20회수학 나형 정답

1	④	2	②	3	②	4	③	5	②
6	①	7	③	8	⑤	9	⑤	10	①
11	⑤	12	①	13	④	14	①	15	③
16	⑤	17	②	18	①	19	④	20	④
21	②	22	11	23	2	24	12	25	10
26	30	27	432	28	35	29	24	30	208

해 설

1. [정답] ④

[풀이]
[출제의도] 집합의 원소의 합 계산하기
$U=\{1,2,3,\cdots,8\}$, $A=\{2,4,6,8\}$이므로
$A^C=\{1,3,5,7\}$이다. 따라서 A^C의 모든 원소의 합은 $1+3+5+7=16$이다.

2. 정답 ②

[출제의도] 함수의 극한값 계산하기
$-x=t$ 로 치환하면

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t-\sqrt{t^2-1}}{-t+1}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t+\sqrt{t^2-1}}{t-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}{1-\frac{1}{t}}=2$$

3. 정답 ②

$$\int_{-a}^{a}(2x+3)dx=\int_{-a}^{a}2x\,dx+\int_{-a}^{a}3\,dx$$
$$=3a-(-3a)=6a=6$$

$\therefore\ a=1$

4. [정답] ③

[풀이]
[출제의도] 무리함수의 그래프 이해하기
함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 y축의 방향으로 9만큼 평행이동시킨 그래프가 함수 $y=\sqrt{x+2}+9$의 그래프와 일치하므로 $a=-2,\ b=9$이다. $a+b=-2+9=7$

5.정답 ②

맨 앞자리에는 1 이 오고, 맨 뒤에는 3 이 오지 않도록 하려면 1□□□□□1 , 1□□□□□2 이고 빈칸에 나머지 수가 들어가면 된다.
(ⅰ) 1□□□□□1 : 빈칸에 $2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3$ 이 오는 경우의 수이므로 $\dfrac{5!}{2!\times3!}=10$ 가지
(ⅱ) 1□□□□□2 : 빈칸에 $1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3$ 이 오는 경우의 수이므로 $\dfrac{5!}{3!}=20$ 가지
(ⅰ)과 (ⅱ)에 의해 모두 30 가지이다.

6.정답 ①

[출제의도] 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 주어진 값을 구한다.

$75=5^{-\frac{1}{x}}$, $3=5^{\frac{2}{y}}$ 이므로 $5^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{75}$, $5^{\frac{2}{y}}=3$ 이다.

$$5^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}}=5^{\frac{1}{x}}\times5^{\frac{2}{y}}=3\times\frac{1}{75}=\frac{1}{25}=5^{-2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=-2$$

7.정답 ③

철수가 받은 두 점수의 합이 70 인 경우는 다음과 같다.

관람객 투표	$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\mathrm{B}\left(\frac{1}{3}\right)$	$\mathrm{C}\left(\frac{1}{6}\right)$
심사위원	$\mathrm{C}\left(\frac{1}{6}\right)$	$\mathrm{B}\left(\frac{1}{3}\right)$	$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}\right)$
확률	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{5}{18}$$

8. 정답 ⑤

[출제의도] 로그의 뜻을 알고 문제해결하기
해발고도 $1840\mathrm{m}$인 곳에서의 기압을 $p_1(\mathrm{hPa})$이라 하면
$p_0=1000,\ t=10,\ H=1840$이므로

$$1840=18400(1+0.04\times10)\log\frac{1000}{p_1}$$

$\therefore\ \dfrac{1}{14}=3-\log p_1$이므로 $p_1=10^{\frac{41}{14}}$
따라서 해발고도 $1840\mathrm{m}$인 곳에서의 기압(hPa)은 $10^{\frac{41}{14}}$

