11회수학 나형 정답

1	③	2	⑤	3	③	4	⑤	5	②
6	⑤	7	②	8	④	9	⑤	10	①
11	③	12	②	13	②	14	②	15	⑤
16	①	17	②	18	①	19	④	20	⑤
21	②	22	21	23	31	24	19	25	120
26	80	27	27	28	17	29	725	30	56

해 설

1. [출제의도] 지수의 성질을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt[3]{8} \div 2^{-2} = (2^3)^{\frac{1}{3}} \div 2^{-2} = 2^{1-(-2)} = 2^3 = 8$

2. [출제의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x^2+x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{(x+1)(\sqrt{2x+1}+1)} = 1$

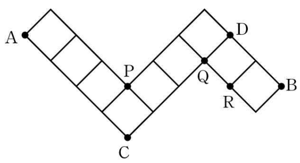
3. 정답 ③

$\log_2 40 - \log_2 5 = \log_2 \frac{40}{5} = \log_2 8 = 3$

4. [출제의도] 정적분의 값을 계산한다.

$\int_0^2 (x^2+1)\,dx - \int_0^2 x^2\,dx = \int_0^2 1\,dx = 2$

5.정답 ②



위의 그림과 같이 P지점과 Q지점을 잡자. C지점과 D지점을 모두 지나지 않으면

P지점과 Q지점은 반드시 지난다.

따라서 구하는 경우는

A → P → Q → R → B를 지날

때이므로 경우의 수는

$\frac{4!}{3!} \times \frac{3!}{2!} \times 1 \times 2 = 4 \times 3 \times 1 \times 2 = 24$

6. 정답 ⑤ **[출제의도] 이항정리 이해하기**

${}_6\mathrm{C}_r\,(x^2)^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_6\mathrm{C}_r\,x^{12-3r}$

$12-3r=3,\ r=3$

따라서 x^3의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$

7.[출제의도] 독립사건의 성질과 조건부 확률을 이해한다.

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$이다.

$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\frac{2}{3} = \frac{1}{2}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)\ \ \therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

8. [출제의도] 신뢰구간의 길이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\hat{p}=0.2$이므로 $2\times 2\times\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2\times 2\times\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{400}} = 0.08$

9. [출제의도] 두 항 사이의 관계를 이해하고 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

n칸의 계단을 오르는 방법의 수를 수열 $\{a_n\}$이라 하면 $\{a_n\}$: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, $\cdots$ $\therefore a_9 = 55$

10. [출제의도] 정적분의 기본 정리를 이용하여 도함수의 정적분 문제를 해결한다.

$\int_0^2 f'(x)dx = [f(x)]_0^2 = f(2)-f(0) = 0-2 = -2$

11. [출제의도] 상용로그의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$80 = 10\left(12+\log\frac{I}{1^2}\right) = 120+10\log I$에서 $\log I = -4$

$\therefore a = 10\left(12+\log\frac{I}{10^2}\right) = 120+10\log I - 20 = 60$

12.[출제의도] 등차수열의 일반항을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_n = 3+(n-1)d = 3d$에서 $n = 4-\frac{3}{d}$

n, d가 자연수이므로 $d=1, 3$ $\therefore\ 1+3=4$

13. [출제의도] 무리함수 그래프의 평행이동 이해하기

함수 $y=-\sqrt{x-2}+2$의 그래프는

함수 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

그러므로 $m=4,\ n=2$

따라서 $m+n=6$

14.[출제의도] 함수의 극한 문제해결하기

점 $\mathrm{P}(a, a)$를 지나고 x축에 평행한 직선 $y=a$와 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점은 각각 $\mathrm{A}(a^2-2, a)$, $\mathrm{B}(a^2-4a+6, a)$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = (a^2-4a+6)-(a^2-2) = -4a+8$

점 B를 지나고 y축에 평행한 직선 $x=a^2-4a+6$과 함수 $y=h(x)$의 그래프가 만나는 점은 $\mathrm{C}(a^2-4a+6, a^2-4a+6)$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}} = (a^2-4a+6)-a = a^2-5a+6$

따라서 $\lim_{a\to 2-}\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \lim_{a\to 2-}\frac{a^2-5a+6}{-4a+8}$

$= \lim_{a\to 2-}\frac{(a-2)(a-3)}{-4(a-2)}$

$= \lim_{a\to 2-}\frac{a-3}{-4} = \frac{1}{4}$

15.[출제의도] 함수의 연속을 이해하고 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄴ. $\lim_{x\to +0} f(f(x)) = \lim_{t\to -1+0} f(t) = 0$이고

$\lim_{x\to -0} f(f(x)) = \lim_{t\to 1-0} f(t) = 0$이므로 $\lim_{x\to 0} f(f(x)) = 0$

$f(f(0)) = 0$이므로 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $a\neq 0$일 때, $\lim_{x\to a} f(x)f(-x) = -\lim_{x\to a}\{f(x)\}^2$

$a=0$일 때, $-\lim_{x\to +0}\{f(x)\}^2 = -\lim_{x\to -0}\{f(x)\}^2 = -1$

따라서 $-2<a<2$인 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)f(-x)$의 값이 존재한다. (참)

16. 정답 ①

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n - \frac{n^2+1}{2n+1}\right) = 3$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(na_n - \frac{n^2+1}{2n+1}\right) = 0$이다.

