제 2 교시

수학영역(가형)

1.	②	2.	④	3.	⑤	4.	①	5.	④
6.	①	7.	③	8.	⑤	9.	④	10.	①
11.	②	12.	③	13.	③	14.	②	15.	②
16.	③	17.	④	18.	⑤	19.	①	20.	④
21.	⑤	22.	280	23.	50	24.	20	25.	16
26.	50	27.	6	28.	72	29.	29	30.	7

5지선다형

1. 답: ② [2점]

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln\sec x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan^2 x)}{x^2}\times\frac{x^2}{1-\cos x} = 1\times 2 = 2$$

따라서 구하고자 하는 값은 2가 됩니다.

2. 답: ④ [2점]

점과 평면사이의 거리공식을 이용하여

평면$\alpha : 2x+2y-z+a=0$와 점 $(3,\,2,\,1)$ 사이의 거리를 구하면

$$\frac{|6+4-1+a|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{|9+a|}{3} = 4,\ \ 9+a=\pm 12$$

따라서 $a=3$또는 -21 이므로 가능한 모든 a값의 합은 -18입니다.

또한 $|a+9|=12$를 "수직선상에서 a와 -9사이의 거리가 12이다"로 해석한다면 대칭성을 이용해서 두 값의 합이 중심의 두배인 -18임을 알수도 있습니다.

3. 답: ⑤ [2점]

$l=r\theta$이므로 구하고자 하는 반지름의 길이는 5입니다.

4. 답: ① [2점]

서로 독립인 두 사건 A, B는 다음이 성립합니다.

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(A),\ \ \mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

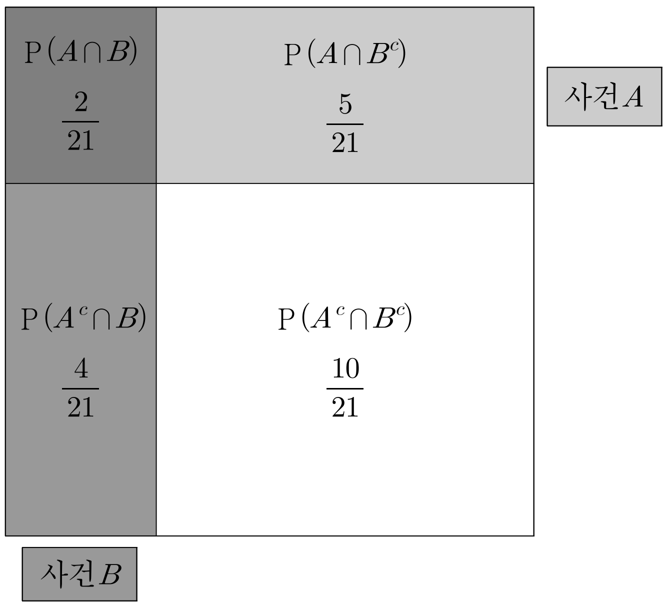
주어진 조건을 활용하면

$\mathrm{P}(A\cup B) - \mathrm{P}(A\cap B^c) = \mathrm{P}(B) = \frac{2}{7}$이고 $\mathrm{P}(B^c) = \frac{5}{7}$이므로

$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3}$입니다.

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \frac{2}{21}$입니다.

※비록 이 문제는 집합(사건)의 연산으로부터 간단하게 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$를 구할 수 있습니다만 보통 저는 독립사건의 확률 연산 문제를 풀 때 계산실수를 줄이고 빠르게 풀기위하여 다음과 같은 방법을 활용합니다.



이 직사각형을 U라고 하고 U직사각형의 넓이는 1이며 확률은 넓이에 치환된다고 합시다. A, B의 집합은 각각 위쪽 색칠된 부분(가로 변 한 개를 포함하는 직사각형)과 왼쪽 색칠된 부분(세로 변 한 개를 포함하는 직사각형) 이라고 볼 수 있습니다.

결국 다른 사건에 관계없이(독립사건의 성질) 해당 확률의 변 길이의 비에 따라 넓이, 즉 확률이 정해집니다. 직사각형의 성질을 이용한 이 방법은 보다 직관적으로 확률을 계산할 수 있습니다.

또한 세 사건 A,B,C 에 대하여 성립한다면 공간에 대하여 같은 방법을 사용할 수 도 있습니다. (그러나 세 사건에 대하여 쓰는 경우, 각각의 사건이 서로 독립인지 여부를 꼭 확인해야합니다. 그리고 사건을 3개씩이나 독립으로 설정한 문제가 나올 리가 만무합니다.)

5. 답: ④ [3점]

“VeryVary”는 a,e,r,r,y,y,V,V 8개의 알파벳으로 이루어져 있습니다.
이 중 두 개의 V는 양 끝에 고정되어 있고 a,e를 제외한 나머지 r과 y는 두 개씩 있으므로 두 V사이에 a,e,r,r,y,y를 나열 하는 가짓수는 $\frac{6!}{1!\times 1!\times 2!\times 2!}=180$가지가 됩니다.

6. 답: ① [3점]

“$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}$”로부터 구분구적으로 표현된 식을 정적분으로 바꿔 해결해야 함을 감지한다면, $\frac{e-1}{n}k$로부터 $e-1$길이의 구간을 n등분함을 알 수 있습니다.
분모, 분자에 $\frac{1}{n}$을 곱하면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(e-1)\ln(1+\frac{e-1}{n}k)}{n+(e-1)k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(1+\frac{e-1}{n}k)}{1+\frac{e-1}{n}k}\times\frac{e-1}{n}$$

$=\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}dx=\int_{0}^{1}t\,dt=\frac{1}{2}$입니다.

따라서 구하고자하는 값은 $\frac{1}{2}$입니다.

7. 답: ③ [3점]

$\alpha: 2\sqrt{2}x+y+\sqrt{7}z+3=0,\ \beta: \sqrt{2}x-4y-\sqrt{7}z+1=0$ 두 평면의 법선벡터는 각각 $(2\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{7})$, $(\sqrt{2},\ -4,\ -\sqrt{7})$입니다.
두 평면사이의 이면각의 크기는 두 평면의 법선벡터가 이루는 각의 크기와 같습니다.
내적을 활용하면

$$\frac{(2\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{7})\cdot(\sqrt{2},\ -4,\ -\sqrt{7})}{|(2\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{7})||(\sqrt{2},\ -4,\ -\sqrt{7})|}=\frac{-7}{20}$$

따라서 예각인 이면각의 코사인 값은 $\frac{7}{20}$입니다.

8. 답: ⑤ [3점]

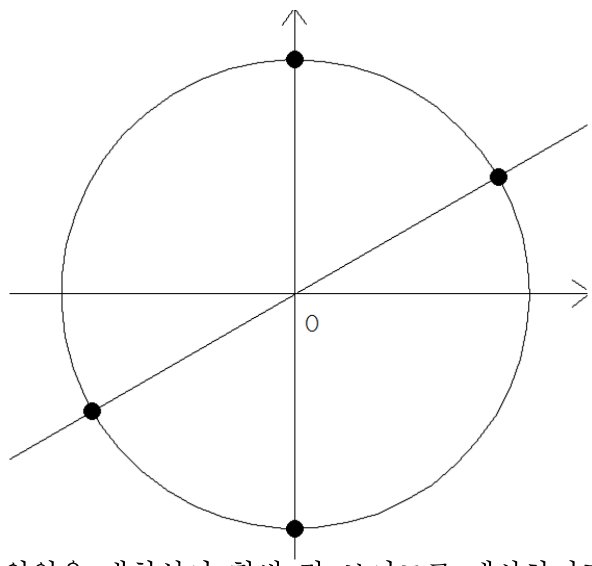
$\sqrt{3}\cos^2 x-3\sin x\cos x=\sqrt{3}\cos x(\cos x-\sqrt{3}\sin x)=0$이므로
$\cos x=0$이거나 $\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$입니다
.

