18회수학 나형 정답

1	②	*2*	②	*3*	③	*4*	①	*5*	④
6	④	*7*	⑤	*8*	①	*9*	④	*10*	③
11	④	*12*	①	*13*	②	*14*	③	*15*	②
16	③	*17*	②	*18*	④	*19*	⑤	*20*	②
21	④	*22*	12	*23*	22	*24*	16	*25*	28
26	40	*27*	225	*28*	30	*29*	27	*30*	147

해 설

1. 정답 ②

[출제의도] 확률변수와 확률분포의 뜻알기

(준식)$=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$

$=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$

2. 답 ② 준식

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}=2\cdot4=8$

3. [정답] ③

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times6^{n+1}-5^n}{6^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\times6-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1+\left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

$=6a=4$

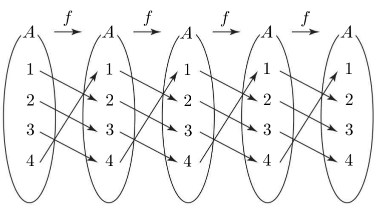
$\therefore\ a=\dfrac{2}{3}$

4. 답 ①

$(ab)^2=a^2b^2=(\sqrt{2})^2\left(3^{\frac{1}{6}}\right)^2=2\times3^{\frac{1}{3}}$

5.[출제의도] 합성함수의 값 추론하기

주어진 함수의 정의에 따라 대응관계를 나타내면 그림과 같다.



$f^4(x)=x$이므로

$f^{2012}(2)=f^{4\times503}(2)=2$

$f^{2013}(3)=f^{4\times503+1}(3)=f^1(3)=4$

따라서 $f^{2012}(2)+f^{2013}(3)=2+4=6$

6. 답 ④

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=2\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^C)$

$\mathrm{P}(\mathrm{A})\times\mathrm{P}(\mathrm{B})=2\mathrm{P}(\mathrm{A})\times\mathrm{P}(\mathrm{B}^C)$ $(\because A,B$는 독립)

$\mathrm{P}(\mathrm{B})=2\mathrm{P}(\mathrm{B}^C)$ $(\because\ \mathrm{P}(\mathrm{A})\neq0)$

$\mathrm{P}(\mathrm{B})=2(1-\mathrm{P}(\mathrm{B}))$

$3\mathrm{P}(\mathrm{B})=2,\ \mathrm{P}(\mathrm{B})=\dfrac{2}{3}$ …… ㉠

또 $\mathrm{P}(\mathrm{A}^C\cap\mathrm{B})=\dfrac{1}{12},\ \mathrm{P}(\mathrm{A}^C)\times\mathrm{P}(\mathrm{B})=\dfrac{1}{12}$

㉠에서 $\mathrm{P}(\mathrm{A}^C)\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{12}$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}^C)=\dfrac{1}{8}$

$\therefore\ P(A)=1-\mathrm{P}(\mathrm{A}^C)=1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$

7.정답 ⑤

ㄴ. $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)$

$=P(B)\cdot P(A|B)$

8.정답 ①

철수가 받은 전자우편이 '여행'을 포함할 사건을 A,

철수가 받은 전자우편이 광고인 사건을 B라 하자.

$\mathrm{P}(\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{A}^c\cap\mathrm{B})$

$=\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{9}{10}\times\dfrac{1}{5}$

$=\dfrac{1}{20}+\dfrac{9}{50}=\dfrac{23}{100}$

$\therefore\ \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}=\dfrac{\frac{1}{20}}{\frac{23}{100}}=\dfrac{5}{23}$

9. 정답 ④

A가 2개의 동전을 던져서 앞면이 한 개 나오고, B가 동전을 한 번 던져서 앞면이 한 번 나올 확률은

$\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

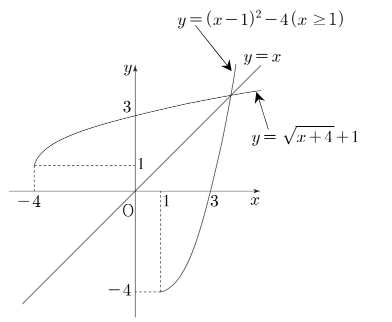
A가 2개의 동전을 던져서 앞면이 두 개 나오고, B가 동전을 두 번 던져서 앞면이 한 번 나올 확률은

