15회수학 나형 정답

1	③	2	⑤	3	⑤	4	①	5	②
6	①	7	③	8	①	9	①	10	②
11	③	12	④	13	④	14	②	15	⑤
16	⑤	17	⑤	18	③	19	②	20	③
21	③	22	15	23	25	24	24	25	16
26	76	27	13	28	19	29	7	30	12

해 설

1. 정답 ③

[출제의도] 이항분포의 분산을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$V(X)=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=20$$

$\therefore\ n=90$

2. [출제의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x^2+x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{(x+1)(\sqrt{2x+1}+1)}=1$$

3. 정답 ⑤

$f(10)=\dfrac{10+1}{10-1}=\dfrac{11}{9}$이므로

$$(f\circ f)(10)=f(f(10))=f\left(\frac{11}{9}\right)$$

$$=\frac{\frac{11}{9}+1}{\frac{11}{9}-1}=\frac{\frac{20}{9}}{\frac{2}{9}}=10$$

4. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 조건부확률을 계산한다.

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$ 이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$$

$$=\frac{9}{16}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{16}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{9}{16}}=\frac{1}{9}$$

5. [출제의도] 정규분포의 확률을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

물고기 한 마리의 무게를 확률변수 X라 하면

$$\mathrm{P}(X\geq830)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{830-800}{50}\right)=\mathrm{P}(Z\geq0.6)$$

$$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq0.6)=0.5-0.2257=0.2743$$

6. 정답 ①

$\sqrt{17}-4=\dfrac{1}{8+a_1}$ 이므로

$$a_1=\frac{1}{\sqrt{17}-4}-8=\frac{\sqrt{17}+4}{(\sqrt{17}-4)(\sqrt{17}+4)}-8$$

$=\sqrt{17}-4$이다.

또한, 조건

$$\frac{1}{8+a_1}=\frac{1}{8+\frac{1}{8+a_2}}=\frac{1}{8+\frac{1}{8+\frac{1}{8+a_3}}}=\cdots$$로

부터

$$a_1=\frac{1}{8+a_2},\ a_2=\frac{1}{8+a_3},\ \cdots$$

$$\therefore\ a_2=\frac{1}{a_1}-8,\ a_3=\frac{1}{a_2}-8,\ \cdots$$

위 두 결과를 이용하여 $a_2,\ a_3,\ \cdots$의 값을 차례로 구하면

$$a_2=\frac{1}{a_1}-8=\frac{1}{\sqrt{17}-4}-8=\sqrt{17}-4$$

$$a_3=\frac{1}{a_2}-8=\frac{1}{\sqrt{17}-4}-8=\sqrt{17}-4$$

$$\cdots$$

$$\therefore\ a_{2002}=a_{2001}=\cdots=a_3=a_2=\sqrt{17}-4$$

7.정답 ③

$4^x=2^{2x}$에서 $\quad 2^{2x}=2^y,\ y=2x$이므로

$$\frac{y}{x}+\frac{2}{y}=3$$

8.정답 ①

양 끝에 흰색이 놓이면, 가운데 5 개는 흰색 깃발 3 개, 파란색 깃발 5 개를 일렬로 나열하는 방법의 수가 된다.

$$\therefore\ \frac{8!}{3!5!}=56$$

9. 정답 ①

[출제의도] 상용로그의 지표의 성질 이해하기

$$\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}=\log_{10}2^{-10}=-3.01=\bar{4}.99$$

$\therefore n=4$ 이므로 $\log_2 4=2$

10. [출제의도] 무한급수와 정적분의 관계 이해하기

$F'(x)=f(x)$ 이므로

$\displaystyle\int f(x)\,dx=F(x)+C$ 이다.

따라서 $\mathrm{A}(a,\ F(a))$, $\mathrm{B}(a+c,\ F(a+c))$를 지나는

직선의 기울기는

$$\begin{aligned}\frac{F(a+c)-F(a)}{(a+c)-a}&=\frac{1}{c}\{F(a+c)-F(a)\}\\&=\frac{1}{c}\int_a^{a+c}f(x)dx\\&=\frac{1}{c}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{c}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{1}{n}\end{aligned}$$

11. [출제의도] 중복조합을 이해하고 경우의 수를 구한다.