즉, $\lim_{n\to\infty} n\left(a_n - \frac{n+\frac{1}{n}}{2n+1}\right) = 0$에서 $\lim_{n\to\infty} n \neq 0$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{n+\frac{1}{n}}{2n+1}\right) = 0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{n+\frac{1}{n}}{2n+1}\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{n}}{2n+1}$

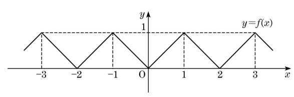
$= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(a_n^2+2a_n+2)$

$= \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^2 + 2\lim_{n\to\infty} a_n + 2$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\times\frac{1}{2} + 2 = \frac{13}{4}$

17. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 정적분의 값 구하는 문제를 해결한다.



주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로

$g(a+4)-g(4)$

$= \int_{-2}^{a+4} f(t)dt - \int_{-2}^{a} f(t)dt$

$= \int_{-2}^{a+4} f(t)dt + \int_{a}^{-2} f(t)dt$

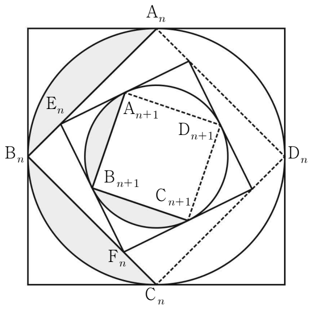
$= \int_{a}^{a+4} f(t)dt = \int_0^4 f(t)dt = 2\int_0^2 f(t)dt = 2$

18. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제해결하기

그림 R_1에서

$S_1 = 2\times\left(\frac{1}{4}\times 2^2\times\pi - \frac{1}{2}\times 2\times 2\right) = 2(\pi-2)$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



그림에서 $\overline{A_nB_n}=a$라 하자. 두 선분 A_nB_n, B_nC_n을 각각 $3:1$로 내분하는 두 점을 E_n, F_n이라 하면,

$\overline{B_nE_n}=\frac{1}{4}a$, $\overline{B_nF_n}=\frac{3}{4}a$

$\overline{E_nF_n}=\sqrt{(\overline{B_nE_n})^2+(\overline{B_nF_n})^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}a$

$\therefore\ \overline{A_{n+1}B_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{E_nF_n}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{4}a=\frac{\sqrt{5}}{4}\overline{A_nB_n}$

두 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$은 서로 닮음이고, 닮음비는 $1:\frac{\sqrt{5}}{4}$이다.

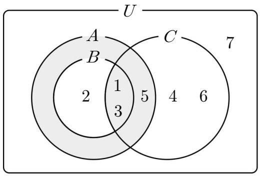
그러므로 그림 R_n에서 새로 얻어진 모양의 도형과 그림 R_{n+1}에서 새로 얻어진 모양의 도형도 서로 닮음이고 닮음비가 $1:\frac{\sqrt{5}}{4}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $2(\pi-2)$이고 공비가 $\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2=\frac{5}{16}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이다.

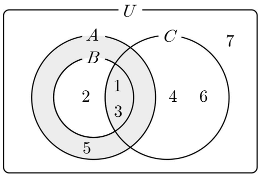
$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2(\pi-2)}{1-\frac{5}{16}}=\frac{32}{11}(\pi-2)$

19.[출제의도] 집합의 연산 이해하기

주어진 조건을 만족하는 집합 A, B, C를 벤 다이어그램으로 나타내면



또는



따라서 $A\cap(B^C\cup C)=\{1, 3, 5\}$

20. [출제의도] 무한급수와 관련된 문제를 정적분의 정의를 이용하여 해결한다.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$

$=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)\right\}+\frac{2}{n}\left\{f\left(\frac{4}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)\right\}$

$+\frac{3}{n}\left\{f\left(\frac{6}{n}\right)-f\left(\frac{4}{n}\right)\right\}+\ \cdots$

$+\frac{n-1}{n}\left\{f\left(\frac{2n-2}{n}\right)-f\left(\frac{2n-4}{n}\right)\right\}+\frac{n}{n}\left\{f\left(\frac{2n}{n}\right)-f\left(\frac{2n-2}{n}\right)\right\}$