$\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=\dfrac{1}{3}$

10. [출제의도] 무리함수의 그래프의 성질 이해하기



그림에서 $a=4,\ b=1$이므로 $f(x)=\sqrt{x+4}+1$이고 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)=(x-1)^2-4(x\geq1)$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$(x-1)^2-4=x,\ x^2-3x-3=0$

$\therefore\ x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\ (\because\ x\geq1)$

$\therefore\ (p,q)=\left(\dfrac{3+\sqrt{21}}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\right)$

따라서 $p+q=3+\sqrt{21}$

11. 답 ④

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)=1$이므로

확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	2	계
$\mathrm{P}(X)$	a	b	1

$E(X)=2b$이고 $E(X^2)=2^2b=4b$ 이므로

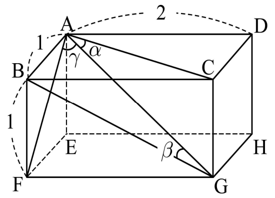
$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=4b-4b^2$

따라서 $\{E(X)\}^2=2V(X)$ 에서

$4b^2=2\times(4b-4b^2),\ b=2-2b$

$\therefore\ P(X=2)=b=\dfrac{2}{3}$

12.답 ①



주어진 조건에서 $a\neq1,\ b\neq1$ 이다.

자연수 n에 대하여 $a^n<b^n$이므로 $a<b$

$0<a<b<1$ 또는 $1<a<b$일 때,

i) $m>n$이면 $a^m>a^n,\ b^m>b^n$이고,

ii) $m<n$이면 $a^m<a^n,\ b^m<b^n$이다.

그런데, i), ii)는 모두 주어진 조건에 모순이다.

$\therefore\ 0<a<1<b$

주어진 조건에서 $b^n<b^m$이므로 $n<m$이

어야 하고,

이 때 $a^m < a^n$이 성립한다.

$\therefore\ n < m$

이상에서 $0 < a < 1 < b,\ m > n$이다.

13. 답 ②

$b_n = n,\ c_n = n+1$이라 하면

$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{n(n+1)}{2}$,

$\sum_{k=1}^{n} c_k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n^2+3n+1}{2}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} b_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} c_k} = 2$$

그런데 $\sum_{k=1}^{n} b_k < \sum_{k=1}^{n} a_k < \sum_{k=1}^{n} c_k$이므로

$$\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} b_k} > \frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k} > \frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} c_k}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k} = 2$$

14.[출제의도] 명제의 역, 이, 대우를 이해하여 추론하기

$p \Rightarrow q$이므로 $P \subset Q$ ...... ㉠

$\sim p \Rightarrow q$이므로 $P^C \subset Q$ ...... ㉡

$\sim r \Rightarrow p$이므로 $R^C \subset P$ ...... ㉢

㉠, ㉡에서 $P \cup P^C \subset Q$이므로 $U = Q$ ...... ㉣

㉠, ㉢에서 $R^C \subset P \subset Q$

ㄱ. ㉡에서 $P^C \subset Q$이다. (참)

ㄴ. (반례) $P = \{1, 2\}$, $R = \{2, 3\}$,
$Q = \{1, 2, 3\}$일 때,
$R - P^C = R \cap P = \{2\} \neq \varnothing$ (거짓)

ㄷ. ㉣에서 $R^C \cup P^C \subset Q$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

15.정답 ②

$$P(X \geq x) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \geq \frac{x-m}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{x-m}{\sigma}\right)$$

$$P(Y \geq y) = P\left(\frac{Y-am}{\sqrt{b}\,\sigma} \geq \frac{y-am}{\sqrt{b}\,\sigma}\right) \text{ 이므로}$$

$$= P\left(Z \geq \frac{y-am}{\sqrt{b}\,\sigma}\right)$$

(가)에서 $-\frac{m}{\sigma} = -\frac{am}{\sqrt{b}\,\sigma}$ $\quad \therefore\ a = \sqrt{b}$ ....①

(나)에서 $1 = P(X \leq 1) + P(Y \geq 2)$

$$= P\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{1-m}{\sigma}\right) + P\left(\frac{Y-am}{\sqrt{b}\,\sigma} \geq \frac{2-am}{\sqrt{b}\,\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{1-m}{\sigma}\right) + P\left(Z \geq \frac{2-am}{\sqrt{b}\,\sigma}\right)$$

