1.

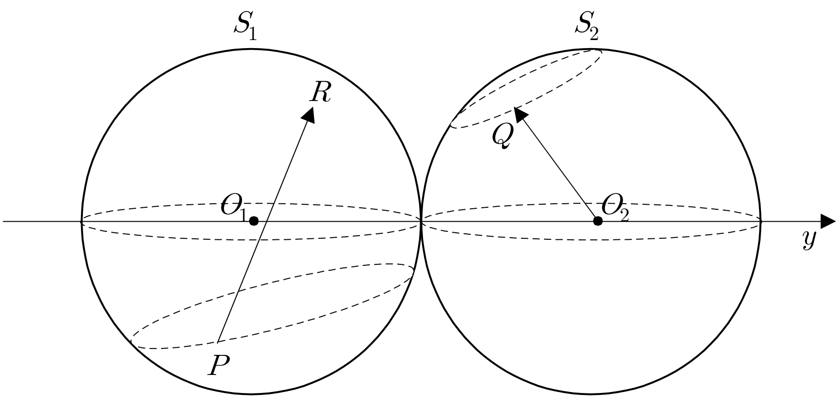
중심이 각각 O_1, O_2인 두 구

$S_1 : x^2+(y+4)^2+z^2=16$과 $S_2 : x^2+(y-4)^2+z^2=16$에 대하여

세 점 P, Q, R과 평면 α, β는 다음 조건을 만족한다.

(가) 점 P는 평면 $\alpha : y-\sqrt{15}z-4=0$과 구 S_1의 교선 위에 있고, 점 Q는 평면 β: $\sqrt{3}y-\sqrt{13}z+4\sqrt{3}=0$과 구 S_2의 교선 위에 있다. (나) 점 R은 구 S_1 위의 점이다.

평면 α와 β가 이루는 예각을 θ라고 할 때, $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{O_2Q}$의 최댓값과 최솟값의 합은 $acos\theta-bsin\theta$로 나타낼 수 있다. a^2+b^2의 값을 구하시오. [4점] (by 민호)



2.

평면에서 정삼각형 ABC와 동점 X, Y, Z는 다음을 만족한다.

(가) 동점 X, Y는 각각 선분 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 위에 있다.
(나) $\lvert\overrightarrow{AX}\rvert=\lvert\overrightarrow{AY}\rvert$
(다) $2\overrightarrow{ZY}\cdot\overrightarrow{ZC}=\lvert\overrightarrow{ZC}\rvert^2$

$\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{AZ}$의 값이 최소가 될 때, $\overrightarrow{AX}=k\overrightarrow{AB}$이다. $\dfrac{1}{k}$의 값을 구하시오.[4점](by곰블릭)

3.

실수 k와 함수 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} kx^2e^{-2x} & (x \geq 0) \\ f(x-a)+b & (x<0) \end{cases}$$ (단, a, b는 상수이다.)

이라 하자. 함수 $[g(x)]$의 불연속점의 개수가 1개 일 때, $\dfrac{10k}{e^2}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하자. $\displaystyle\int_a^{M+b} f(x)\,dx+\int_m^0 g(x)\,dx$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점] (by 규토)

4.

$x \neq 2$인 모든 실수에서 정의된 함수 $f(x) = \dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-2}$에 대해, 다음 조건을 시행한다.

(가) -4부터 4까지 정수가 써져있는 카드가 각각 1장 있다. (나) 9장의 카드 중 1장의 카드를 뽑는 시행을 3회 반복한다. (다) 첫 번째 뽑은 카드의 숫자를 a에, 두 번째 뽑은 카드의 숫자를 b에, 세 번째 뽑은 카드의 숫자를 c에 대입한다.

이 때, $f(x)$가 한 점에서만 미분가능하지 않을 확률을 구하시오. (단, 카드를 뽑는 시행은 복원추출이다.) [4점] (by 달빛)

① $\dfrac{1}{81}$ ② $\dfrac{10}{729}$ ③ $\dfrac{11}{729}$ ④ $\dfrac{4}{243}$ ⑤ $\dfrac{13}{729}$

5.

