x+6$

$g'(a)=-2a+6=2$

$a=2$, $b=3$이므로 점 Q $(2,3)$

$g(2)=3$이므로 $k=4$

원점으로부터 가까운 점을 R라 하면

$\mathrm{R}(1,0)$, $\mathrm{S}(5,0)$

따라서 삼각형 QRS의 넓이는 6

15. 정답 ④

증가와 감소버튼을 3번씩 누를 때 채널 50에 다시 오므로

$${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{20}{2^6}=\frac{5}{16}$$

16. 정답 ②

[출제의도] 상용로그의 가수를 이해하고 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log x^3-\log x=3\log x-\log x=2\log x=$(정수) 이므로

ㄱ. $\sqrt{10}<x<1000$에서 $1<2\log x<6$

$\therefore N(\sqrt{10},\ 1000)=4$ (참)

ㄴ. $10^{p} < x < 10^{p+10}$에서 $2p < 2\log x < 2p+20$

$\therefore N(10^{p},\ 10^{p+10}) = 19$ (참)

ㄷ. $2^{10} < x < 2^{50}$에서 $6.02 < 2\log x < 30.10$

$\therefore N(2^{10},\ 2^{50}) = 24$ (거짓)

17. 정답 ④

함수 $f(x) = x^3 - 3x$에 대하여 $f'(x) = 3x^2 - 3$이므로

구간 $[0,\ a_n]$에서의 평균변화율과 같은 순간변화율을 갖는 점의 x좌표를 $x = a_{n+1}$이라 하면

$$\frac{{a_n}^3 - 3a_n}{a_n} = 3{a_{n+1}}^2 - 3$$

$a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} a_n \quad (\because\ a_n > 0)$이므로

$$a_n = a_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$$

ㄱ. 구간 $(-1, 1)$에서 $f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$이므로 함수 $y = f(x)$는 감소한다.

따라서 $0 < a_{n+1} < a_n < 1$를 만족하는 a_n에 대하여

$f(a_n) < f(a_{n+1})$

ㄴ. $f'(x) = 3x^2 - 3$에서 $f'(a_n) = 3{a_n}^2 - 3$

$f'(a_{n+1}) = 3{a_{n+1}}^2 - 3 = {a_n}^2 - 3$이므로

$f'(a_n) - f'(a_{n+1}) = 2{a_n}^2 > 0$

$\therefore\ f'(a_n) > f'(a_{n+1})$

ㄷ. $a_n = a_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$ 에서 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} f'(a_n) = f'(0) = -3$

그러므로 옳은 것은 ㄴ과 ㄷ이다.

18. 수열의 극한 $\boxed{\text{정답}}$ ②

$\overline{OB_1} = \overline{A_1B_1} = 6$이므로

$$S_1 = 6^2 - \frac{1}{4}\cdot \pi \cdot 6^2 = 6^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$\overline{B_1B_2} = \overline{A_2B_2} = \dfrac{6}{2}$이므로

$$S_2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\cdot \pi \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$\overline{B_2B_3} = \overline{A_3B_3} = \dfrac{6}{4}$이므로

$$S_3 = \left(\frac{6}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\cdot \pi \cdot \left(\frac{6}{4}\right)^2 = \left(\frac{6}{4}\right)^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$\vdots$

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $6^2\left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right)$이고, 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{6^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = 12(4 - \pi)$$

19. 답 ①

회사에서 생산된 핸드볼 공의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(350,\ 16^2)$을 따른다.

크기 64인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $E(\overline{X}) = 350$

$V(\overline{X}) = \dfrac{16^2}{64} = 2^2$이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(350,\ 2^2)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X} \le 346$ 또는 $\overline{X} \ge 355)$

$= \mathrm{P}(\overline{X} \le 346) + \mathrm{P}(\overline{X} \ge 355)$

$= \mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{346 - 350}{2}\right) + \mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{355 - 350}{2}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \le -2) + \mathrm{P}(Z \ge 2.5)$

$= \mathrm{P}(Z \ge 2) + \mathrm{P}(Z \ge 2.5)$

$= (0.5 - 0.4772) + (0.5 - 0.4938)$

$= 0.0228 + 0.0062$

$= 0.0290.$

20. [출제의도] 상용로그를 이용하여 거듭제곱의 자리수의 관계를 알아낼 수 있는지를 묻는 문제이다.

$[\log 2N] = [\log N] + 1$에서 $\log 2N$의 지표가 $\log N$의 지표보다 1만큼 크므로 $2N$의 자리수가 N의 자리수보다 1 만큼 크다.

즉, $5 \times 10^2 \leqq N < 10^3 \quad \therefore\ 2 + \log 5 \leqq \log N < 3$

ㄱ. $5.3980 \leqq \log N^2 < 6$에서 $\log N^2$의 지표는 항상 5 이다. $\therefore$ N^2은 항상 6 자리의 수이다.

ㄴ. $8.0970 \leqq \log N^3 < 9$에서 $\log N^3$의 지표는 항상 8 이다. $\therefore$ N^3은 항상 9 자리의 수이다.

ㄷ. $10.7960 \leqq \log N^4 < 12$에서 $\log N^4$의 지표는 10 또는 11 이다.

$\therefore$ N^4은 11 자리 또는 12 자리의 수이다.

따라서, 옳은 것은 ㄱ과 ㄴ이다.