이므로 $\frac{1-m}{\sigma} = \frac{2-am}{\sqrt{b}\,\sigma}$ ....②

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 2,\ b = 4$ 이다

16. [출제의도] 함수의 뜻을 알고 추론하기

$n = a_m \times 10^m + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$일 때,

$f(a_m \times 10^m + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0)$

$= f(a_m \times 10^{m-1} + \cdots + a_2 \times 10 + a_1) + a_0$

$= f(a_m \times 10^{m-2} + \cdots + a_2) + a_1 + a_0$

$\vdots$

$= a_m + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$

$\therefore\ f(n) = a_m + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$

ㄱ. $f(100) = 1$ (참)

ㄴ. $(f \circ f)(999) = f(27) = 9$ (참)

ㄷ. (반례) $n = 15$일 때, $f(n) = 6$이지만 n은 6의 배수가 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

17. 정답 ②

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$의

일반항은 ${}_n\mathrm{C}_r\, x^{n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_n\mathrm{C}_r\, x^{n-2r}$이므로

$n - 2r = 2$ $(n = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$에서

$n = 3,\ 5$일 때, $n - 2r = 2$를 만족하는 정수 r의 값이 존재하지 않으므로 x^2항은 존재하지 않는다.

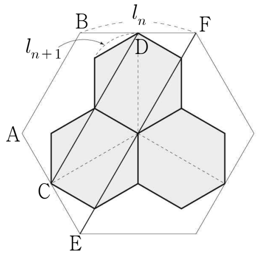
$n = 2,\ 4,\ 6$일 때, $n - 2r = 2$를 만족하는 r의 값은 각각 $0,\ 1,\ 2$이므로, x^2항의 계수는

${}_2\mathrm{C}_0 + {}_4\mathrm{C}_1 + {}_6\mathrm{C}_2 = 1 + 4 + 15 = 20$이다.

18. 정답 ④

[출제의도] 무한등비급수를 활용하여 문제해결하기

H_n의 한 정육각형의 한 변의 길이를 l_n이라 하고 H_{n+1}의 한 정육각형의 한 변의 길이를 l_{n+1}이라 하자.



$2\overline{AB} = \overline{EF}$이므로 $\frac{3}{2}\overline{AB} = \overline{CD}$이다.

$\frac{3}{2} l_n = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} l_{n+1}$이 성립하므로,

$l_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4} l_n$에서

$S_{n+1} = 3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 S_n = \frac{9}{16} S_n$

수열 $\{S_n\}$은

$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 \times 6 \times 3 = \frac{27}{32}\sqrt{3}$이고, 공비가

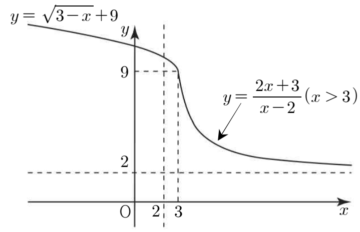
$\frac{9}{16}$인 무한등비수열이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{27}{32}\sqrt{3}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{27}{14}\sqrt{3}$

19. [출제의도] 유리함수와 무리함수의 그래프의 성질을 알고 문제해결하기

(가)에서 치역이 $\{y \mid y > 2\}$이고,

(나)에서 함수 f는 일대일함수이므로 주어진 함수의 그래프는 그림과 같다.



$f(3) = 9$이므로 $a = 9$

$f(2) = \sqrt{3-2} + 9 = 10$

$f(2)f(k) = 10f(k) = 40$

$\therefore\ f(k) = 4$

$\frac{2k+3}{k-2} = 4$

$2k + 3 = 4k - 8$

따라서 $k = \frac{11}{2}$

20. 답 ②

A, B, C, D, E, F를 모두 사용하여 만든 6자리의 문자열의 집합을 U라 하면 $n(U) = 6!$이다.

한편, U의 원소 중에서

A의 바로 다음 자리에 B가 오는 문자열의 집합을 X,

B 바로 다음 자리에 C가 오는 문자열의 집합을 Y,

C 바로 다음 자리에 A가 오는 문자열의 집합을 Z라

하면 주어진 조건을 모두 만족시키는 문자열의 집합은

$X^C \cap Y^C \cap Z^C$이다.

