19회수학 나형 정답

1	②	2	⑤	3	⑤	4	①	5	⑤
6	④	7	④	8	③	9	②	10	③
11	①	12	③	13	②	14	⑤	15	④
16	⑤	17	②	18	①	19	④	20	②
21	④	22	36	23	10	24	17	25	99
26	112	27	70	28	16	29	50	30	118

해 설

1. 답 ②

$5^{\frac{2}{3}} \times 25^{-\frac{5}{6}} = 5^{\frac{2}{3}} \times (5^2)^{-\frac{5}{6}} = 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{5}{3}}$

$= 5^{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

2. 정답 ⑤

$f(10) = \frac{10+1}{10-1} = \frac{11}{9}$이므로

$(f \circ f)(10) = f(f(10)) = f\left(\frac{11}{9}\right)$

$= \frac{\frac{11}{9}+1}{\frac{11}{9}-1} = \frac{\frac{20}{9}}{\frac{2}{9}} = 10$

3. [출제의도] 무한수열의 극한 이해하기

$\lim_{n\to\infty} \frac{2\times 6^{n+1}+3}{6^n} = \lim_{n\to\infty}\left(2\times 6+\frac{3}{6^n}\right) = 12$

4. 정답 ①

x^4 의 계수는 $_7C_4 a^3 = 280,\ a^3 = 8 \quad \therefore\ a = 2$

따라서 x^5 의 계수는 $_7C_5 a^2 = 21 \times 2^2 = 84$

5. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3 = a+2d = 6$ ⋯⋯ ㉠

$a_4 + a_6 = a+3d+a+5d = 2a+8d = 20$ ⋯⋯ ㉡

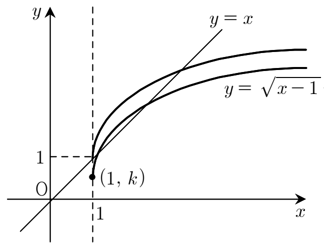
㉠, ㉡에서

$a = 2,\ d = 2$

따라서 $a_7 = 2+6\times 2 = 14$

6. 답. ④

무리함수 $y = f(x)$와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 아래 그림과 같이 $f(x) = \sqrt{x-1}+k$의 그래프는 직선 $y = x$와 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



위 그림에서 $y = \sqrt{x-1}+k$의 그래프가 직선 $y = x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 최댓값은 1이다.

7.[출제의도] 함수의 우극한과 좌극한 이해하기

함수 $y = f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to -1-0} f(x) = -2$이므로 $a = -2$

$x+3 = t$라 하면 $x \to -2+0$일 때, $t \to 1+0$이므로

$\lim_{x\to -2+0} f(x+3) = \lim_{t\to 1+0} f(t) = 1$

8. 정답 ③

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\,g(x) = 0$이므로

집합 $\{x \mid f(x) = 0$ 또는 $g(x) = 0\}$은 실수 전체의

집합이다.

즉, $A \cup B = R$

9. 정답 ②

다항식 $(x+a)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는

$_5\mathrm{C}_3 a^2 = 10a^2 = 160$

$a^2 = 16$

$\therefore\ a = 4\ (\because\ a > 0)$

10. 정답 ③

$-10 = a\log(5\times 1+1)+10$ 에서

$-20 = a\log 6$

⋯⋯ ㉠

$-30 = a\log(5k+1)+10$ 에서

$-40 = a\log(5k+1)$

⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$2\log 6 = \log(5k+1)$

$5k+1 = 36$

$\therefore\ k = 7$

11. 정답 ①

ⅰ) 흰공을 꺼낸 경우 $\frac{2}{4}\times {}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ⅱ) 검은 공을 꺼낸 경우 $\frac{2}{4}\times {}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$

ⅰ), ⅱ)에서 $\frac{1}{16}+\frac{1}{8} = \frac{3}{16}$

12. 정답 ③

[출제의도] 조합의 수 성질을 이용하여 문제해결하기

어두운 부분의 합은

$\sum_{n=2}^{10}\left({}_nC_{n-2}+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n\right)$

$= \sum_{n=2}^{10}\left({}_nC_2+{}_nC_1+1\right)$

$= \sum_{n=2}^{10}\left\{\frac{n(n-1)}{2}+n+1\right\}$

$= \sum_{n=2}^{10}\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1\right)$

$= 228$

(별해) ${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8 = {}_{11}C_8$

${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_{10}C_9 = {}_{11}C_9$이므로

${}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_{10}C_9 = {}_{11}C_9-{}_1C_0$

$1+{}_1C_1+{}_2C_2+{}_3C_3+\cdots+{}_{10}C_0 = {}_{11}C_{10}$이므로

${}_2C_2+{}_3C_3+\cdots+{}_{10}C_0 = {}_{11}C_{10}-1-{}_1C_1$

따라서 어두운 부분의 합은 228

13. 답. ②

$g(x)$가 항등함수이므로 $g(3) = 3$이고

$f(2) = h(6) = 3$이다.