1) $\cos x=0$이면 $0\le x<2\pi$이므로 $x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$입니다.

2) $\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$이면서 $\cos x=0$일 수 는 없으므로 이 식과 $\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$은 동치입니다. $0\le x<2\pi$이므로 $x=\frac{\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6}$입니다.

따라서 $f(x)=0$을 만족하는 모든 x값의 합은 $\frac{10\pi}{3}$입니다.

※ 실전에서 이런 문제를 풀 때 많은 분들이 $y=\cos x$나 $y=\tan x$의 그래프를 그리곤 합니다. 그러나 이런 문제를 접근할 때 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$가 단위원에서 갖는 의미에 주목한다면 훨씬 수월하게 풀 수 있습니다.
가령 $\cos x=a,\ \sin x=b$라 한다면 ab좌표평면에서 $a^2+b^2=1$이고, 이 문제의 해는
a값이 0인 점들의 동경과, 단위원이 기울기가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$인 직선 $b=\frac{1}{\sqrt{3}}a$과 만나는 교점들의 동경의 합입니다.



단위원은 대칭성이 훨씬 잘 보이므로 계산하기도 편합니다.

9. 답: ④ [3점]

경우를 일일이 나열하여 푸는 방법도 있지만 단순하게 생각하면
“원탁에 다섯 명이 위치하는 것”은 회전하여 겹치는 경우가 생기지만 “다섯 명의 사람이 서있거나 앉아있는 것”은 회전하는 것과 관련이 없습니다.
그러므로 구하고자하는 경우의 수는
$\frac{5!}{5}\times{}_2\Pi_5=24\times 32=768$가지입니다.

10. 답: ① [3점]

$\log_3(x-6)<\log_9(2x+3)$의 진수 조건으로 $x>6$임을 우선 알 수 있습니다.
밑을 통일해주면 $\log_9(x-6)^2<\log_9(2x+3)$, 밑이 1보다 크므로
$x^2-12x+36<2x+3,\ x^2-14x+33=(x-3)(x-11)<0$
$3<x<11$입니다. 진수 조건을 만족시켜야 하므로
$6<x<11$에 포함된 정수 x는 $7,8,9,10$ 네 개입니다.

11. 답: ② [3점]

$l: \frac{x-1}{4}=\frac{y}{3}$의 방향벡터는 $(4,\ 3)$, $m: 12x+5y=7$의 법선벡터는 $(12,\ 5)$입니다.
두 직선 사이의 예각의 크기를 θ라 했으므로 l의 방향벡터와 m의 법선벡터가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$입니다.

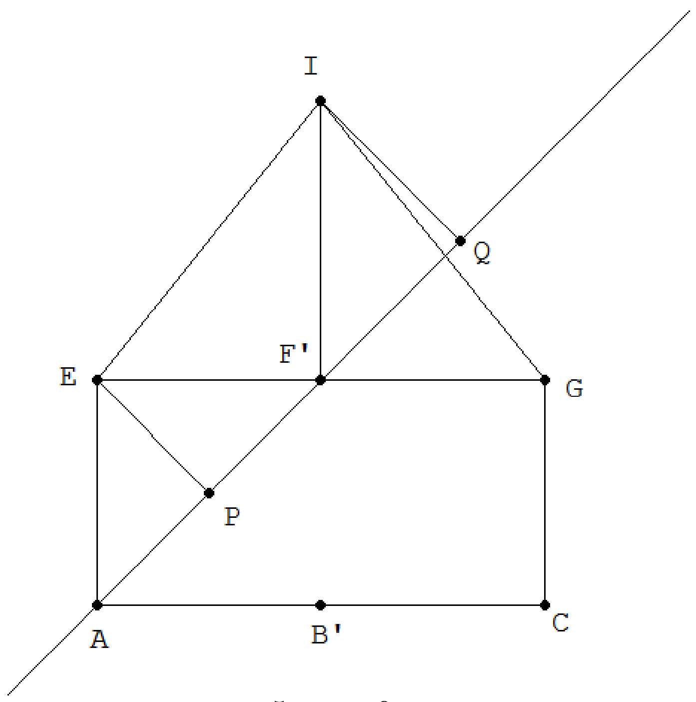
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{(4,\ 3)\cdot(12,\ 5)}{|(4,\ 3)||(12,\ 5)|}=\frac{63}{65}=\frac{p}{q}$

따라서 $q-p$의 값은 2입니다.

※ 7번 문제와 유사한 풀이를 갖는 이 문제를 굳이 넣은 이유는 "바뀐 교육과정에서 새롭게 강조하는 평면벡터 또한 공간벡터의 일반적 성질과 다르지 않다."를 피력하기 위함입니다.

12. 답: ③ [3점]

점 A,C,G,I,E는 한 평면위에 있고 이 평면은 삼각형 AFH와 수직입니다. 따라서 점 I, E를 정사영 시킨 점을 각각 P, Q라고 한다면 점 P, Q는 점 A,C,G,I,E를 포함하는 평면과 삼각형 AFH를 포함하는 평면의 교선 위에 있습니다.
점 F, H의 중점을 F′, 점 B, D의 중점을 B′이라 하면 다음과 같이 한 평면위에 나타낼 수 있습니다.



$\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이는 $2\sqrt{2}+\frac{5}{2}\sqrt{2}=\frac{9}{2}\sqrt{2}$이며 $\overline{\mathrm{AF'}}$의 길이는 4이므로 구하고자하는 삼각형의 넓이는 $9\sqrt{2}$입니다.

13. 답: ③ [3점]

주사위를 던지는 사건과 동전을 던지는 사건은 서로 독립이며 각각의 시행 또한 독립입니다. 즉 주사위를 던져 특정 눈의 수가 나오는 확률은 $\frac{1}{6}$, 동전의 앞면 개수가 k개일 확률은

${}_3\mathrm{C}_k\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{3-k}$ 입니다.

주사위로부터 나올 수 있는 값은 1부터 6, 동전의 앞면 개수는 0개부터 3개가 가능하므로 둘을 합쳐 5를 만드는 순서쌍은 (주사위 눈의 값, 동전의 앞면 개수)=$(5,\ 0), (4,\ 1), (3,\ 2), (2,\ 3)$ 4개뿐입니다.