따라서 포함배제의 원리에 의해

$n(X^C \cap Y^C \cap Z^C)$

$= n(U) - n(X) - n(Y) - n(Z)$

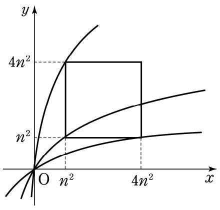
$\quad + n(X \cap Y) + n(Y \cap Z) + n(Z \cap X)$

$\quad - n(X \cap Y \cap Z)$

$= 6! - 3 \times 5! + 3 \times 4! - 0$

$= 4!(6 \times 5 - 3 \times 5 + 3) = 24 \times 18 = 432$

21. 답 ④



$y=k\sqrt{x}$가 $(4n^2,\ n^2)$을 지나면

$n^2=k\cdot\sqrt{4n^2}$에서 $k=\frac{1}{2}n$

$y=k\sqrt{x}$가 $(n^2,\ 4n^2)$을 지나면

$4n^2=k\cdot\sqrt{n^2}$에서

$\therefore\ y=k\sqrt{x}$가 주어진 정사각형과 만나려면

$\frac{1}{2}n\le k\le 4n$이어야 한다.

ㄱ. $n=5$일 때

$\frac{5}{2}\le k\le 20$이므로 $a_5=20-2=18$

ㄴ. n이 홀수일 때

$a_n=4n-\left(\frac{1}{2}(n+1)-1\right)=\frac{7}{2}n+\frac{1}{2}$

$a_{n+2}=4(n+2)-\left(\frac{1}{2}(n+3)-1\right)=\frac{7}{2}n+\frac{15}{2}$

n이 짝수일 때

$a_n=4n-\left(\frac{1}{2}n\right)+1=\frac{7}{2}n+1$

$a_{n+2}=4(n+2)-\left(\frac{1}{2}(n+2)\right)+1=\frac{7}{2}n+8$

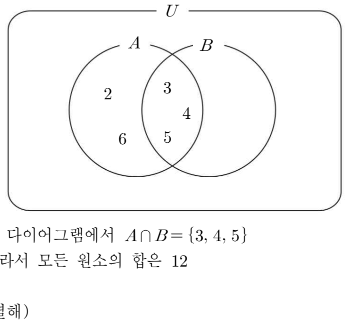
$\therefore\ a_{n+2}-a_n=7$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5}a_{2k}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{7}{2}(2k-1)+\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{7}{2}(2k)+1\right)$

$=200$

22. **[출제의도] 집합의 연산 법칙을 이해하여 계산하기**



벤 다이어그램에서 $A\cap B=\{3,4,5\}$

따라서 모든 원소의 합은 12

(별해)

$A-(A-B)=A\cap(A\cap B^C)^C$

$=A\cap(A^C\cup B)$

$=\varnothing\cup(A\cap B)$

$=A\cap B$

$\therefore\ A\cap B=\{2,3,4,5,6\}-\{2,6\}=\{3,4,5\}$

따라서 $A\cap B$의 모든 원소의 합은 12

23. 정답 22

$a,\ b,\ c$에서 중복을 허락하여 3개를 뽑아 나열하는

방법의 수는 $3^3=27$

여기서 a가 연속하여 있는 경우를 생각한다.

(ⅰ) a가 2개 연속할 때,

$aab,\ aac,\ baa,\ caa$ 즉, 4개

(ⅱ) a가 3개 연속인 경우,

aaa 즉, 1개

따라서, 수신 가능한 단어의 수는

$27-(4+1)=22$(개)

24. 답 16

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}=2$에서 무한급수의 합이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=0$

$\therefore$(주어진 식)$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{a_n}{4^n}+4-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

$=\dfrac{4}{\frac{1}{4}}=16$

25. 답 28

$\lim_{x\to2}\frac{f(x+1)-8}{x^2-4}=5$에서

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x+1)-8\}=0$이어야 하므로 $f(3)=8$

$x+1=t$로 놓으면

$\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{t^2-2t-3}=\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{t-3}\times\lim_{t\to3}\frac{1}{t+1}$

$=\frac{1}{4}f'(3)=5$

$\therefore\ f'(3)=20$

$\therefore\ f(3)+f'(3)=28$

26. 답 40

a가 대응된 꼭지점의 바로 위쪽에 있는 꼭지점을

b라 하면 (단, $a\neq1$)

$b=\begin{cases}\frac{a}{2} & (a\text{가 짝수})\\ \frac{a-1}{2} & (a\text{가 홀수})\end{cases}$ 가 성립한다.