$=-\frac{1}{n}f(0)-\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)-\frac{1}{n}f\left(\frac{4}{n}\right)-\ \cdots$

$-\frac{1}{n}f\left(\frac{2n-2}{n}\right)+f(2)$

$=f(2)-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$\frac{k}{n}=x_k$라 하면 $\frac{1}{n}=\Delta x$이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(2x_k)\Delta x=\int_0^1 f(2x)dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt=\frac{1}{8}$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{f(2)-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}$

$=f(2)-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

21. [출제의도] 수열의 극한 문제해결하기

집합 S_n의 부분집합 중 원소의 개수가 두 개인 집합에 대하여 이 두 원소의 차가 $2n$보다 큰 임의의 두 원소를 a, $b(a<b)$라 하자.

$b-a>2n$이므로 $b>a+2n$ (단, $1\le a<b\le 3n$)

$a=1$일 때, $b=2n+2,\ 2n+3,\ \cdots\ ,\ 3n$

$\{1, 2n+2\}$, $\{1, 2n+3\}$, $\cdots$, $\{1, 3n\}$: $(n-1)$개

$a=2$일 때, $b=2n+3,\ 2n+4,\ \cdots\ ,\ 3n$

$\{2, 2n+3\}$, $\cdots$, $\{2, 3n\}$: $(n-2)$개

$\vdots$

$a=n-1$일 때, $b=3n$

$\{n-1, 3n\}$: 1개

$n\le a<3n$일 때, b는 없으므로 0개

그러므로 원소의 개수가 두 개이고, 이 두 원소의 차가 $2n$보다 큰 집합 S_n의 모든 부분집합의 개수 a_n은

$a_n=(n-1)+(n-2)+\ \cdots\ +1=\frac{n(n-1)}{2}$

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)}{2}$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right\}=\frac{n^3-n}{6}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\times\frac{n^3-n}{6}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{6}=\frac{1}{6}$

22. [출제의도] 이항분포를 이해하고 확률변수의 평균을 구한다.

확률변수 X가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{7}\right)$을 따르므로

$E(X)=\frac{n}{7}=3$

$\therefore\ n=21$

23.[출제의도] 조건부확률 계산하기

정팔각형의 꼭짓점 중 임의의 세 점을 택하여 만든 삼각형이 직각삼각형인 사건을 A, 이등변삼각형인 사건을 B라 할 때

$\frac{q}{p}=P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$P(A)=\frac{{}_4C_1\times{}_6C_1}{{}_8C_3}$, $P(A\cap B)=\frac{{}_4C_1\times{}_2C_1}{{}_8C_3}$

$p=3, q=1$

따라서 $10p+q=31$

24. [출제의도] 이산확률분포를 이해한다.

$a+2a+3a+4a=1$에서 $a=\frac{1}{10}$

$P(X=x)=\frac{1}{10}x$, $E(X)=\sum_{k=1}^{4}k\cdot\frac{k}{10}=\frac{1}{10}\cdot\frac{4\cdot5\cdot9}{6}=3$

$\therefore\ E(4X+7)=4E(X)+7=12+7=19$

25. [출제의도] 함수의 연속성을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)$는 삼차항의 계수가 2인 삼차함수이고

$f(-1)=f(0)=f(1)=0$이므로 $f(x)=2x(x-1)(x+1)$

$\therefore f(4)=120$

26. [출제의도] 등차수열 이해하기

세 실수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면, $a=b-d$, $c=b+d$

(가)에서 $\frac{2^a\times2^c}{2^b}=2^{a+c-b}=2^{(b-d)+(b+d)-b}=2^b=32$

$\therefore\ b=5$

(나)에서 $a+c+ca$

$=(5-d)+(5+d)+(5+d)(5-d)$

$=35-d^2=26$

$\therefore\ d=\pm3$

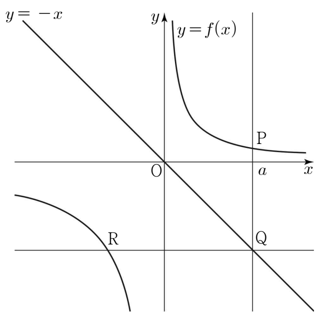
그러므로 $a=2$, $b=5$, $c=8$ 또는 $a=8$, $b=5$, $c=2$

따라서 $abc=80$

27.[출제의도] 유리함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

점 P의 x의 좌표를 a라 하자.