1) $(5,\ 0)$인 경우 : $\frac{1}{6}\times{}_3\mathrm{C}_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3$

2) $(4,\ 1)$인 경우 : $\frac{1}{6}\times{}_3\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2$

3) $(3,\ 2)$인 경우 : $\frac{1}{6}\times{}_3\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1$

4) $(2,\ 3)$인 경우 : $\frac{1}{6}\times{}_3\mathrm{C}_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0$

독립시행의 확률의 연산을 이용하여 1),2),3),4)경우의 확률을 합하면

$\frac{1}{6}\times\sum_{k=0}^{3}{}_3\mathrm{C}_k\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{3-k}=\frac{1}{6}$입니다.

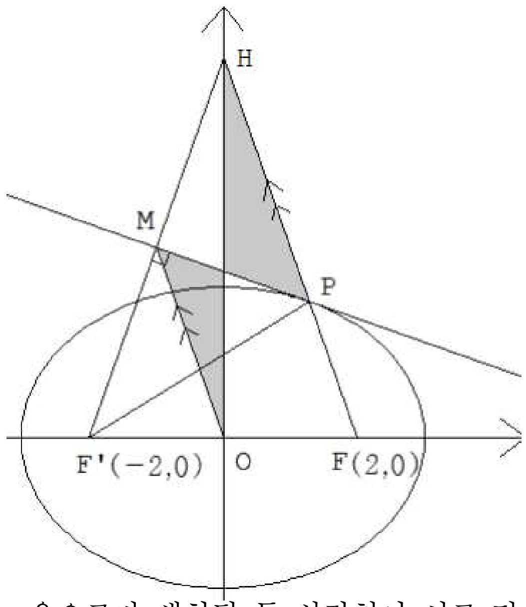
※ 그럼 합이 5가 아닌 경우는 어떻게 될까요? "주사위의 눈의 값+동전의 앞면 개수$=X$"로 확률 변수 X를 정의한다면 역시 마찬가지 방법으로 구할 수 있습니다.
동전의 앞면 개수가 0부터 3까지 모두 나올 수 있는 $X=4,5,6$은 $\frac{1}{6}$의 확률에 대응됩니다. 그러나 모두 나올 수는 없는 $X=1,2,3,7,8,9$는 $\frac{1}{6}$이 아닌 값이 나오게 되죠. 또한 $X=1,2,3$과 $X=9,8,7$의 확률은 이항계수의 대칭성에 의해 각각 같습니다.
확률분포표를 작성하면 다음과 같습니다.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{48}$	1

14. 답: ② [4점]

주어진 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$입니다.

$\overline{\mathrm{PM}}$을 대변으로 하고 대응하는 '직각이 아닌 각'이 같은 삼각형 PHM과 PF′M은 서로 합동입니다. 그러므로 $\overline{\mathrm{HP}}$와 $\overline{\mathrm{PF'}}$의 길이는 같습니다.
타원의 장축의 길이는 6이므로 $\overline{\mathrm{HF}}=6$이며 피타고라스의 정리에 의해 점 H의 y좌표 값은 $4\sqrt{2}$가 됩니다.
점 M과 원점 O가 각각 $\overline{\mathrm{F'H}}$, $\overline{\mathrm{F'F}}$의 중점인 것에 주목하면, 중점연결정리에 의하여 다음과 같이 보조선 $\overline{\mathrm{OM}}$을 그릴 수 있습니다.



보조선을 그음으로써 색칠된 두 삼각형이 서로 닮음임이 보이게 되고 선분 HP가 선분 OM에 대응됨을 알 수 있습니다.
위에서 구한 길이들로 $\angle \mathrm{OHF}'$의 삼각비를 이용하여 "$\overline{\mathrm{PM}}$과 y축의 교점으로부터 점 H와의 거리"와 "그 길이의 $\overline{\mathrm{OH}}$에 대한 비율"을 구하면

$3\sec\angle\mathrm{OHF}' = 3\times\dfrac{6}{4\sqrt{2}} = \dfrac{9\sqrt{2}}{4} = \dfrac{9}{16}\overline{\mathrm{OH}}$입니다.

이 결과와 중점연결정리를 동시에 활용하면
$\overline{\mathrm{OM}}:\overline{\mathrm{HP}}:\overline{\mathrm{PF}} = 7:9:5$이고, 구하고자 하는 선분 PF의 길이는 $\dfrac{15}{7}$입니다.

15. 답: ② [4점]

$t>0$일 때 $x(t)=(t-1)e^t$는 일대일 대응 함수이므로 x값에 대하여 t값을 하나로 특정할 수 있습니다. 그러므로 $x=e^2$일 때 $t=2$입니다.

$\dfrac{dx}{dt}=te^t$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2\ln t}{t}$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\ln t}{t^2e^t}$입니다.

따라서 $t=2$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은 $\dfrac{\ln 2}{2e^2}$입니다.

※일반적으로 $x(t)$, $y(t)$가 주어진 매개변수로 표현된 식의 경우 주어진 t의 값에서 미분계수를 구할 때 $x(t)$가 t에 대하여 일대일 대응인지, 혹은 y와 x가 함수 관계(하나의 x는 오직 하나의 y에 대응됨) 인지는 중요하지 않습니다.
가령 $x(\theta)=\cos\theta$, $y(\theta)=\sin\theta$로 표현된 원의 방정식을 살펴보면 그러하다는 것을 쉽게 알 수 있죠.

그렇지만 이문제의 경우 "함수 $y=f(x)$임"과 "$x=e^2$에서 미분계수를 구함"이라는 조건은 각각 "하나의 x는 여러 개의 y에 대응될 수 없음"과 "x값은 오직 한 개의 t와 대응됨"을 함축하고 있는 것입니다.
그러므로 "$x=e^2$일 때 $t=2$이므로 t가 2일 때의 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하면 된다."라는 논리가 적용 되는 것이죠.

16. 답: ③ [4점]

a는 구별되지 않는 세 개의 플라스틱 통에 구별되지 않는 별사탕 8개를 담는 방법의 수입니다.
이는 "$x\le y\le z$인 1이상의 자연수 x, y, z에 대하여 $x+y+z=8$의 순서쌍의 개수"와 동치이고 이를 간단히 표현하면 p(8, 5), 즉 자연수 8을 3개의 자연수로 분할하는 경우의 수와 같습니다.
$8=1+1+6=1+2+5=1+3+3=2+2+4=2+3+3$이므로
$a=\mathrm{p}(8,\ 5)=5$입니다.

b는 이렇게 별사탕을 담은 플라스틱 통을 A, B, C세 사람에게 나눠주는 경우의 수입니다.
이를 자연수가 분할된 각각의 경우에 따라 직접 계산할 수도 있지만, 조금만 생각해 본다면 구별되는 세 사람에게 나눠 줌으로써 구별되는 플라스틱 통이 되었음을 감지할 수 있고 결국 b는 "자연수 x, y, z에 대하여 $x+y+z=8$의 순서쌍의 개수"와 동치이므로
$b={}_3\mathrm{H}_5=21$입니다.
따라서 구하고자 하는 $b-a$의 값은 16입니다.

※2017학년도 대학수학능력시험부터 새롭게 교육과정에 포함된 자연수의 분할과 기존의 중복조합을 비교한 문제입니다.