세 개의 주머니 A, B, C에 넣은 공의 수를 각각 $a,\ b,\ c$라 하면 $a+b+c=5$이므로 가능한 모든 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5=21$

(ⅰ) 2개의 주머니에 다섯 개의 공을 1개와 4개로 나누어 넣는 경우의 수 ${}_3\mathrm{P}_2=6$

(ⅱ) 한 개의 주머니에 다섯 개의 공을 모두 넣는 경 우의 수 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는 $21-(6+3)=12$이다.

[다른 풀이]

한 주머니에 네 개 이상의 공을 넣을 수 없으므로 세 개의 주머니에 넣는 공의 수에 따라 경우를 나누면

(ⅰ) 한 개의 주머니에 공을 세 개 넣고 다른 주머니에 공을 두 개 넣는 경우는 3, 2, 0을 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $3!=6$

(ⅱ) 한 개의 주머니에 공을 세 개 넣고 나머지 두 개의 주머니에 공을 한 개씩 넣는 경우는 3, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $\dfrac{3!}{2!}=3$

(ⅲ) 한 개의 주머니에 공을 한 개 넣고 나머지 두 개의 주머니에 공을 두 개씩 넣는 경우는 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $\dfrac{3!}{2!}=3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$6+3+3=12$이다.

12.정답 ④

해설

$x^2-(n+1)x+n^2=nx-n$

$x^2-(2n+1)x+n(n+1)=0$

$x=n\ ,\ n+1$

$a_nb_n=n(n+1)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{19}\frac{100}{n(n+1)}&=100\sum_{n=1}^{19}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=100\left(1-\frac{1}{20}\right)\\&=95\end{aligned}$$

13. 정답 ④

[출제의도] 함수의 극한 이해하기

$2f(x)-3g(x)=h(x)$라 하면, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}h(x)=2$이고

$3g(x)=2f(x)-h(x)$이다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{8f(x)-3g(x)}{3g(x)}&=\lim_{x\to\infty}\frac{6f(x)+h(x)}{2f(x)-h(x)}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{h(x)}{f(x)}}{2-\frac{h(x)}{f(x)}}=3\end{aligned}$$

14정답 ②

$f(x)=x^3-3x+a$에 대하여

$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$이므로 $\quad F'(x)=f(x)$,

$F(0)=0$

이때, $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$에서

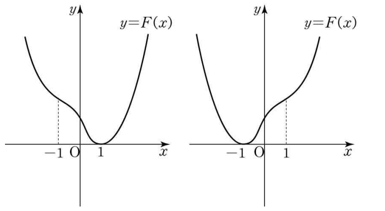
$F'(x)=f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$일 때 극값을 가진

다.

한편, 함수 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면

$y=F(x)$의 그래프의 개형이 다음 두 그래프 중 하나와

같아야 한다.



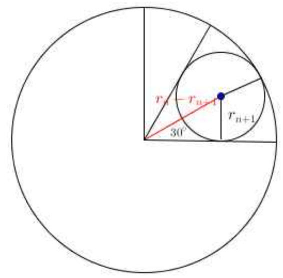
따라서 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면
$f(-1) \le 0$ 또는 $f(1) \ge 0$이어야 하므로
$f(-1) \le 0$에서 $a \le -2$, $f(1) \ge 0$에서 $a \ge 2$
따라서 양수 a의 최솟값은 2이다.
[다른 풀이]
$F(x)=\int_0^x f(t)dt$이므로 $F'(x)=f(x)$,
$F(0)=0$
$F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지므로 $F'(x)$,
즉 $f(x)$의 부호가 오직 한 번 변해야 한다.
따라서 삼차함수 $f(x)$가 x축과 오직 한 번 만나거나
x축과 접해야 한다.
$f(x)=x^3-3x+a$에서
$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$이므로
부등식 $f(1)\times f(-1) \ge 0$이 성립해야 한다.
$(-2+a)(2+a) \ge 0$ $\therefore$ $a \le -2$ 또는 $a \ge 2$
따라서 양수 a의 최솟값은 2이다.