21. 정답 ①

포물선 C_1의 방정식을 $y = ax^2 + b$로 놓으면 곡선 $y = ax^2 + b$가 점 $(1,\ \sqrt{3})$을 지나고 이 점에서 접선의 기울기가 $\sqrt{3}$이므로

$\sqrt{3} = a + b$이고 $\sqrt{3} = 2a$이다.

따라서 $a = b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\quad S = 12\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\,x\right)dx = 2\sqrt{3}$$

22.

정답 256

주어진 수열은 조건 (나)에 의하여 공비가 -2인 등비수열이므로

$a_1 = a_2 + 3 = -2a_1 + 3 \quad \therefore\ a_1 = 1$

$\therefore\ a_9 = (-2)^8 = 256$

23. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 5^n + 2^n}{5^n - 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n} = 3$$

24. [출제의도] 평균변화율의 값을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\dfrac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n} = n+1$에서 $f(n+1) - f(n) = n+1$

따라서 함수 $y = f(x)$의 구간 $[1,100]$에서의 평균변화율은

$$\frac{f(100) - f(1)}{100 - 1}$$

$$= \frac{\{f(100) - f(99)\} + \{f(99) - f(98)\} + \cdots + \{f(2) - f(1)\}}{99}$$

$$= \frac{100 + 99 + \cdots + 2}{99} = \frac{5049}{99} = 51$$

25. 정답 98

모니터의 수명을 X라 하면

$n = 100$, 표본표준편차 $s = 500$

신뢰도 95%로 추정하면 $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$이므로

$k = 1.96$

신뢰구간은 구하면

$$\left[\overline{x} - k\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + k\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[\overline{x} - 1.96\frac{500}{\sqrt{100}},\ \overline{x} + 1.96\frac{500}{\sqrt{100}}\right]$$

$$= [\overline{x} - 98,\ \overline{x} + 98]$$

$\therefore\ c = 1.96 \times 50 = 98$

26. 정답 76

$\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}(x \leqq k) - \mathrm{P}(x \leqq k-1)$

$= ak^2 - a(k-1)^2 = a(2k-1)$

$$1 = \sum_{k=1}^{5} \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{5} a(2k-1) = a \times 25$$

$$\therefore\ a = \frac{1}{25}$$

$$E(X) = \frac{1}{25}\sum_{k=1}^{5}\{k\cdot(2k-1)\}$$

$$= \frac{1}{25}\sum_{k=1}^{5}(2k^2 - k) = \frac{19}{5}$$

$$\therefore\ 20E(X) = 20 \times \frac{19}{5} = 76$$

27. 정답 27

해설

$\log t = 3 + \alpha \ (0 \le \alpha < 1)$

$\log t^2 = 2\log t = 6 + 2\alpha$

$\log \dfrac{1}{t} = -3 - \alpha$

i) $\alpha = 0$ 일 때, $\log t = 3,\ t = 10^3$

ii) $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ 일 때,

$3 + \alpha = \dfrac{1}{4}\cdot 6 - \dfrac{1}{2}\cdot(-4) = \dfrac{7}{2} \quad \therefore\ \alpha = \dfrac{1}{2}$

(조건에 맞지 않음)

iii) $\dfrac{1}{2} \le \alpha < 1$ 일 때,

$3 + \alpha = \dfrac{1}{4}\cdot 7 - \dfrac{1}{2}\cdot(-4) = \dfrac{15}{4} \quad \therefore\ \alpha = \dfrac{3}{4}$

$\log t = 3 + \dfrac{3}{4},\quad t = 10^{\frac{15}{4}}$

$A = 10^3 \times 10^{\frac{15}{4}} = 10^{\frac{27}{4}}$

$\therefore\ 4\log A = 27$

28. 정답 130

[출제의도] 분배의 개념과 원순열의 개념을 이해하고 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

6 명을 2 개조로 나누는 방법은 구성원이 2 명이상 이므로 2 명과 4 명, 3 명과 3 명으로 나누는 2 가지가 있다.

I) 2 명과 4 명의 경우

$_6C_2\times(2-1)!\times(4-1)!=90$ 가지

ii) 3 명과 3 명의 경우

$_6C_3\times\frac{1}{2!}\times(3-1)!\times(3-1)!=40$ 가지

따라서 $90+40=130$ 가지이다.

29.정답 18

$f^{-1}(x)=g(x)$이므로 $g^{-1}(x)=f(x)$

$(g\circ g\circ g\circ g\circ g)(x)=-3$에서

$x=(g^{-1}\circ g^{-1}\circ g^{-1}\circ g^{-1}\circ g^{-1})(-3)$

$=(f\circ f\circ f\circ f\circ f)(-3)$

$=(f\circ f\circ f\circ f)(18)$

$=(f\circ f\circ f)(-3)=(f\circ f)(18)$

$=f(-3)=18$

30. 정답 120

[출제의도] 여러 가지 수열에 관한 문제해결하기

a_n부터 a_{n+5}까지의 항의 값을 3으로 나눈 나머지를 나열하면 1, 1, 2, 2, 0, 0이므로 S_n부터 S_{n+5}까지의 항의 값을 3으로 나눈 나머지를 나열하면

1, 2, 1, 0, 0, 0이다. (단, $n=6k-5$, k는 자연수)

따라서 $40\times3=120$