$33\Rightarrow16\Rightarrow8\Rightarrow4\Rightarrow2\Rightarrow1$

$79\Rightarrow39\Rightarrow19\Rightarrow9\Rightarrow4\Rightarrow2\Rightarrow1$

따라서, $10k=10\times M(33,\ 79)=40$이다.

27. 답 225

모비율 p에 대한 신뢰구간

$\left[\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{300}},\ \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{300}}\right]$

이 때, 주어진 신뢰구간이 $[0.701,\ 0.799]$ 이므로

신뢰구간의 양끝 값을 더하면

$2\hat{p}=0.701+0.799$

$\therefore\ \hat{p}=0.75$

300명의 학생 중에서 오전 8시 이전에 등교한 학생수

를 X라 하면 $\hat{p}=\frac{X}{300}$이므로 $\frac{X}{300}=0.75$

$\therefore\ X=225$

28. 정답 30

네 학생 $A,\ B,\ C,\ D$의 수학책을 각각 $a,\ b,\ c,\ d$라 하면 D가 먼저 A의 교과서 a를 선택하였으므로 $A,\ B,\ C$가 남은 교과서 $b,\ c,\ d$를 선택하는 모든 경우의 수는 ${}_3P_3=3!$

이 때 아무도 자신의 교과서를 선택하지 못할 경우의 수는

(A,B,C) : $(b,c,d),\ (c,d,b),\ (d,c,b)$

로 모두 3 가지이므로 $\frac{q}{p}=\frac{3}{3!}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 10(p+q)=10(2+1)=30$

29. **[출제의도] 정적분의 성질을 활용하여 문제해결하기**

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (단, a,b,c는 상수)

라 하면

조건 (가)에 의하여 $c=0$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서

조건 (나)에 의하여 $a=-6$

$f'(x)=3x^2-12x+b=3(x-2)^2+b-12$

조건 (다)에 의하여 $b\ge9$이고

$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3(x^3-6x^2+bx)\,dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^3$

$=-\frac{135}{4}+\frac{9b}{2}\ge\frac{27}{4}$ ($\because\ b\ge9$)

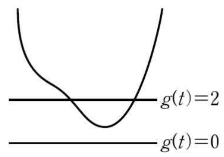
$b=9$일 때, 최솟값 $m=\frac{27}{4}$

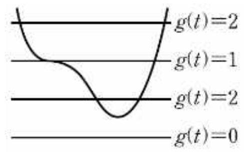
따라서 $4m=27$

30. 정답] 147

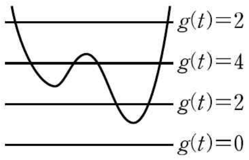
[해설]

만약 $y=f(x)$의 그래프가 극점을 하나만 가진다면, $g(t)$가 불연속인 점은 하나이거나 셋이다.





따라서 $y=f(x)$의 그래프는 두 개의 극솟점과 하나의 극댓점을 가진다. 또한 $y=f(x)$의 그래프가 두 개의 극솟값을 가지면, $g(t)$가 불연속인 점은 3개다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프의 두 개의 극솟점의 극솟값은 같다.

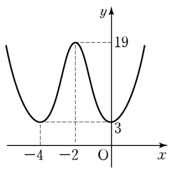
$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+k$이고, 극솟값이 3이어야 하므로 $k=3$, $f(x)=3$의 한 근이 0 이므로 $f(x)=x^2(x-\alpha)^2+3$

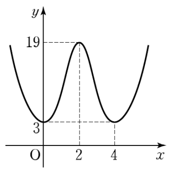
$f'(x)=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha)=2x(x-\alpha)(2x-\alpha)=0$ 에서

(극댓값)$=f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\alpha^4}{16}+3=19$

$\therefore \alpha=\pm 4$

그런데, $\alpha=-4$이면 $f'(3)>0$이므로 $\alpha=4$





$f(x)=x^2(x-4)^2+3$, $f(-2)=4\times 36+3=147$