17. 답: ④ [4점]

ㄱ. $f(x)=(e^x-\alpha)(e^x-\beta)(e^x-\gamma)$을 미분할 때 '곱의 미분'꼴로 여기어 미분을 한다면,
$f'(x)=(e^x-\alpha)(e^x-\beta)e^x+(e^x-\beta)(e^x-\gamma)e^x+(e^x-\alpha)(e^x-\gamma)e^x$
로 정리할 수 있고, x에 $\ln\alpha, \ln\beta, \ln\gamma$를 각각 대입해보면
$f'(\ln\alpha)=\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$
$f'(\ln\beta)=\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)$
$f'(\ln\gamma)=\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$
임을 알 수 있습니다.
따라서 ㄱ선지는 참입니다.

ㄴ. $\dfrac{\alpha}{f'(\ln\alpha)}+\dfrac{\beta}{f'(\ln\beta)}+\dfrac{\gamma}{f'(\ln\gamma)}$를 구하기 위해 각각을 구해본다면,

$$\frac{\alpha}{f'(\ln\alpha)}=\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=\frac{\gamma-\beta}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$$
$$\frac{\beta}{f'(\ln\beta)}=\frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}=\frac{\alpha-\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$$
$$\frac{\gamma}{f'(\ln\gamma)}=\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=\frac{\beta-\alpha}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$$

따라서 위의 세 식을 합하면 0이 됩니다.

그러나 ㄴ선지는 거짓입니다. 그 이유는 α, β, γ중 어느 두 개라도

서로 같다면 위의 세 식이 모두 참이라고 할 수 없기 때문입니다.
가령 $\alpha=\beta$라 하면 $\frac{\alpha}{f'(\ln\alpha)}$, $\frac{\beta}{f'(\ln\beta)}$이 두 개는 정의되지 않습니다.
따라서 ㄴ선지는 거짓입니다.

ㄷ. $\alpha=\beta\neq\gamma$이면 $f'(\ln\alpha)=0$이고 $x=\ln\alpha$ 좌우의 미분계수의 부호가 다르므로 $x=\ln\alpha$에서 $y=f(x)$는 극값을 갖게 됩니다.
$f(\ln\alpha)=0$이므로 모든 극값의 곱은 0이 됩니다.
따라서 ㄷ선지는 참입니다.

※이 문제의 모티브는 사실 삼차함수의 성질입니다.
$f(x)=k(x-a)(x-b)(x-c)$일 때
$f'(a)=k(a-b)(a-c)$
$f'(b)=k(b-a)(b-c)$
$f'(c)=k(c-a)(c-b)$
이고 $a\neq b\neq c$일 경우, 즉 서로 다른 세 실근을 가질 경우,
$\frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{f'(b)}+\frac{1}{f'(c)}=0$
이 된다는 성질을 제가 고등학교 3학년 당시에 배웠습니다. 꽤나 매력적인 성질이라고 생각했지만 문제화된 적이 거의 없다는 사실이 매우 안타까웠습니다. 그래서 직접 문제화 시켜봤습니다.

18. [4점]

"2017학년도 6월 수능 모의평가 국어영역에서 출제된 중세국어 문제 두 문항 중 한 문항이라도 틀린 응시자의 비율은 40%라고 한다." 라는 진술은 모집단을 조사한 결과 산출된 '국어영역 응시자가 중세국어 두 문항중 하나라도 틀렸을 통계적 확률이 $\frac{2}{5}$이다.'라고 해석할 수 있습니다.
즉 개개인(원소)의 실제 오답여부가 어떻건 "600명의 A고등학교 3학년학생"이라는 집단은 모집단의 부분집단이며 위의 성질(국어영역 응시자가 중세국어 두 문항중 하나라도 틀렸을 통계적 확률이 $\frac{2}{5}$이다.)을 갖고 있다고 가정할 수 있습니다.
중세국어 두 문항 중 한 문항이라도 틀린 A고등학교의 학생의 수를 확률 변수 X라 하면,
$X\sim \mathrm{B}\left(600,\ \frac{2}{5}\right)$입니다.
이항분포의 성질을 이용하면
$\mathrm{E}(X)=240$, $\mathrm{V}(X)=144$, $\sigma(X)=12$입니다.

600명의 집단은 충분히 큰 수로 볼 수 있으므로, n이 충분히 큰 이항분포는 정규분포에 근사할 수 있다는 성질을 이용하면
$X\simeq \mathrm{N}(240,\ 12^2)$이라고 할 수 있습니다.
$\mathrm{P}(225\leq X\leq 261)$을 표준화 하면 $\mathrm{P}(-1.25\leq Z\leq 1.75)$이므로 구하고자 하는 확률은 $0.394+0.460=0.854$입니다.

19. 답: ① [4점]

$g(x)=\int_0^x \sqrt{f(t)}\,dt-4$ 은 연속함수 $y=\sqrt{f(x)}$가 정적분 된 꼴이므로 미분 가능한 함수이며 $g'(x)=\sqrt{f(x)}$ 입니다.
$f(x)=\{g'(x)\}^2$이고 f는 미분 가능하므로
$f'(x)=2g'(x)g''(x)$입니다.
그럼 조건 $g'(x)\{2g''(x)-g'(x)\}=2xe^x$는
$f'(x)-f(x)=2xe^x$로 손쉽게 바뀌며
양변을 e^x로 나누면 $\frac{f'(x)}{e^x}-\frac{f(x)}{e^x}=2x$가 됩니다.
여기서부터 $f(x)$를 구하는 두 가지 풀이가 가능합니다.

1) $\frac{f'(x)}{e^x}-\frac{f(x)}{e^x}=2x$의 양변을 적분하면 (적분상수는 모두 C로 통일했습니다.)
$\int\frac{f'(x)}{e^x}dx-\int\frac{f(x)}{e^x}dx=x^2+C$입니다.
$\int\frac{f'(x)}{e^x}dx=\frac{f(x)}{e^x}-\left\{\int-\frac{f(x)}{e^x}dx\right\}+C=\frac{f(x)}{e^x}+\int\frac{f(x)}{e^x}dx+C$
이므로
$\int\frac{f(x)}{e^x}dx$가 사라지게 되고
$\frac{f(x)}{e^x}=x^2+C$, $f(0)=0$이므로 $f(x)=x^2e^x$입니다.

2) $\frac{f'(x)}{e^x}-\frac{f(x)}{e^x}=2x$의 좌변 분모 분자에 e^x를 곱하면
$\frac{e^xf'(x)-e^xf(x)}{(e^x)^2}=2x$이고 좌변의 모양에 주목하면 $\frac{f(x)}{e^x}$를 몫의 미분한 꼴임을 알 수 있습니다. 즉 위 1)의 부분적분과정 없이
$\frac{f(x)}{e^x}=x^2+C$에 도달하게 되고 마찬가지로 $f(x)=x^2e^x$입니다.

위의 결과를 이용하면 $g'(x)=\sqrt{f(x)}=xe^{\frac{1}{2}x}$ 입니다.
$\int_1^4\frac{g(2x)}{e^x}dx$를 구해야 하므로 $g'(2x)$를 적분하면
$\int_0^x g'(2t)dt=\frac{1}{2}g(2x)-\frac{1}{2}g(0)=2\int_0^x te^t dt=2(x-1)e^x+2$,
$g(0)=\int_0^0\sqrt{f(x)}\,dx-4=-4$이므로 $g(2x)=4(x-1)e^x$입니다.
$\int_1^4\frac{g(2x)}{e^x}dx=4\int_1^4(x-1)dx=4\int_0^3 x\,dx=4\times\frac{9}{2}=18$
따라서 구하고자 하는 값은 18입니다.