9. 정답 ⑤

(ⅰ) 연속하는 100개의 자연수를 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{100}$으로 놓으면
$1\le|a_i-a_j|\le99$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ 100,\ i\ne j)$
따라서, 확률변수 X가 취할 수 있는 값은 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 99$이다.
(ⅱ) 연속하는 100개의 홀수를 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{100}$으로 놓으면
$2\le|b_k-b_l|\le198$ $(k,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ 100,\ k\ne l)$
따라서, 확률변수 Y가 취할 수 있는 값은 $2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 198$이다.
(ⅲ) 연속하는 100개의 짝수를 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_{100}$으로 놓으면
$2\le|c_m-c_n|\le198$ $(m,\ n=1,\ 2,\ \cdots,\ 100,\ m\ne n)$
따라서, 확률변수 Z가 취할 수 있는 값은 $2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 198$이다.
따라서, $Y=Z=2X$이므로
$\mathrm{V(Y)=V(Z)=4V(X)}$
$\therefore\ \mathrm{V(X)<V(Y)=V(Z)}$

10. 정답 ①

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. [반례] $a=10^{\frac{3}{2}}$ 이면 $f(a)=1,\ f(a^2)=3$ (거짓)
ㄴ. $\log a=f(a)+g(a)$,
$\log a^2=2\log a=2f(a)+2g(a)$
$\log a^2=f(a^2)+g(a^2)$ (참)
ㄷ. [반례] $a=b=10^{-\frac{1}{2}}$ 이면
$g(a)+g(b)=1,\ ab=\dfrac{1}{10}$ (거짓)

11. 정답 ⑤

공비를 r 라 하면 $a+b+c=a+ar+ar^2=\dfrac{7}{2}$에서
$a(1+r+r^2)=\dfrac{7}{2}\ \cdots$ ㉠
또, $abc=a\cdot ar\cdot ar^2=1$에서 $a^3r^3=(ar)^3=1$ 이고
a , r 는 실수이므로 $ar=1\ \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서

$$\frac{1+r+r^2}{r}=\frac{7}{2}\ ,\ 2r^2+2r+2=7r\ ,\ 2r^2-5r+2=0$$

$(r-2)(2r-1)=0\quad\therefore\ r=2$ 또는 $r=\dfrac{1}{2}$
㉠에서 $a=\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=2$
따라서 세 수는 2 , 1 , $\dfrac{1}{2}$ 이다.

$$\therefore\ a^2+b^2+c^2=2^2+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{21}{4}$$

[다른 풀이]$b^2=ac$ 이므로 (나)에서 $b^3=1$
$\therefore\ b=1$
$b=1$ 이므로 $ac=1$ 이고, (가)에서 $a+c=\dfrac{5}{2}$ 이므로
$ab+bc=\dfrac{5}{2}$

$$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=\frac{21}{4}$$

12.정답 ①

[출제의도] 도함수를 이용하여 함수의 증가와 감소 이해하기
조건 (나)에 의하여 $f(x)=ax^2+b$ 라 하면
$f(0)=-2$ 이므로 $b=-2$
$f(x)=ax^2-2$, $f'(x)=2ax$
$f(f'(x))=f'(f(x))$ 이므로 $a=\dfrac{1}{2}$ 이다.
따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2$ 이다.
$F(x)$ 가 감소하는 구간은 부등식 $F'(x)<0$
즉, $f(x)<0$ 을 만족하는 구간이므로
$\dfrac{1}{2}x^2-2<0$, $-2<x<2$
$\therefore$ 감소하는 구간의 길이는 4

13. 정답 ④

$a_{n+1}=S_n$ 이므로 …… ①
$a_n=S_{n-1}\ (n\ge2)$ 이고 …… ②
①, ②의 양변을 서로 빼면
$a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge2)$
$a_{n+1}-a_n=a_n\ (n\ge2)$
$a_{n+1}=2a_n\ (n\ge2)$ 이므로
$a_1=1$, $a_n=2^{n-2}\ (n\ge2)$
따라서 $a_{10}=2^8=256$

14. 정답 ①

[출제의도] 이차함수와 원의 접선을 이용하여 수열의 극한값을 구한다.