15. 정답 ⑤
ㄱ. $A(3)=\{1,\ 3,\ 7,\ 9\}$이므로 $1 \in A(3)$
ㄴ. $A(6)=\{6\}$이므로 $A(6) \not\subset A(3)$
ㄷ. 집합 $A(3^n)$ 중에서 $n=3$인 경우
$A(3^3)=A(27)=\{1,\ 3,\ 7,\ 9\}$이므로
$A(3^n)=A(3)$인 자연수 n이 존재한다.

16. 정답 ⑤
ㄱ. $\mathrm{P}(E)=\frac{1}{2}$ 이므로
$I(E)=-\log_2 \mathrm{P}(E)=-\log_2 \frac{1}{2}=1$ (참)
ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$\therefore$ $I(A\cap B)=-\log_2 \mathrm{P}(A\cap B)$
$=-\log_2 \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=-\{\log_2 \mathrm{P}(A)+\log_2 \mathrm{P}(B)\}$
$=-\log_2 \mathrm{P}(A)-\log_2 \mathrm{P}(B)$
$=I(A)+I(B)$ (참)
ㄷ. $2I(A\cup B)=-2\log_2 \mathrm{P}(A\cup B)$
$=-\log_2\{\mathrm{P}(A\cup B)\}^2$
$I(A)+I(B)=-\log_2 \mathrm{P}(A)-\log_2 \mathrm{P}(B)$
$=-\log_2 \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$\mathrm{P}(A\cup B) \ge \mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(A\cup B) \ge \mathrm{P}(B)>0$ 이므로
$\{\mathrm{P}(A\cup B)\}^2 \ge \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$\therefore$ $\log_2\{\mathrm{P}(A\cup B)\}^2 \ge \log_2 \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$-\log_2\{\mathrm{P}(A\cup B)\}^2 \le -\log_2 \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$\therefore$ $2I(A\cup B) \le I(A)+I(B)$ (참)
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17. **[출제의도] 함수의 연속성을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**
ㄱ. $\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=1$, $(f\circ g)(0)=0$ $\therefore$ 불연속
ㄴ. $\lim_{x\to 0}(f\circ h)(x)=(f\circ h)(0)=1$ $\therefore$ 연속
ㄷ. $\lim_{x\to 0}(h\circ f)(x)=(h\circ f)(0)=\frac{1}{4}$ $\therefore$ 연속

18. 정답 ③
$S_1=\pi-4\times\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$
[그림n]에서 제일 작은 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

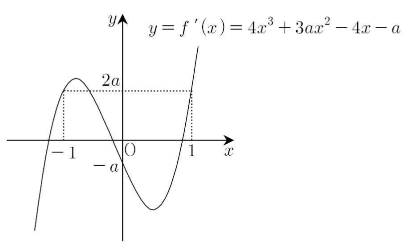


삼각비에 의하여 $(r_n-r_{n+1} : r_{n+1})=2:1$
$r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n$, $r_1=1$이므로 $r_n=\frac{1}{3^{n-1}}$
따라서 [그림n]에서 제일 작은 원의 개수는 4^{n-1}, 반지름의 길이는 $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이므로
$S_n=S_1+4\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times S_1+\cdots+4^{n-1}\times\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}^2\times S_1$
$=S_1+\frac{4}{9}S_1+\cdots+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}S_1$
$\therefore$ $\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{3}{5}\pi$
[다른 해설]
[그림n]에서 제일 작은 원의 개수는 4^{n-1}, 반지름의 길이는 $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이므로
$S_n=\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)^2\cdot 4^{n-1}\pi=\frac{\pi}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$을 얻을 수 있다.
$\therefore$ $\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{3}{5}\pi$