※도함수와 원함수가 하나의 등식에 동시에 존재하는 상황을 교과과정 내에서 해결하기 위해서는 특별한 장치가 마련되어 있어야 합니다.
다음은 그 특별한 장치의 예입니다.

1) 흔히 쓰이는 것

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=h(x)$: $\ln|f(x)|$

$f(x)f'(x)=h(x)$: 2를 곱하여 $\{f(x)\}^2$

2)종종 볼 수 있는 것

$xf'(x)+f(x)=h(x)$: $xf(x)$

$xf'(x)-f(x)=h(x)$: x^2으로 나누어 $\dfrac{f(x)}{x}$

$f(x)+f'(x)=h(x)$: e^x를 곱하여 $e^x f(x)$

$f'(x)-f(x)=h(x)$: e^x로 나누고 분모분자에 e^x를 곱하여 $\dfrac{f(x)}{e^2}$

"e^x로 나누어 f를 구하자."는 다분히 발상적인 생각이지만 여러 시행착오를 통해 $\dfrac{f'(x)}{e^x}-\dfrac{f(x)}{e^x}=2x$를 만들어보는 시도정도는 할 수 있어야 합니다.

또한 이 문제의 본래 의도는 2)의 풀이입니다. 비록 2)의 풀이는 생각해내기 쉽지 않지만 이 방법으로 이 문제를 대하는 것은 15학년도 9월 모의평가 B형 30번처럼 약간의 발상의 전환으로 "익숙한 발상의 역과정"을 발견하는 것입니다.
15학년도 9월 모의평가 B형 30번에서
$\displaystyle\int \frac{f(x+1)}{x+1}-\frac{f(x)}{x}dx=\int_x^{x+1}\frac{f(t)}{t}dt+C$의 발상은 이제는 너무나도 자연스러워졌지만, 당시에 이 문제를 못 푼 학생(저라든지)에게는 꽤나 충격이었습니다. 누구나 $\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{f(t)}{t}dt$를 미분하면 $\dfrac{f(x+1)}{x+1}-\dfrac{f(x)}{x}$이 된다는 것은 알고 있었으니까요.

그리고 많은 수험생들이 $f'(x)+f(x)$의 꼴이 나오면 e^x를 곱하여 적분하는 것이 편하다는 것은 이미 알고 있습니다. 그러나 몫의 미분의 꼴에는 익숙하지 않다는 것을 알고 이를 문제화 해봤습니다만 이를 발견하지 못하더라도 1)의 풀이로 풀릴 수 있도록 하였습니다.

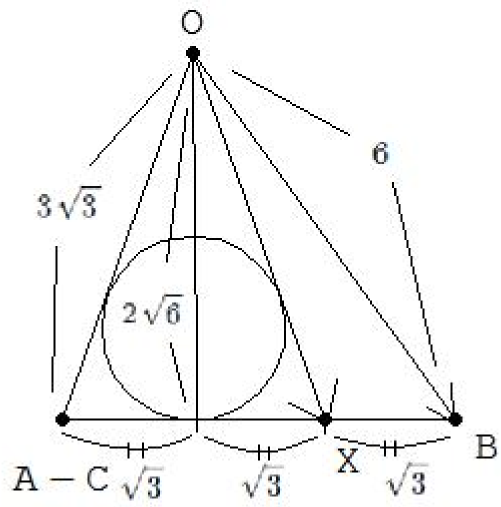
부끄럽지만 저 또한 이런 발상을 스스로 할 수 있었던 건 아닙니다. 그러나 17번과 같이 '매력적인 원리이나 잘 문제화 되지 않아 안타까운 원리'를 문제화해보고 싶었습니다.

20. 답: ④ [4점]

어떤 구 밖의 한 점 P가 구의 중심을 지나는 직선 l위에 있다고 하면 점 P에서 구에 그은 임의의 접선이 l과 수직인 임의의 평면과 만나는 교점의 자취는 원입니다.

이를 문제에 활용하면, 점 X의 자취는 원이 됩니다. 구는 정사면체 OABC의 네 면과 접하므로, 점 O와 삼각형 OAB, OBC, OCA와 구가 접하는 점을 이은 점은 각각 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$의 중점을 지나게 됩니다. 이 세 점을 포함하는 원은 정삼각형 ABC의 내접원이 되고 이는 점 X의 자취입니다.

이 원의 반지름은 $\sqrt{3}$이며 내적 값이 최대가 되는, 즉 $\overrightarrow{OX}$와 $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각이 최소가 되는 상황을 표현하자면 다음과 같습니다.



점 O에서 $\overline{AC}$에 내린 수선과 구의 반지름을 이용하여 정사면체의 높이를 구하면 $2\sqrt{6}$입니다.

이제 내적 값을 구하는 과정이 남았는데 여기서부터 다양한 풀이가 존재합니다.

1) 탄젠트의 합차공식을 이용하여 $\tan\angle\mathrm{XOB}$를 구하면

$$\tan\angle\mathrm{XOB}=\frac{\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}}{1+\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}}=\frac{\sqrt{2}}{5},\ \cos\angle\mathrm{XOB}=\frac{5}{9}\sqrt{3}$$

$\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OB}=3\sqrt{3}\times6\times\dfrac{5}{9}\sqrt{3}=30$입니다.

이외에 다른 삼각함수의 합차공식을 이용한 풀이 또한 큰 차이가 없는 풀이입니다.

2) 평면상에서 좌표계를 임의로 설정 하여 벡터의 성분계산으로 구하는 방법이 가능합니다.
위 그림에 표현한 '점 O, B, 내적이 최대가 되는 X를 포함한 평면'과 '정삼각형 ABC를 포함하는 평면'이 이루는 교선 의 단위 방향벡터를 (1, 0)이라하고 점 O에서 정삼각형 ABC에 내린 수선의 단위 방향벡터를 (0, 1)라 하면
$\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OB}=(\sqrt{3},\ 2\sqrt{6})\cdot(2\sqrt{3},\ 2\sqrt{6})=30$입니다.

3) 벡터 $\overrightarrow{XB}$의 크기는 $\sqrt{3}$입니다. 다음과 같이 차벡터의 크기의 제곱으로 구하는 방법이 가능합니다.
$|\overrightarrow{XB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OX}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OX}|^2-2\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OB}$,

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OX} = \dfrac{|\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OX}|^2 - |\overrightarrow{BX}|^2}{2} = \dfrac{36+27-3}{2} = 30$입니다.

※작년까지는 시점이 같은 두 벡터에 대하여 제2코사인법칙을 이용하여 내적 값을 계산할 수 있던 공식

$\dfrac{|\text{벡터1}|^2 + |\text{벡터2}|^2 - |\text{두벡터의종점사이의거리}|^2}{2}$

은 3)과 같은 방식으로도 증명할 수 있으므로 사용하는데 전혀 무리가 없습니다.

21. 답: ⑤ [4점]

주어진 조건에 따르면 주사위를 던져 나오는 숫자에 따라 결정된 확률 변수X, Y는 $X \sim \mathrm{N}(a,\ \sigma^2)$, $Y \sim \mathrm{N}(b,\ \sigma^2)$입니다.