원 C_n 의 중심이 $P_n(n,\ n^2)$이고 y축에 접하므로, 반지름의 길이는 n이다. 또 원점을 지나고 기울기가 a_n인 직선의 방정식은 $y=a_nx$ 즉, $a_nx-y=0$이다.

원 C_n과 직선 $a_nx-y=0$이 접하므로 원의 중심 $P_n(n,\ n^2)$에서 직선 $a_nx-y=0$에 이르는 거리가 n이다.

$\therefore\ \dfrac{\left|na_n-n^2\right|}{\sqrt{a_n^2+1}}=n$

$\dfrac{\left|a_n-n\right|}{\sqrt{a_n^2+1}}=1$

양변을 제곱하여 정리하면

$a_n^2-2na_n+n^2=a_n^2+1$

$\therefore\ a_n=\dfrac{n^2-1}{2n}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{n^2}}{2}=\dfrac{1}{2}$

[다른 풀이]

원의 방정식은

$(x-n)^2+(y-n^2)^2=n^2$

$y=a_nx$를 대입하면

$(x-n)^2+(a_nx-n^2)^2=n^2$

$x^2-2nx+n^2+a_n^2x^2-2n^2a_nx+n^4=n^2$

$(1+a_n^2)x^2-2(n+n^2a_n)x+n^4=0$

직선과 원이 접하므로 판별식

$\dfrac{D}{4}=\left(n+n^2a_n\right)^2-n^4(1+a_n^2)=0$이다.

$2n^3a_n=n^4-n^2$

$\therefore\ a_n=\dfrac{n^2-1}{2n}$, $\qquad\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{2}$

15.정답 ③

[출제의도] 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

정삼각형에 칠한 색을 결정하는 경우의 수는 ${}_8C_2=28$

나머지 6가지 색으로 등변사다리꼴을 칠하는 경우의 수는

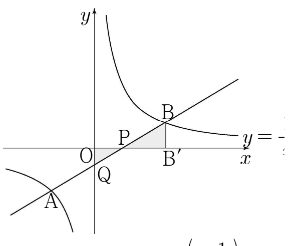
${}_6C_3\times(3-1)!=240$

따라서 구하는 경우의 수는 $28\times240=6720$

16. [정답] ⑤

[풀이]

[출제의도] 유리함수를 이용하여 절대부등식 문제 해결하기



두 점 $A(-1,\ -1)$, $B\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ $(a>1)$를 지나는 직선의 기울기가

$\dfrac{\dfrac{1}{a}-(-1)}{a-(-1)}=\dfrac{\dfrac{1}{a}+1}{a+1}=\dfrac{\dfrac{a+1}{a}}{a+1}=\dfrac{1}{a}$

이므로 직선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{a}(x+1)-1=\dfrac{1}{a}x+\dfrac{1}{a}-1$

이다. 따라서 점 P, Q의 좌표는

$P(a-1,0)$, $Q\left(0,\ \dfrac{1}{a}-1\right)$

이고

$\overline{OP}=a-1$, $\qquad\overline{OQ}=1-\dfrac{1}{a}$,

$\overline{PB'}=a-(a-1)=1$, $\overline{BB'}=\dfrac{1}{a}$

이므로

$S_1=\dfrac{1}{2}\times(a-1)\times\left(1-\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{a^2-2a+1}{2a}$

$=\dfrac{a}{2}-1+\dfrac{1}{2a}$

$S_2=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2a}$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}S_1+S_2&=\frac{a}{2}-1+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}=\frac{1}{a}+\frac{a}{2}-1\\&\geq2\sqrt{\frac{1}{a}\times\frac{a}{2}}-1\\&=\sqrt{2}-1\end{aligned}$$

이므로 최솟값은 $\sqrt{2}-1$이다.