좌표공간위에 두 구

$S_1 : (x-3)^2+(y+9)^2+(z-3)^2=9$

$S_2 : x^2+y^2+(z-5)^2=25$

그리고 직선 $l : x-3y-5=0, z=2$ 가 있다.

x축을 포함하는 평면α가 구 S_1과 점A에서 접할 때, α와 구 S_2가 만나서 생기는 도형을 xy평면 위로 정사영 시킨 도형을 C라 하자. C위를 움직이는 점P가 있고, 직선l위에 $\overline{QR}=2\sqrt{2}$를 만족하는 두 점 Q, R가 존재한다. 이 때, 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하여라.(단, A의 z좌표는 양수이다.)[4점] (by 호시긔두마리)

6.

정수 a, b, c, d, e, f 가 다음 조건을 만족할 때 순서쌍 (a, b, c, d, e, f)의 개수를 구하시오.[4점] (by AGITO)

(가) $a^b = 36^k$ $(k = 1, 2, 3)$
(나) 두 벡터 $\vec{p}(c, d)$, $\vec{q}(e, f)$는 서로 직각을 이룬다.
(다) $a \times b \times c \times d \times e \times f = 2^4 \times 3^5$

7.

실수 전체에서 미분 가능한 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여,

$\int_{-1}^{g(x)} f(t)dt = h(x)\ln x$ 라 하자. 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$는 다음의 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to e} \frac{g(x)-1}{x-e} = \frac{1}{2e}$
(나) $\int_{g(1)}^{1} f(t)dt = g(e)$
(다) $y = \left\lvert g(e^x) - h(\frac{e}{x}) \right\rvert$는 $x=1$에서 미분 가능하다.

$f(1)g(1)$의 값은? (단, $f(x)=0$는 실근을 가지지 않는다.)[4점]
(by 프로갓수생)

① -1 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

8.

공간에서 평면 α위에 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC가 있다. 평면 α위에 있지 않은 두 점 D, F에 대하여 점 D에서 평면 α에 내린 수선의 발은 A이고, 점 F에서 평면 α에 내린 수선의 발은 C이다. $\overline{DC}$와 $\overline{FA}$는 교점 E을 갖으며 $\overline{DA}=\overline{FC}=2$이다. 삼각형 ABF를 포함하는 평면과 삼각형 CBD를 포함하는 평면이 이루는 이면각의 크기를 θ라고 할 때 $|\tan\theta|=\dfrac{b}{a}\sqrt{21}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 서로소인 자연수이다.) [4점] (by 곰블릭)

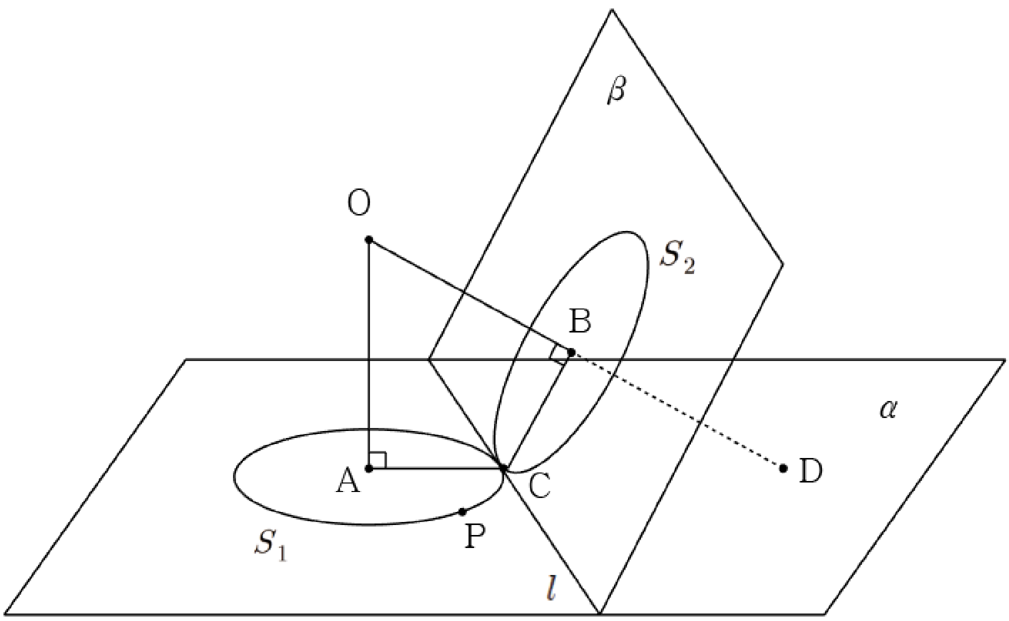
9.

두 평면 α, β 의 교선을 l 이라 하자.