19. 정답 ②
[출제의도] 상용로그의 가수를 이해하고 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$\log x^3-\log x=3\log x-\log x=2\log x=$(정수)이므로
ㄱ. $\sqrt{10}<x<1000$에서 $1<2\log x<6$
$\therefore N(\sqrt{10},\ 1000)=4$ (참)
ㄴ. $10^p<x<10^{p+10}$에서
$2p<2\log x<2p+20$
$\therefore N(10^p,\ 10^{p+10})=19$ (참)
ㄷ. $2^{10}<x<2^{50}$에서 $6.02<2\log x<30.10$
$\therefore N(2^{10},\ 2^{50})=24$ (거짓)

20. 정답 ③
A 고등학교에서 임의로 뽑은 9명의 학생의 몸무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면
$E(\overline{X})=60$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{6}{\sqrt{9}}=2$
이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $N(60,2^2)$을 따른다.
한편 경고음이 울리려면 $9\overline{X} \ge 549$에서
$\overline{X} \ge \frac{549}{9}=61$
따라서 구하는 확률은
$P(\overline{X} \ge 61)=P\left(Z \ge \frac{61-60}{2}\right)$
$=P(Z \ge 0.5)=0.5-P(0 \le Z \le 0.5)$
$=0.5-0.1915=0.3085$

21. 정답 ③
ㄱ. 사차함수 $f(x)$에 대하여 주기가 2인 주기함수 $g(x)$가 실수전체의 집합에서 미분가능하기 위한 필요충분조건은
$f(1)=f(-1)$, $f'(1)=f'(-1)$ (참)
ㄴ. $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라 하면
$f(1)=1+a+b+c+d$
$f(-1)=1-a+b-c+d$
$f(1)=f(-1)$이므로 $a+c=0$,
$\therefore$ $c=-a$
$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$이고
$f'(1)=4+3a+2b+c$
$f'(-1)=-4+3a-2b+c$
$f'(1)=f'(-1)$이므로 $4+2b=0$
$\therefore$ $b=-2$
즉, $f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+d$이고
$f'(x)=4x^3+3ax^2-4x-a$이다.
$f'(0)=-a$, $f'(1)=4+3a-4-a=2a$이므로
$f'(0)f'(1)=-2a^2 \le 0$ (거짓)
ㄷ. $f'(-1)=f'(1)=2a$ 이고 $f'(1)>0$이므로
$a>0$



$f'(0)=-a<0$이므로 $y=f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.
따라서 구간 $(-\infty,\ -1)$에 $f'(c)=0$인 c가 존재한다. (참)

22. 정답 15
$(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}}\div a^3\times(\sqrt[3]{a})^{36}=a^k$
$a^6\div a^3\times a^{12}=a^k$
$a^{15}=a^k$
그러므로 $k=15$

23. 정답 25
$\int_{-a}^{a}(3x^2+2x)dx=2\int_0^a 3x^2dx$
$=2\left[x^3\right]_0^a=2a^3=\frac{1}{4}$

$a^3 = \dfrac{1}{8} \quad \therefore\ a = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 50a = 25$

24. 정답 24

$\{2,\ 3\} \cap A \neq \varnothing$이므로

집합 A는 2, 3 중 적어도 하나는 원소로 가져야 한다.

이 때, 2, 3을 원소로 갖지 않는 집합 U의 부분 집합의

개수는 $2^{5-2} = 2^3 = 8$(개)이다.

따라서, 구하는 집합 A의 개수는

$2^5 - 8 = 32 - 8 = 24$(개)

25. 정답 16

$a_n = \left\{\dfrac{1+(-1)^n}{3}\right\}$이라 하면 $a_{2n-1} = 0$이므로

$S = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^6 + \cdots$

이다.