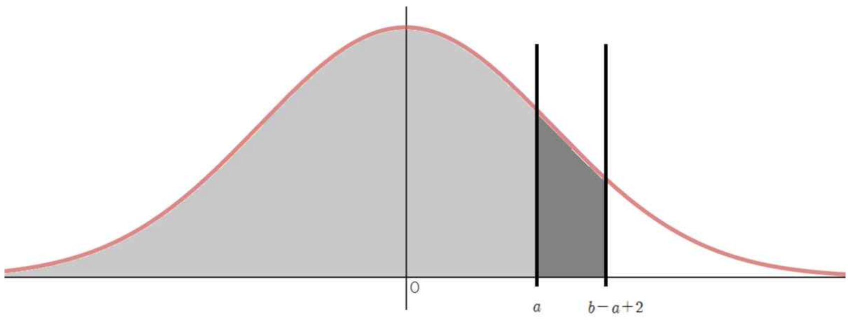
$\mathrm{P}(X \le 2a) \le \mathrm{P}(Y \ge a-2)$는

$\mathrm{P}(X-a \le a) \le \mathrm{P}(Y-b \ge a-b-2)$입니다.

$X-a \sim \mathrm{N}(0,\ \sigma^2)$, $Y-b \sim \mathrm{N}(0,\ \sigma^2)$이므로

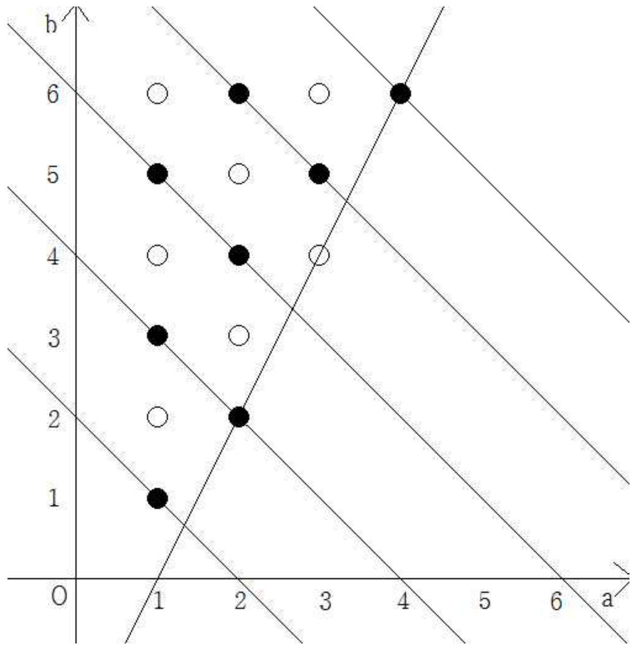
$\mathrm{P}(X-a \le a) \le \mathrm{P}(Y-b \le b-a+2)$입니다.

위의 식 정리를 통해 $\mathrm{P}(X \le 2a) \le \mathrm{P}(Y \ge a-2)$는 $a \le b-a+2$, $2a-2 \le b$와 동치임을 아래 정규분포의 확률밀도함수의 성질을 통해 알 수 있습니다.



주사위를 두 번 던져 나온 눈의 수로 이루어진 하나의 순서쌍 $(a,\ b)$는 확률이 $\dfrac{1}{36}$로 같습니다.

그러므로 주어진 조건을 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수의 비율이 곧 구하고자 하는 확률입니다. ab좌표평면상에 이 순서쌍을 나타내보면



위에 표시된 15개의 점들이 곧 $\mathrm{P}(X \le 2a) \le \mathrm{P}(Y \ge a-2)$를 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$입니다.

이때 $\mathrm{P}(X \le 2a) \le \mathrm{P}(Y \ge a-2)$를 만족하는 점 중에서 직선 $a+b=2k\,(k=1, 2, 3, 4, 5)$위에 있는 점은 위 그래프 상에 "검은 점"으로 표시된 8개입니다.

따라서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{\frac{8}{36}}{\frac{15}{36}} = \dfrac{8}{15}$입니다.

단답형

22. 답: 280 [3점]

주어진 식은

$(2x^2 - \dfrac{1}{x})^7 = \displaystyle\sum_{k=0}^{7} {}_7\mathrm{C}_k (2x^2)^k \left(-\dfrac{1}{x}\right)^{7-k}$로 표현할 수 있고

$k=3$일 때 x의 차수는 2입니다.

따라서 x^2의 계수는 ${}_7\mathrm{C}_3(2)^3(-1)^4 = 35 \times 8 = 280$입니다.

23. 답: 50 [3점]

$\vec{a} = (2,\ 1)$, $\vec{b} = (-3,\ 1)$이므로 $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b} = (7,\ 1)$입니다.

따라서 $|\vec{c}|^2$은 50입니다.

24. 답: 20 [3점]

$a\cos 2x + b\sin 3x$에 $\dfrac{\pi}{6}$를 대입하면

$a\cos\dfrac{\pi}{3} + b\sin\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{a}{2} + b = 4$, $a+2b=8$입니다.

$f'(x) = -2a\sin 2x + 3b\cos 3x$이므로 π를 대입하면

$-2a\sin 2\pi + 3b\cos 3\pi = -3b = 36$, $b=-12$입니다.

따라서$a=32$이고 $a+b=20$입니다.

※삼각함수를 이용한 연립1차방정식의 풀이로, 계산량이 많았던 17학년도 6월 평가원 가형 30번 문제를 쉬운 형태로 반영했습니다.

25. 답: 16 [3점]

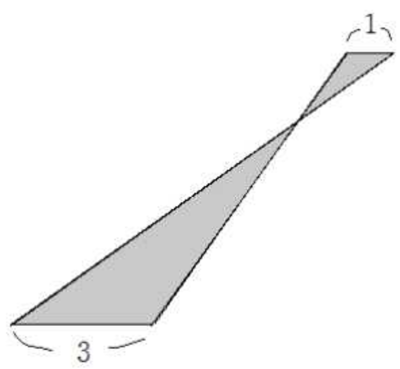
$\displaystyle\lim_{x \to 3} \dfrac{f(x)-2}{x-3} = 1$을 통하여 $f(3)=2$, $f'(3)=1$임을 알 수 있고

$\lim_{x\to0}\frac{2x}{f(x)-1}=8$를 통하여 $f(0)=1,\ f'(0)=\frac{1}{4}$임을 알 수 있습니다.
$(f\circ g)(x)=x,\ f'(g(x))\times g'(x)=1$이므로
$g(2)=3,\ g'(2)=1,\ g(1)=0,\ g'(1)=4$입니다.
$\lim_{x\to2}\frac{4g(x-1)}{g(x)-3}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{g(x)-3}\times\frac{g(x-1)}{x-2}\times4=\frac{4g'(1)}{g'(2)}=16$
따라서 구하고자 하는 값은 16입니다.

26. 답: 50 [4점]

점 B의 x좌표를 구하기 위하여 직선 AF의 방정식을 구하면
$\frac{x-2}{4}=\frac{y}{4\sqrt{2}},\ y=2\sqrt{2}(x-2)$, 포물선의 방정식과 연립하면
$y^2=8x=8(x-2)^2,\ (x-1)(x-4)=0$이고 점 B, C의 x좌표는 1입니다.
점 A에서의 접선의 방정식은 $4\sqrt{2}y=4(x+4)$,
점 C에서의 접선의 방정식은 $2\sqrt{2}y=4(x+1)$입니다.