(i) $a>0$일 때,



$P\left(a, \frac{3}{a}\right)$, $Q(a, -a)$, $R\left(-\frac{12}{a}, -a\right)$이므로

$\overline{PQ}=a+\frac{3}{a}$, $\overline{QR}=a+\frac{12}{a}$

$\therefore\ \overline{PQ}\times\overline{QR}=\left(a+\frac{3}{a}\right)\left(a+\frac{12}{a}\right)=a^2+\frac{36}{a^2}+15$

$\ge2\sqrt{a^2\times\frac{36}{a^2}}+15=27$

등호가 성립하는 경우는 $a^2=\frac{36}{a^2}$, 즉 $a=\sqrt{6}$일 때이다.

그러므로 $a=\sqrt{6}$일 때, $\overline{PQ}\times\overline{QR}$는 최솟값 27을 갖는다.

(ii) $a<0$일 때,

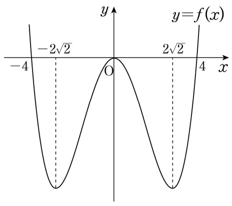
$P\left(a, \frac{12}{a}\right)$, $Q(a, -a)$, $R\left(-\frac{3}{a}, -a\right)$이므로

(i)에서와 같이

$a=-\sqrt{6}$일 때, $\overline{PQ}\times\overline{QR}$는 최솟값 27을 갖는다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 $\overline{PQ}\times\overline{QR}$의 최솟값은 27

28. [출제의도] 도함수의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 문제를 해결한다.



$f'(x)=4x(x^2-8)$ 이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-2\sqrt{2}$, 0, $2\sqrt{2}$
(가)의 조건에 의해 $f(x)$는 구간 $(k,\ k+1)$에서 감소한다.
그래프에서 감소하는 구간은 $(-\infty,\ -2\sqrt{2})$, $(0,\ 2\sqrt{2})$이고, k는 정수이므로 $k=0$, 1 또는 -4, -5, $\cdots$
(나)의 조건에 의해 $f'(k+2)>0$이므로
$k=1$ 또는 -4
따라서 $1^2+(-4)^2=17$

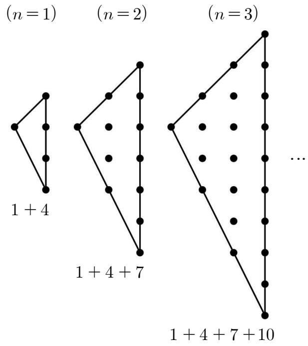
29. **[출제의도] 수열의 합 문제해결하기**

기울기가 1이고 y절편이 양수인 원 $x^2+y^2=\dfrac{n^2}{2}$의 접선의 방정식은 $y=x+\dfrac{n}{\sqrt{2}}\sqrt{1+1^2}$
$\therefore\ y=x+n$
직선 $y=x+n$이 x축, y축과 만나는 점은 각각 $A_n(-n,0)$, $B_n(0,n)$이고,
점 A_n을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은 $y=-2x-2n$이므로 $C_n(0,-2n)$
삼각형 $A_nC_nB_n$과 그 내부의 점들 중
x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수 a_n은
$n=1$일 때, x좌표가 0인 점의 개수는 4,
x좌표가 -1인 점의 개수는 1 이므로
$a_1=1+4=5$
$n=2$일 때, x좌표가 0인 점의 개수는 7,
x좌표가 -1인 점의 개수는 4,
x좌표가 -2인 점의 개수는 1 이므로
$a_2=1+4+7=12$
$n=3$일 때, x좌표가 0인 점의 개수는 10,
x좌표가 -1인 점의 개수는 7,
x좌표가 -2인 점의 개수는 4,
x좌표가 -3인 점의 개수는 1 이므로
$a_3=1+4+7+10=22$
$\vdots$

$$\therefore\ a_n=1+\{4+7+10+\cdots+(3n+1)\}$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n}(3k+1)=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n+1$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n+1\right)$$
$$=\frac{3}{2}\times\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{5}{2}\times\frac{10\times11}{2}+1\times10$$
$$=725$$



30. **[출제의도] 함수의 연속 문제해결하기**

주어진 이차함수 $f(x)$는 축의 방정식이 $x=4$이고
(가)에서 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(0,2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로
$f(0)=a>0$, $f(2)=a-12<0$
$\therefore\ 0<a<12$
(나)에서
$f(a)g(a)=7a^2(a-7)$,

$$\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=\lim_{x\to a+}(x^2-8x+a)(2x+5a)$$
$$=7a^2(a-7),$$
$$\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}(x^2-8x+a)f(x+4)$$
$$=(a^2-8a+a)\{(a+4)^2-8(a+4)+a\}$$
$$=a(a-7)(a^2+a-16)$$

이고 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로
$7a^2(a-7)=a(a-7)(a^2+a-16)$
$a(a-7)(a-8)(a+2)=0$
$\therefore\ a=7$ 또는 $a=8$ ($\because\ 0<a<12$)
따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 56