즉 S는 공비가 $\dfrac{4}{9}$, 첫째항이 $\dfrac{4}{9}$인 무한등비수열

이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \dfrac{\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}} = \dfrac{4}{5} = S$

$\therefore\ 20S = 20 \times \dfrac{4}{5} = 16$

26. 정답 76

$\mathrm{P}(X=k) = \mathrm{P}(x \leqq k) - \mathrm{P}(x \leqq k-1)$

$= ak^2 - a(k-1)^2 = a(2k-1)$

$1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{5} \mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{5} a(2k-1) = a \times 25$

$\therefore\ a = \dfrac{1}{25}$

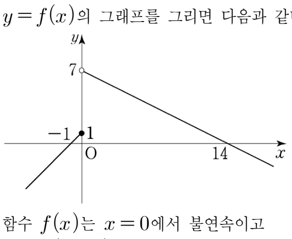
$E(X) = \dfrac{1}{25} \displaystyle\sum_{k=1}^{5} \{k \cdot (2k-1)\}$

$= \dfrac{1}{25} \displaystyle\sum_{k=1}^{5} (2k^2 - k) = \dfrac{19}{5}$

$\therefore\ 20E(X) = 20 \times \dfrac{19}{5} = 76$

27. 정답 13

$y = f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고

함수 $f(x-a)$는 $x=a$에서 불연속이다.

i) $a=0$일 때

$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)f(x-a) = \lim_{x\to +0} (f(x))^2 = 49$

$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)f(x-a) = \lim_{x\to -0} (f(x))^2 = 1$

$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)f(x-a) \neq \lim_{x\to a-0} f(x)f(x-a)$이므로

$a=0$일 때 함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=a$에서 불연속

ii) $a \neq 0$일 때

$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)f(x-a) = 7f(a)$

$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)f(x-a) = f(a)$

$f(a)f(0) = f(a)$

따라서 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이 되기 위해서는 $7f(a) = f(a)$, $f(a) = 0$

$\therefore\ a = -1,\ 14$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 13이다.

28. 정답 19

매회 시행에서

사건 A가 일어날 확률은 $\dfrac{3}{4}$

사건 B가 일어날 확률은 $\dfrac{1}{4}$

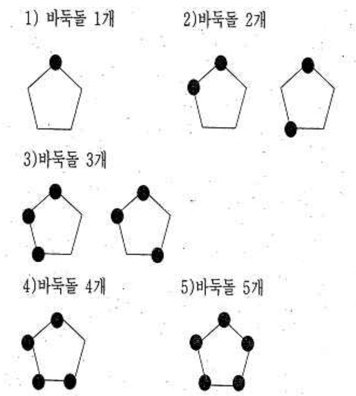
3번째에 마치는 경우는 AAB, BBA이므로

$\dfrac{q}{p} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}$

$\therefore\ p+q = 19$

29. 정답 7

[출제의도] 동전의 경우의 수의 개념과 배열의 개념 그리고 원순열의 개념을 이해하고 계산 할 수 있는가를 묻는 문제이다.



따라서 경우의 수 $1+2+2+1+1 = 7$

30. 정답 12

출제의도 : 지수와 로그 - 상용로그의 지표와 가수

$0 \leq \log m < \log n < 2$

$[\log m],\ [\log n] = 0, 1$

0	0
0	1
1	1

i) $1 \leq m < n < 10,\ \dfrac{m}{n} < 1$

$P_m = (0, \log m),\ P_n = (0, \log n)$

$\overline{P_m P_n}^2 = (\log \dfrac{m}{n})^2 = 1 + (\log 2)^2$

$\log \dfrac{m}{n} = -1 \pm \log 2 = \log \dfrac{1}{5}$ or $\log \dfrac{1}{20}$

$\therefore n = 20m$ 또는 $n = 5m$

ㄱ) $n = 5m$일때, $(m,n) = (2,10), (3,15), (4,20), (5,25), (6,30), (7,35), (8,40), (9,45)$

ㄴ) $n = 20m$일때, $(m,n) = (1,20), (2,40), (3,60), (4,80)$

iii) $10 \leq m < n < 100$

$P_m(1, -1+\log m),\ P_n(1, -1+\log n)$

$\overline{P_m P_n}^2 = (\log \dfrac{m}{n})^2 - 1 + (\log 2)^2 = 1 + (\log 2)^2$

은 성립할 수 없다.

따라서 총 12개