한편, $f(x)$가 일대일 대응이고 $f(2) = 3$이므로

$f(2)f(3) = f(6)$이 성립하려면 $f(3) = 2$이어야 한다. 또한 $h(x)$가 상수함수이므로 $h(2) = 3$이다.

따라서 $f(3)+h(2) = 2+3 = 5$

14. 답. ⑤

A, B^C이 서로소 $\Leftrightarrow A\cap B^C = \varnothing \Leftrightarrow A \subset B$

ㄱ. $A - B = \varnothing$ (참)

ㄴ. $A\cap B = A$이므로 $(A\cap B)^C = A^C$ (참)

ㄷ. $(A^C \cup B)\cap A = (A^C\cap A)\cup(B\cap A)$
$= \varnothing \cup A = A$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

15. 답 ④

ㄱ. $n = 100,\ \hat{p} = \frac{1}{5}$일 때, 비율 p를 신뢰도 95%로

추정하면 신뢰구간은

$\frac{1}{5} - 1.96\sqrt{\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}} \le p$

$\le \frac{1}{5}+1.96\sqrt{\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}$

$\therefore\ 0.1216 \le p \le 0.2784$ (참)

ㄴ. 표본의 크기가 n이고

$\mathrm{P}\left(\hat{\mathrm{p}}-\mathrm{k}\sqrt{\frac{\hat{\mathrm{p}}\,\hat{\mathrm{q}}}{\mathrm{n}}} \le \mathrm{p} \le \hat{\mathrm{p}}+\mathrm{k}\sqrt{\frac{\hat{\mathrm{p}}\,\hat{\mathrm{q}}}{\mathrm{n}}}\right)$인 경우에

신뢰도 $(a\times 100)\%$에 대한 최대 허용 표본오차는

$k\sqrt{\frac{1}{4n}}$ 이므로

신뢰도 95%일 때,

$n = 400$인 경우 최대 허용 표본오차 l은

$l = 1.96\sqrt{\frac{1}{1600}} = 1.96\times\frac{1}{40}$

$n = 100$인 경우 최대 허용 표본오차 l'는

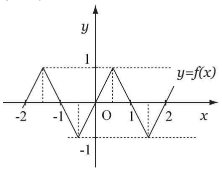
$l' = 1.96\sqrt{\frac{1}{400}} = 1.96\times\frac{1}{20}$

따라서 l은 l'의 $\frac{1}{2}$이다. (거짓)

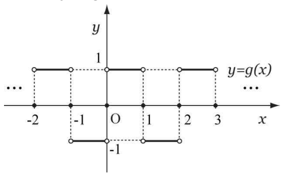
ㄷ. $n=50$인 표본을 100번 임의추출하여 비율 p의 신뢰도 95%의 신뢰구간 100개를 구해보면
이 중 약 95개는 비율 p를 포함한다.
이는 신뢰구간의 의미를 설명하는 옳은 내용이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

16. 정답 ⑤

$y=f(x)$의 그래프는



함수 $y=g(x)$는
1) x가 정수이면 $f(x)=0$이므로 $g(x)=0$
2) $2k-1<x<2k$ (k는 정수)이면
$0 \leqq 1+f(x)<1$이므로 $g(x)=-1$
3) $2k<x<2k+1$ (k는 정수)이면
$1<1+f(x) \leqq 2$이므로 $g(x)=1$
따라서 $y=g(x)$의 그래프는



$g(10\sqrt{2})-g(\sqrt{3})=1-(-1)=2$

17. 정답 ②

'방정식 $x+y+z=2n+1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 서로 다른 세 문자 x, y, z 중에서 중복을 허락하여 $2n+1$ 개를 택하는 조합의 수와 같다.