평면 α 위에 있는 원 S_1 과 평면 β 위에 있는 원 S_2 는 반지름의 길이가 모두 1 이다. 그림과 같이 원 S_1과 원 S_2는 점 C에서 직선 l 과 접한다. S_1 의 중심 A을 지나고 평면 α 에 수직인 직선 m 과 S_2 의 중심 B을 지나고 평면 β 에 수직인 직선 n 이 점 O 에서 만난다. 직선 n 과 평면 α 은 점 D 에서 만난다.

$\angle \mathrm{ACB} = 120^\circ$ 이고 S_1 위에 있는 점 P 에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ 일 때,

S_2 위에 있는 임의의 점 Q 에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ 의 최댓값이 $a\sqrt{5}+b\sqrt{10}$ 이다.
$100(a^2+b^2)$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 유리수이다.) [4점] (by 규토)



10.

$x=0$에서만 미분이 불가능한 함수$f(x)$에 대해 다음 조건을 만족한다.

(가) $f(2)-f(0)=2, f(1)=1, f(-4)=2$

(나) $0<x_1<x_2$일 때, $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq 1$ (단, x_1, x_2는 실수)

(다) $f'(x)=\sqrt{4-\{f(x)\}^2}$ $(x<0)$

$\displaystyle\int_{-4}^{-1} f(x)dx+\int_{1}^{4} f(x)dx$의 최솟값을 $\dfrac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값은?

(단, p와 q는 서로소이다.) [4점] (by 달빛)

11.

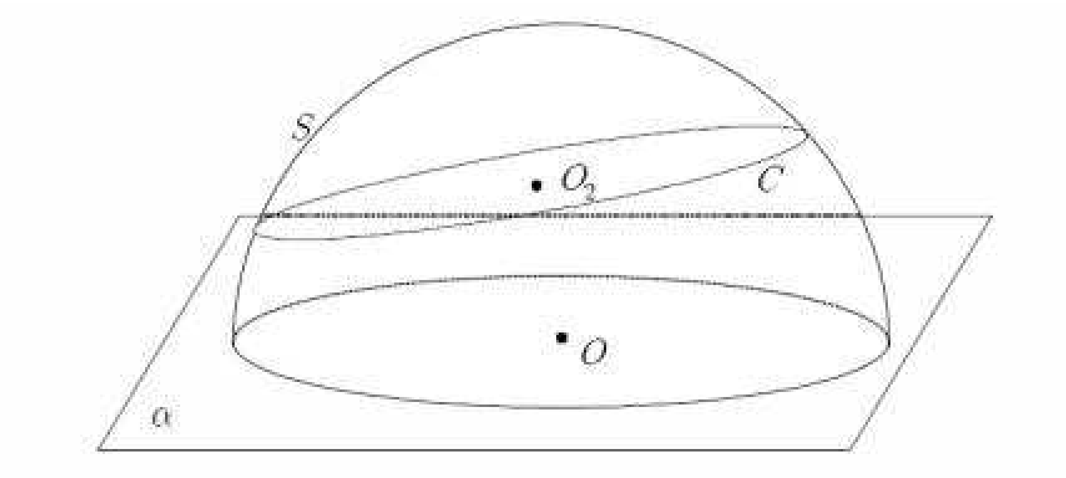
평면α 위에 반지름의 길이가 6이고 중심이 O인 반구 S와 이 반구를 자른 단면인 원C가 있다. 원C 위의 점들은 다음을 만족시킨다.

(가) 원C 위의 점P에 대해 $\overrightarrow{OP}$를 평면α에 내린 정사영의 길이의 최솟값은 $3\sqrt{2}$이다.

(나) 원C 위의 점Q, R에 대해 $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OR}$은 최솟값을 가지고,
$\left|\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}+\frac{1}{2}\overrightarrow{QR}\right|=3\sqrt{7}$

(다) 원C 위의 점A, B에 대해 $|\overrightarrow{AB}|=6\sqrt{2}$이다.

$\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\overrightarrow{OM}$이고, 점 M에서 평면 α에 내린 수선의 발을 M'이라고 할 때, $2|\overrightarrow{OM'}|^2$의 최솟값을 구하시오. [4점] (by 민호)



12.