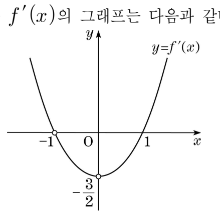
17. 정답 ②

[출제의도] 주어진 함수와 도함수를 이용하여 함수의 극한값을 구한다.

함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=0$에서만 불연속이고,

$f'(x)=\dfrac{1}{2}(3x^2-3)$ (단, $x\neq-1,\ x\neq0$)

따라서 도함수 $f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. 함수 $y=f'(x)$의 그래프에서

$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=-\dfrac{3}{2}$

ㄷ. $f'(x)=t$라 하면 $x\to-1+0$일 때 $t\to-0$이다.

$\therefore\ \lim\limits_{x\to-1+0}f(f'(x))=\lim\limits_{t\to-0}f(t)=-1$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

18. [정답] ①

[풀이]

[출제의도] 등비급수를 이용하여 도형 문제 추론하기

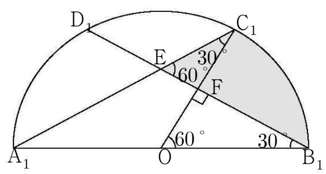


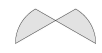
그림 R_1에서 두 선분 A_1C_1과 B_1D_1의 교점을 E, 두 선분 OC_1과 B_1D_1의 교점을 F라 하자. 삼각형 OB_1F와 삼각형 C_1EF는 세 내각의 크기가 30°, 60°, 90°인 직각삼각형이므로 삼각비에 의해

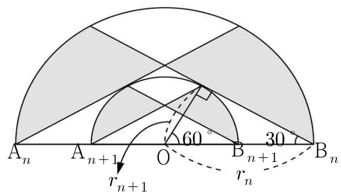
$\overline{B_1F}=\sqrt{3}$, $\overline{OF}=\overline{C_1F}=1$, $\overline{EF}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

이다. S_1은 부채꼴 OB_1C_1의 넓이와 삼각형 C_1EF의 넓이를 더한 값에서 삼각형 OB_1F의 넓이를 뺀 값의 2배와 같으므로

$S_1=\left\{\pi\times2^2\times\dfrac{60^\circ}{360^\circ}+\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1\right\}\times2$

$=\dfrac{4\pi}{3}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

이다. 그림 R_n에서 가장 작은 반원의 반지름의 길이를 r_n이라 하고, 그림 R_n을 얻는 과정에서 새로 얻은  모양의 넓이를 a_n이라 하자.



$r_{n+1}:r_n=1:2$이므로

$a_{n+1}:a_n=\left(r_{n+1}\right)^2:\left(r_n\right)^2$

$a_{n+1}:a_n=1^2:2^2$

$a_{n+1}=\dfrac{1}{4}a_n$

이다. 따라서 수열 $\left\{a_n\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{4\pi}{3}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이고 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{\dfrac{4\pi}{3}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{16\pi-8\sqrt{3}}{9}$

이다. 그러므로 $a+b=16-8=8$이다.

19. 정답 ④

모든

확률의 합이 1이므로 $p+\dfrac{1}{4}+q+\dfrac{1}{12}=1$

$\therefore\ p+q=\dfrac{2}{3}$

$E(X)=\dfrac{1}{4}+2q+\dfrac{1}{4}=2q+\dfrac{1}{2}$,

$V(X)=\dfrac{1}{4}+4q+\dfrac{3}{4}-(2q+\dfrac{1}{2})^2=1$

$\Leftrightarrow 4q-(2q+\dfrac{1}{2})^2=0\Leftrightarrow$

$16q^2-8q+1=(4q-1)^2=0$

$\therefore\ q=\dfrac{1}{4}$, $p=\dfrac{5}{12}$

$\therefore\ 3p+q=3\times\dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{2}$