$a_n={}_{3+(2n+1)-1}C_{2n+1}$

$$={}_{2n+3}C_2=\frac{(2n+3)(2n+2)}{2}=2n^2+5n+3$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{2n^2+5n+3}{n^2}=2$$

18.정답 ①

[출제의도] 도형의 넓이를 무한등비급수의 합으로 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

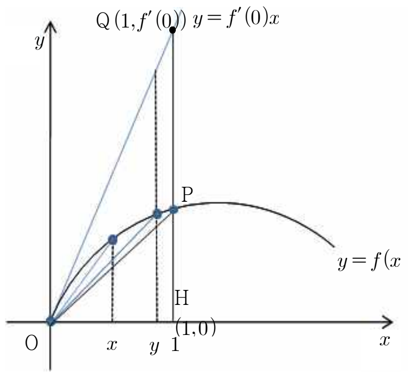
정육각형 H_n 의 한 변의 길이를 a_n 이라 하면

$${a_{n+1}}^2=\frac{{a_n}^2}{2}+\frac{{a_n}^2}{2}-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a_n\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a_n\right)\cos 30^\circ$$

$${a_{n+1}}^2=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right){a_n}^2 \qquad \therefore$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{2\sqrt{3}}{3}S_1$$

19. 정답 ④



(나)에서 $0<xf(y)<yf(x)$의 각 변을 xy로 나누면
$0<\dfrac{f(y)}{y}<\dfrac{f(x)}{x}$이다.
(가)에서 $f(0)=0$이므로, (가), (나)로부터
함수 f는 위 그림과 같이 개구간 $(0,\ 1)$에서 위로 볼록한 함수임을 알 수 있다.
위 그래프를 이용하여 A, B, C를 표현하면

$$\mathrm{A}=f'(0)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot f'(0)\right)$$
$=2(\triangle\mathrm{OHQ}$의넓이$)$

$$\mathrm{B}=f(1)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot f(1)\right)$$
$=2(\triangle\mathrm{OHP}$의넓이$)$

$\mathrm{C}=2\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=2\cdot$(곡선OP, x축, 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이) 와 같다.
따라서 $\mathrm{B}<\mathrm{C}<\mathrm{A}$이다.

20. 정답 ②

$f(x)=x^3-3x+a$에 대하여

$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$이므로 $F'(x)=f(x)$, $F(0)=0$

이때, $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$에서

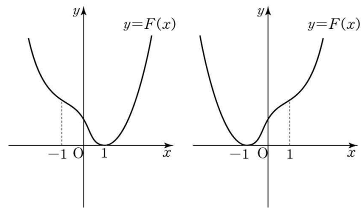
$F'(x)=f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$일 때 극값을 가진

다.

한편, 함수 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면

$y=F(x)$의 그래프의 개형이 다음 두 그래프 중 하나와

같아야 한다.



따라서 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면

$f(-1)\leq 0$ 또는 $f(1)\geq 0$이어야 하므로

$f(-1)\leq 0$에서 $a\leq -2$, $f(1)\geq 0$에서 $a\geq 2$

따라서 양수 a의 최솟값은 2이다.

[다른 풀이]

$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$이므로 $F'(x)=f(x)$, $F(0)=0$

$F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지므로 $F'(x)$,

즉 $f(x)$의 부호가 오직 한 번 변해야 한다.

따라서 삼차함수 $f(x)$가 x축과 오직 한 번 만나거나

x축과 접해야 한다.

$f(x)=x^3-3x+a$에서

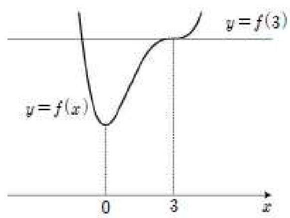
$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$이므로

부등식 $f(1)\times f(-1)\geq 0$이 성립해야 한다.

$(-2+a)(2+a)\geq 0$ $\therefore$ $a\leq -2$ 또는 $a\geq 2$

따라서 양수 a의 최솟값은 2이다.

21. 정답 ④



최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $|f(x)-f(3)|$은 한 점에서만 미분가능하지 않고
$x=0$에서 극솟값을 가지므로 $f'(x)=4x(x-3)^2$
이것의 부정적분을 구하면

$f(x)=x^4-8x^3+18x^2+C$ (단, C는 적분상수)
조건 (나)에서 $f(0)=5$이므로 $C=5$ ∴
$f(1)=16$

22. 정답 36

[출제의도] 정적분의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$(\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}k\right)^4$$
$$=\int_1^2 x^4\,dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2=\frac{31}{5}$$

∴ 36

23. 정답 10

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=16$에서 $a+d=16$ …… ㉠

$a_5=10$에서 $a+4d=10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=18,\ d=-2$