좌표 공간 위에 점 $A(0,-2,0)$과 구 $S_1 : x^2+y^2+z^2=1$ 이 존재한다. $A(0,-2,0)$에서 구 S_1에 그은 접선과 구 S_1이 만나는 접점들의 자취를 C_1이라 하자.
A에서 S_1에 그은 접선과 접하며, 중심이 y축 위에 있고 구 S_1과 접하는 구 S_2가 있다. 접선과 S_2가 만나는 접점들의 자취를 C_2라 하자.
C_1 위의 임의의 한 점 P, C_2 위의 임의의 한 점 Q에 대해
$\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{QO}$가 최대일 때 $\overrightarrow{OP} \bullet \overrightarrow{OQ}=a$,
$\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{QO}$가 최소일 때 $\overrightarrow{OP} \bullet \overrightarrow{OQ}=b$ 이다.
$a-b$의 값은? (단, 구 S_2의 반지름은 1보다 크고, O는 원점이다.)
[4점] (by 호시긔두마리)

① $-\frac{9}{2}$　② $-\frac{3}{2}$　③ -1　④ 1　⑤ $\frac{9}{2}$

13.

실수 k에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)_k = e^{2x} - |e^x - k|$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)_k \geq f(-\ln 2)_k$이 되도록 하는 실수 k의 최댓값을 n이라 할 때, 방정식 $f(x)_n = a$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. $\dfrac{1}{a}$의 값을 구하시오. [4점]

(by 규토)

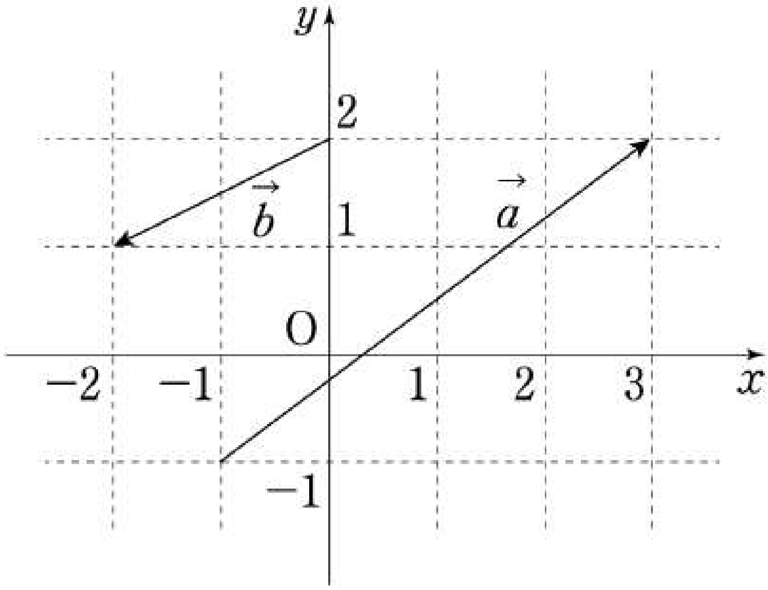
14.

좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2=1$ 위의 점 $A(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1), B, C$ 를 지나는 삼각형 ABC는 원점을 지나는 어떤 평면위로의 정사영 넓이의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 일 때,

삼각형 ABC의 평면 $x+\sqrt{3}y+z=\sqrt{3}$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 a이다. $80a^2$을 구하시오. [4점] (by 전식)

15.

좌표평면에서 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 그림과 같을 때, 서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대하여 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$이다.
어떤 실수k에 대하여 $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}$ 일 때, 삼각형BDC의 넓이는? (단, $k>0$) [4점]
(by 제헌이)



① 2　　② $\frac{5}{2}$　　③ 3　　④ $\frac{7}{2}$　　⑤ 4

16.

미분 가능한 함수 $y=f(x)$는 다음을 만족한다.

(가) $f(x)=f(-x)$
(나) $f(0)=1$, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq 2$이다.
(다) $0<x_1<x_2$인 임의의 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1)\times f'(x_2)>0$이다.
(라) $\left\{1-\dfrac{f'(x)}{2-f(x)}\right\}\left\{1+\dfrac{f'(x)}{2-f(x)}\right\}=\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

$x=0$에서 $x=t$까지 곡선 $y=f(x)$의 길이를 $l(t)$라 하면, 함수 $y=g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq l(x)) \\ l(x) & (f(x)<l(x)) \end{cases}$$

함수 $y=g(x)$의 극점이 세 개일 때, 방정식 $g(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 4인 k의 범위는 $a<k<b$이다. $4(a+b)$의 값을 구하시오. [4점] (by 곰블릭)

17.