20. 정답 ④

$\log a=n+\alpha\ (0<\alpha<1)$, $\log\sqrt[n]{\alpha}=1+\dfrac{\alpha}{n}$

$\therefore \alpha+\dfrac{\alpha}{n}=1\ (\because \alpha<1,\ \dfrac{\alpha}{n}<1)$,

$\dfrac{n+1}{n^2+8}\log a=1$

$\log a=\dfrac{n^2+8}{n+1}=n+\alpha \qquad \therefore \alpha=\dfrac{8-n}{1+n}$

$\dfrac{8-n}{1+n}+\dfrac{8-n}{n+n^2}=1,\quad -n^2+7n+8=n^2+n$

$n^2-3n-4=0 \quad \therefore n=4\ (\because n$은 자연수),

$\log a=\dfrac{24}{5}$

$\therefore \dfrac{\log a}{n}=\dfrac{6}{5}$

21. [정답] ②

[풀이]

[출제의도] 수열의 극한을 이용하여 함수의 그래프 추론하기

$-1<x\le 1$일 때, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3x^{2n}+|x|}{x^{2n}+1}$ 이므로

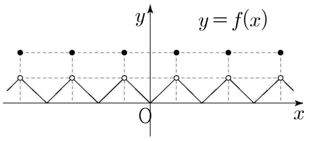
(i) $|x|<1$일 때,

$f(x)=\dfrac{0+|x|}{0+1}=|x|$

(ii) $x=1$일 때,

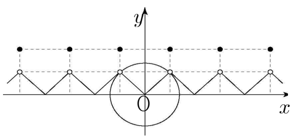
$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+1}{1+1}=2$

이고, $f(x+2)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



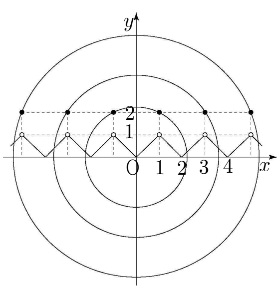
ㄱ. $f(3)=2$ (참)

ㄴ.



원 $x^2+y^2=2$는 $y=f(x)$의 그래프와 만나지 않는다. (참)

ㄷ.



원 $x^2+y^2=k$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 네 점에서 만나려면 $(1,2)$, $(3,2)$, $(5,2)$, $\cdots$을 지나야 한다. 즉, 자연수 n에 대하여 $(2n-1,2)$를 지나야 한다. 이때 $(2n-1)^2+2^2=k$이고 $k\le 100$이므로 $n=1,2,3,4,5$이다.

따라서 100이하의 k의 개수는 5이다. (거짓)

22. [정답] 11

[풀이]

[출제의도] 등차수열의 일반항 계산하기

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=5$, $a_2=7$이므로 공차 d는 $d=a_2-a_1=7-5=2$이다.

따라서 $a_4=a_1+3d=5+3\times 2=11$이다

23. [정답] 2

[풀이]

[출제의도] 로그 계산하기

$\log_2(3+\sqrt{5})+\log_2(3-\sqrt{5})$

$=\log_2\{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})\}$

$=\log_2 4=2$

24.정답 12

[출제의도] 도함수를 활용하여 극값과 접선의 방정식의 성질 이해하기

$f(x)=\dfrac{1}{4}(x-1)^4+C$에서 $M=f(1)=C$

$f'(0)=-1,\ f'(2)=1$

$x=0$에서의 접선은 $y=-x+\dfrac{1}{4}+C$

$x=2$에서의 접선은 $y=(x-2)+\dfrac{1}{4}+C$

$-x+\dfrac{1}{4}+C=x-2+\dfrac{1}{4}+C$ 에서 $x=1$이므로

$N=C-\dfrac{3}{4} \quad \therefore 16(M-N)=12$

25. [정답] 10

[풀이]

[출제의도] 합성함수의 정의 이해하기

$f(x)=x^2+3,\ g(x)=2x-10$이므로

$(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(2a-10)=(2a-10)^2+3$

$(2a-10)^2+3=103$

$(2a-10)^2=100$

$2a-10=\pm 10$

$a=0,10$

따라서 양수 a는 10이다.