각각의 x절편은 $-4,\ -1$이고 C에서의 접선이 $\overline{\mathrm{AH}}$와 만나는 점의 x좌표는 3입니다.
색칠된 영역을 간단하게 나타내면

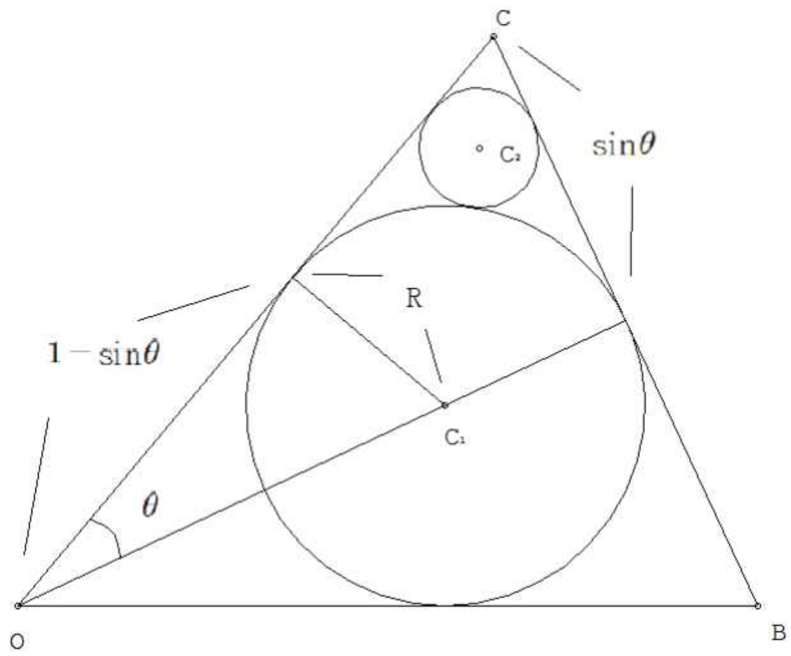


이러한 모양이 됩니다.
닮음에 의하여 교차하는 두 접선으로부터 생기는 큰 삼각형의 높이는 $3\sqrt{2}$, 작은 삼각형의 높이는 $\sqrt{2}$이고 결국 각각의 넓이는 $\frac{9}{2}\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$입니다.
따라서 $S=5\sqrt{2}$, 구하고자하는 S^2의 값은 50입니다.

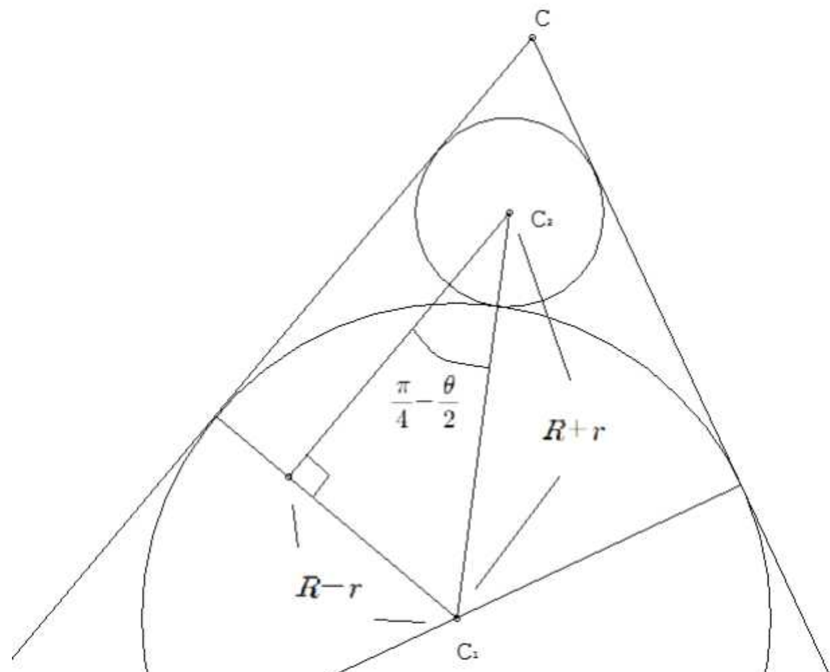
27. 답: 6 [4점]

원 $C_1,\ C_2$의 중심을 각각 $\mathrm{C_1, C_2}$라 하고 C_1의 반지름을 R이라 하면 아래의 그림으로부터 $R=\tan\theta(1-\sin\theta)$임을 알 수 있습니다.

혹은 $\frac{R}{\cos\theta-R}=\sin\theta$를 이용하여 $R=\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}$임을 구할 수도 있고 식을 약간 변형해보면 두 값은 같습니다.



이제 r을 구하기 위해서 다음과 같이 $R+r$과 $R-r$, 그리고 $\angle\mathrm{OCB}$의 절반에 해당하는 각 $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$를 이용하여



$(R+r)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=R-r$,

$r=\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}R$임을 알 수 있습니다.
$R=\tan\theta(1-\sin\theta)$이므로

$r=\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}R=\tan\theta(1-\sin\theta)\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$이고

$\lim_{\theta\to0}\frac{r}{\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}\times(1-\sin\theta)\times\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}=$

$1\times1\times\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=3-2\sqrt{2}=a-b\sqrt{2},\ a=3,\ b=2$입니다.
따라서 구하고자하는 ab값은 6입니다.

28. 답: 72 [4점]

확률변수 X의 값으로 가능한 것은
1) 15→ (두 번의 시행 모두 홀수가 적힌 공을 뽑았을 때.)
2) 14→ (한번은 홀수, 한번은 2를 뽑았을 때.)
3) 13→ (한번은 홀수, 한번은 4를 뽑았을 때.)
4) 12→ (한번은 2, 한번은 4를 뽑았을 때.)
이렇게 네 가지입니다.
각각의 확률을 구하면,

1) 홀수를 뽑는 것은 주머니에 담긴 공의 숫자에 변화를 주지 않으므로

$\mathrm{P}(X=15)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$

2) 홀수를 먼저 뽑고 2를 뽑을 확률은 $\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}$이지만,

2를 먼저 뽑으면 2대신 1이 한 개 생기므로 다음에 홀수를 뽑는 확률이 변하여 $\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}$입니다.

$\mathrm{P}(X=14)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{7}{25}$

3) 홀수를 먼저 뽑고 4를 뽑을 확률은 $\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}$이고,

4를 먼저 뽑더라도 4대신 2가 한 개 생기므로 다음에 홀수를 뽑는 확률은 변하지 않기 때문에 $\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}$입니다.

$\mathrm{P}(X=13)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$

4) 그 어떤 경우에도 4가 새로 생기지는 않으므로 2를 먼저 뽑고 4를 뽑을 확률은 $\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$이지만,

4를 먼저 뽑으면 4대신 2가 한 개 생기므로 2를 뽑는 확률이 변하여 $\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}$입니다.