∴ $a_n=18+(n-1)\times(-2)=-2n+20$

따라서 $a_k=0$을 만족시키는 k는 $k=10$

24.정답 17

$\int_2^x f(t)dt=x^2+ax+2$에 $x=2$를 대입하면
$0=4+2a+2$이므로 $a=-3$
$\int_2^x f(t)dt=x^2-3x+2$에서 양변을 x에 관하여 미분하면 $f(x)=2x-3$이므로
$f(10)=20-3=17$

25. [출제의도] 조건에 맞는 집합 추측하기

[해설] 조건에 맞는 집합의 순서쌍을 구하면
$(\{1\},\ \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 100\})$
$(\{1,\ 2\},\ \{3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 100\})$
⋮
$(\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 99\},\ \{100\})$
따라서 99 개

26. 정답 112

전체적인 색칠의 경우는 ${}_9\mathrm{C}_3=84$(가지)

$$P(X=1)=\frac{6}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{6}{84}=\frac{3}{42}$$
$$P(X=2)=\frac{16}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{16}{84}=\frac{8}{42}$$
$$P(X=3)=\frac{84-6-16}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{62}{84}=\frac{31}{42}$$
$$E(X)=\frac{3\times1+8\times2+31\times3}{42}=\frac{112}{42}$$
∴ $E(42X)=42E(X)=112$

27. [출제의도] 지표와 가수의 성질을 활용하여 문제해결하기

$\{f(x)\}^2+3g(x)=3$에서

$g(x)=\dfrac{3-\{f(x)\}^2}{3}$이고 $0\le g(x)<1$이므로

$0\le\dfrac{3-\{f(x)\}^2}{3}<1$

$0<\{f(x)\}^2\le3$

∴ $f(x)=1$ 또는 $f(x)=-1$

ⅰ) $f(x)=1$일 때

$g(x)=\dfrac{2}{3}$이므로 $\log x=\dfrac{5}{3}$ ∴ $x=10^{\frac{5}{3}}$

ⅱ) $f(x)=-1$일 때

$g(x)=\dfrac{2}{3}$이므로 $\log x=-\dfrac{1}{3}$ ∴ $x=10^{-\frac{1}{3}}$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $x=10^{\frac{5}{3}}$ 또는 $x=10^{-\frac{1}{3}}$

모든 x의 값의 곱은 $10^{\frac{4}{3}}$

따라서 $p=3,\ q=4$이고 $10(p+q)=70$

28. 답 16

$f(x)=x^3$의 그래프를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동시키면

$g(x)=(x-a)^3+b$의 그래프가 된다.

$g(0)=-a^3+b=0$이므로 $b=a^3$ …… ㉠

한편, 그래프의 평행이동에 의해

$\int_a^b g(x)dx=\int_{a-c}^{b-c}g(x+c)dx$가 성립함을 이용하면

$$\int_a^{3a}g(x)dx=\int_a^{3a}\{(x-a)^3+b\}dx$$
$$=\int_0^{2a}(x^3+b)dx$$
$$\therefore\ \int_0^{2a}(x^3+b)dx-\int_0^{2a}x^3dx=\int_0^{2a}bdx$$
$$=2ab=32\ \cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서 $2ab=2a^4=32$이므로 $a^4=16$

29.정답 50

재직연수가 10년 미만일 사건을 A, 조직 개편안에 찬성할 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{120}{360}=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(B)=\frac{150}{360}=\frac{5}{12}$$
$$\therefore\ \mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{12}=\frac{5}{36}$$

이 때, 두 사건 $A,\ B$는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)$

$\dfrac{a}{360}=\dfrac{5}{36}$ ∴ $a=50$

30. 정답 118

[출제의도] 함수의 연속성과 미분가능성 이해하기

함수 $g(x)$는 $x=a,\ b$에서 연속이고
$f(a)=m-f(a),\ m-f(b)=n+f(b)$ ⋯ ㉠
$$g'(x)=\begin{cases}f'(x) & (x<a)\\ -f'(x) & (a\leqq x<b)\\ f'(x) & (x\geqq b)\end{cases}$$
함수 $g(x)$는 $x=a,\ b$미분 가능하므로
$f'(a)=-f'(a)$에서 $f'(a)+f'(a)=0$
그러므로 $f'(a)=0$
$f'(b)=-f'(b)$에서 $f'(b)+f'(b)=0$
그러므로 $f'(b)=0$이다.
따라서 $f'(x)=0$인 $x=a,\ b$이다.
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$
따라서 극대값은 $f(-3)=27$, 극소값은 $f(1)=-5$이므로 $a=-3,\ b=1$
㉠에서 $m=2f(-3)=54$,
$n=m-2f(1)=54+10=64$이므로
$m=54,\ n=64$
∴ $m+n=118$