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점 $(0,0), (\frac{1}{t}, f(\frac{1}{t})), (t, f(t))$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 $S(t)$라 할 때, 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 임의의 한 점 $(t, f(t))$에서 그은 접선의 y절편을 $g(t)$라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $\int_{\frac{1}{n}}^{n} g(t)dt = \frac{4}{3}(n+\frac{a}{n})$이다. ($a$는 상수)

(나) 모든 자연수 k에 대하여 $\int_{\frac{k}{2}}^{k} \frac{f(t)}{t^4}dt = \frac{1}{2k}$이다.

(다) $S(2) = \frac{7}{8}$, $f(2) = \frac{1}{2}$

$-\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 S'(x)dx + \int_{1}^{2} S'(\frac{1}{x})dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] (by 프로갓수생)

18.

좌표공간 위에 중심이 각각 S_1, S_2, S_3인 세 구 C_1, C_2, C_3이 있다.
구 C_1, C_2, C_3와 점 $P(2, -2, -2)$, Q는 다음을 만족한다.

(가) $C_1 : x^2+(y-4)^2+z^2=9$

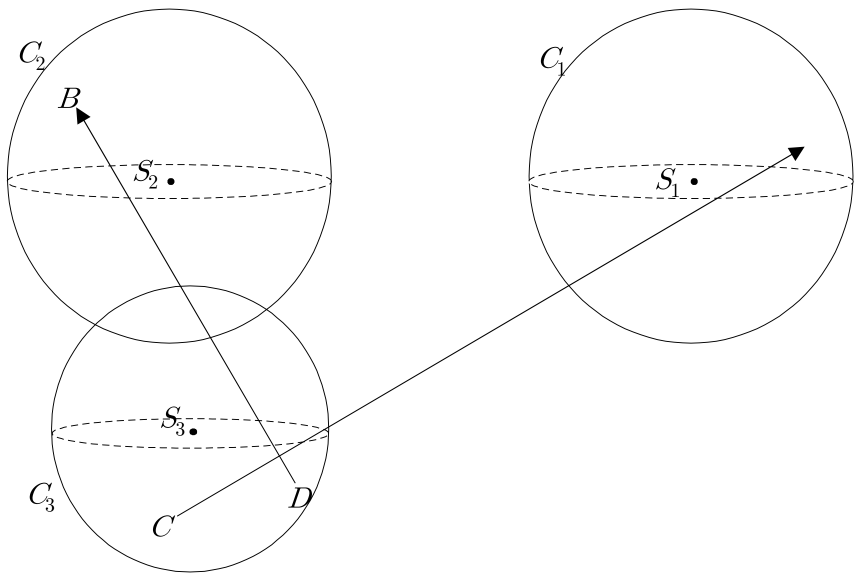
$C_2 : x^2+(y+4)^2+z^2=9$

$C_3 : (x-4)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=4$

(나) $|\overrightarrow{S_3Q}|=1$

(다) $\overrightarrow{S_3Q}$와 $\overrightarrow{S_3P}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다.

C_1 위의 점 A, C_2 위의 점 B, C_3 위의 점 C, D에 대해 $(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}) \cdot \overrightarrow{S_3Q}$의 최댓값은 $a\sqrt{3}+b\sqrt{2}+c$이다. $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 자연수) [4점] (by 민호)



19.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여 $f(x)=\int_{x}^{2x} tg'(t)dt$라 하자. 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\int_{4}^{n+1} 4^t g(2^{t-1})dt=\dfrac{2^{n+1}-16}{\ln 2}$ (n은 자연수)
>
> (나) $g(2^k)=\dfrac{1}{k+1}$ (k는 양의 홀수)
>
> (다) $f'(2^x)=f'(2^{7-x})$이고 $f(8\sqrt{2})=1$이다.

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{127}{2}} xg(2x+1)dx=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] (by 프로갓수생)

20.

사면체 ABCD가 다음 성질을 만족한다.

(가) $\angle CAE = \angle BAE = 45^\circ$

(나) $\overline{AB} = 4, \overline{AC} = 2, \overline{AE} = 5$

(다) $\overline{BC}$의 2:1 내분점D에 대하여, $\angle BAD = 30^\circ$

$\overline{AE}$위의 점X에 대해서$|3\overrightarrow{DX} + \overrightarrow{AX}|$의 최솟값을 구하시오. [4점] (by 꽖뛝뾇)