26. 정답 30

전체의 경우에서 A, B가 모두 같은 동아리에 가입하는 경우를 빼면 된다.

A, B가 각각 동아리를 선택하는 경우는 ${}_4C_2$이므로

${}_4C_2\times{}_4C_2-{}_4C_2=30$가지

27. [정답] 432

[풀이]

[출제의도] 집합의 성질 이해하기

$A\cap B=\{4,6\}$이므로 $A=\{a,b,4,6\}$라 하자.

$B=\{x+k\,|\,x\in A\}$이므로 $B=\{a+k,\ b+k,\ 4+k,\ 6+k\}$이다.

(A의 원소의 합)$=a+b+4+6=21$이므로 $a+b=11$

($A\cup B$의 원소의 합)

= (A의 원소의 합)+(B의 원소의 합)

-($A\cap B$의 원소의 합)

$40=21+(21+4k)-10$

$\therefore k=2$

집합 $B=\{6,8,a+2,b+2\}$에서 $A\cap B=\{4,6\}$이므로

$a+2,b+2$ 중의 어느 하나는 4가 되어야 한다.

$a+2=4$이면 $a=2$, $b=9$이고

$b+2=4$이면 $b=2$, $a=9$이다.

따라서 집합 A의 모든 원소의 곱은 $2\times4\times6\times9=432$이다.

28. 정답 35

[출제의도] 확률을 이용한 수학외적 문제해결하기

전구가 n개 켜져 있을 경우 1열, 2열, 3열, 4열은 각각 n, $4n$, $16n$, $64n$의 수를 나타내고, 전광판이 나타내는 수가 짝수일 사건은 홀수인 사건의 여사건이다.

홀수일 확률은 1열에서 1개,

나머지 열 중에서 1개 켜질 때이므로

$\therefore \dfrac{{}_3C_1\cdot{}_9C_1}{{}_{12}C_2}=\dfrac{9}{22}$

따라서, 구하는 확률은 $1-\dfrac{9}{22}=\dfrac{13}{22}$

$p+q=35$

29.[정답] 24

[풀이]

[출제의도] 등차수열의 합 이해하기

수열$\{a_n\}$의 공차를 d라고 하자.

$a_{26}=30$이므로 $a_1+25d=30\cdots$①

$\sum\limits_{n=1}^{13}\{(a_{2n})^2-(a_{2n-1})^2\}$

$=\sum\limits_{n=1}^{13}(a_{2n}-a_{2n-1})(a_{2n}+a_{2n-1})$

$=\sum\limits_{n=1}^{13}d(a_{2n}+a_{2n-1})$

$=d\{(a_2+a_1)+(a_4+a_3)+\cdots+(a_{26}+a_{25})\}$

$=d(a_1+a_2+\cdots+a_{26})$

$=\dfrac{d\times 26(a_1+a_{26})}{2}$

$=13d(a_1+30)=260$

$\therefore d(a_1+30)=20\cdots$②

①, ②에 의해서

$d(30-25d+30)=20$

$25d^2-60d+20=0$

$5d^2-12d+4=0$

$(5d-2)(d-2)=0$

$d=\dfrac{2}{5}$또는 $d=2$

$d=2$이면 $a_1=-20<0$이므로 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수인 것은 아니다.

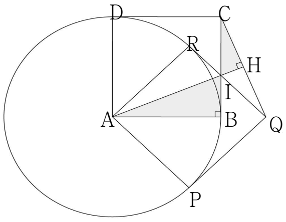
따라서 $d=\dfrac{2}{5}$이고 $a_1=20$이다. 그러므로

$a_{11}=20+10\times\dfrac{2}{5}=20+4=24$이다.

30. [정답] 208

[풀이]

[출제의도] 삼각형의 닮음을 이용하여 함수의 극한문제 해결하기



$\overline{\mathrm{CI}}=t$ 라 하자.

점 P 가 점 B에 한없이 가까워지면 $t\to 0$이다.

점 I 에서 선분 QC 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 삼각형 ABI와 CHI 는 닮음이다.

$\overline{\mathrm{BI}}=1-t,\ \overline{\mathrm{AI}}=\sqrt{t^2-2t+2}$

이고 $\overline{\mathrm{AI}}:\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CI}}:\overline{\mathrm{CH}}$ 이므로

$\sqrt{t^2-2t+2}\ :\ 1=t:\overline{\mathrm{CH}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}$

이다. $\overline{\mathrm{AI}}:\overline{\mathrm{BI}}=\overline{\mathrm{CI}}:\overline{\mathrm{HI}}$ 이므로

$\sqrt{t^2-2t+2}\ :\ 1-t=t:\overline{\mathrm{HI}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{HI}}=\dfrac{t(1-t)}{\sqrt{t^2-2t+2}}$

이다. 삼각형 IQC에 대하여 S, L을 구해보면

$S=\dfrac{t^2(1-t)}{t^2-2t+2},\quad L=2t\dfrac{\sqrt{t^2-2t+2}+1}{\sqrt{t^2-2t+2}}$

이다. 따라서

$$\lim_{t\to 0}\frac{L^2}{S}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{4t^2\times\dfrac{t^2-2t+3+2\sqrt{t^2-2t+2}}{t^2-2t+2}}{\dfrac{t^2(1-t)}{t^2-2t+2}}$$

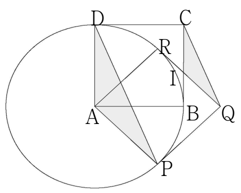
$$=\lim_{t\to 0}\frac{4\left(t^2-2t+3+2\sqrt{t^2-2t+2}\right)}{1-t}$$

$=12+8\sqrt{2}$

따라서 $a=12$, $b=8$이므로

$a^2+b^2=144+64=208$이다.

[다른풀이]

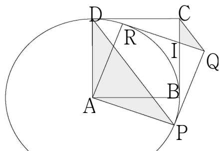


[그림 1]

[그림 1]에서 $\angle\mathrm{CIQ}=\angle\mathrm{DAP}$, $\overline{\mathrm{IC}}=\overline{\mathrm{IQ}}$, $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AP}}$ 이므로 두 삼각형 IQC, APD는 서로 닮음인 도형이다. 따라서

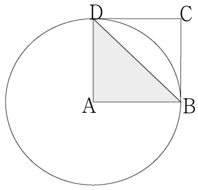
$$\frac{(\triangle\mathrm{IQC}\text{의 둘레의 길이})^2}{(\triangle\mathrm{IQC}\text{의 넓이})}=\frac{(\triangle\mathrm{APD}\text{의 둘레의 길이})^2}{(\triangle\mathrm{APD}\text{의 넓이})}$$

이다.



[그림 2]

[그림 2]에서 볼 수 있듯이 점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 삼각형 APD는 삼각형 ABD에 한없이 가까워진다.



[그림 3]

[그림 3]에서 삼각형 ABD는 직각이등변삼각형이므로

$$\frac{(\triangle\mathrm{ABD}\text{의 둘레의 길이})^2}{(\triangle\mathrm{ABD}\text{의 넓이})}=\frac{\left(1+1+\sqrt{2}\right)^2}{\dfrac{1}{2}\times 1\times 1}$$

$=12+8\sqrt{2}$

이다. 그러므로 점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 $\dfrac{L^2}{S}$의 값은 $12+8\sqrt{2}$ 에 한없이 가까워진다.

따라서 $a=12$, $b=8$이므로

$a^2+b^2=144+64=208$이다.