$\mathrm{P}(X=12)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{3}{25}$

확률분포표를 작성하면 다음과 같습니다.

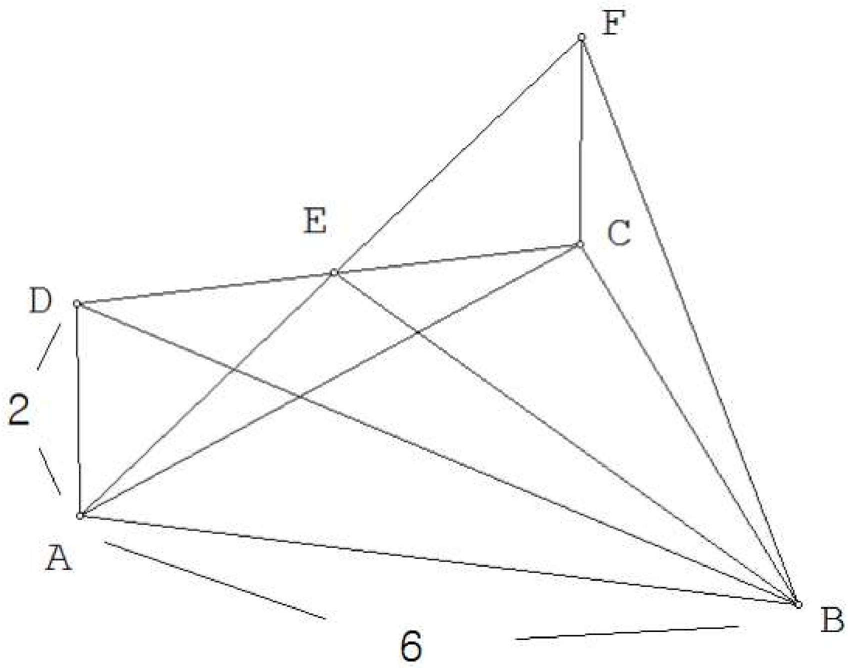
X	12	13	14	15	
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{9}{25}$	1

$\mathrm{E}(X-12)=0\times\frac{3}{25}+1\times\frac{6}{25}+2\times\frac{7}{25}+3\times\frac{9}{25}=\frac{0+6+14+27}{25}=$

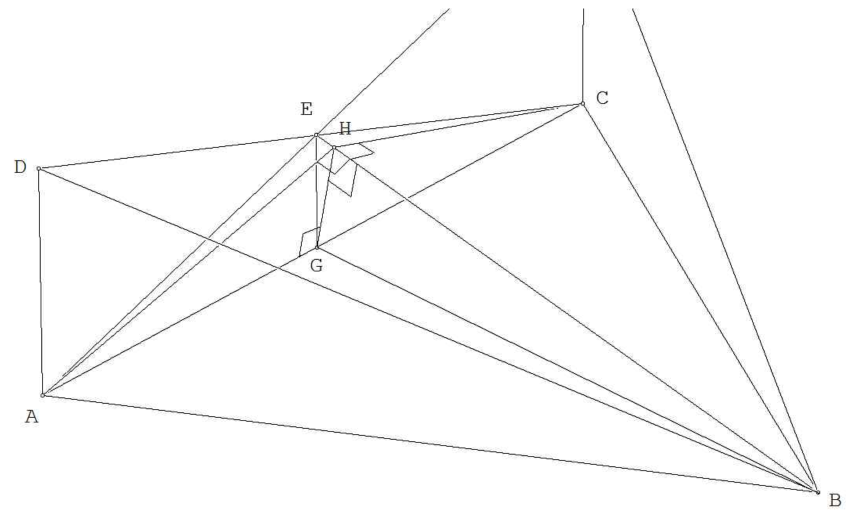
$\frac{47}{25}=\frac{p}{q}$이므로 구하고자하는 $p+q$의 값은 72입니다.

29. 답: 29 [4점]

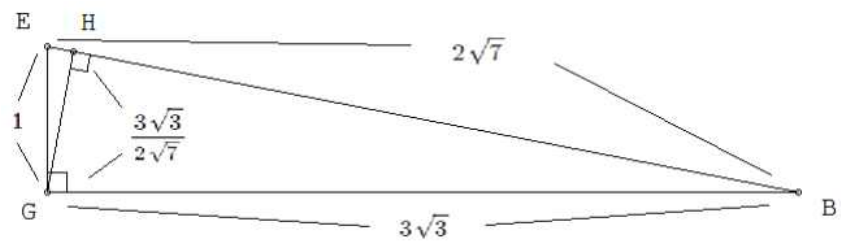
우선 문제를 읽고 그린 개괄적인 상황은 다음 그림과 같습니다.



점 E에서 $\overline{\mathrm{AC}}$에 내린 수선의 발을 G라 합시다. 점 A, C는 삼각형 EGB를 포함하는 평면에 대칭입니다.
그러므로 삼각형 ABF를 포함하는 평면과 삼각형 CBD를 포함하는 평면의 교선인 $\overline{\mathrm{EB}}$에 내린 수선의 발은 일치하며 그 점을 H라 합시다.

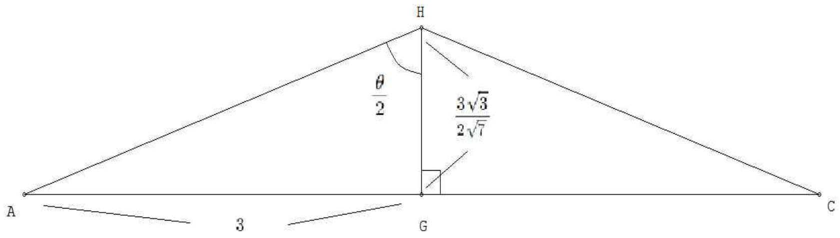


삼수선의 정리에 따라 $\overline{\mathrm{GH}}$는 $\overline{\mathrm{EB}}$와 수직입니다.
그러므로



위 그림과 같이 $\overline{\mathrm{GH}}$의 길이는 $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$임을 알 수 있습니다.

어떤 두 평면의 이면각의 크기는 각각의 평면위의 직선 중에서 두 평면의 교선과 수직인 직선사이의 각과도 같으므로
이 문제에서의 이면각은 ∠AHC라고 할 수 있습니다. ∠AHC의 크기를 구하기 위해 삼각형 AHC에 주목하면



$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$임을 알 수 있습니다.

탄젠트 합차공식을 이용하여 $\tan\theta$값을 구하면

$$\tan\theta=\frac{2\times\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\frac{4}{3}\sqrt{21}}{-\frac{25}{3}}=-\frac{4}{25}\sqrt{21}$$ 이고,

따라서 $|\tan\theta|=\frac{4}{25}\sqrt{21}=\frac{b}{a}\sqrt{21}$이므로 구하고자 하는 $a+b$의 값은 29입니다.

※좌표를 설정하여 공간좌표, 평면의 방정식 등등으로 풀이하는 해법도 나름 의미가 있는 문제입니다만 해설에 적지는 않겠습니다.

30. 답: 7 [4점]

조건 (가)에 따라서 $y=f(x)$는 우함수입니다.
또한 $(0,\ 1)$부터 $(x,\ f(x))$까지 곡선의 길이함수 $y=l(x)$또한 우함수가 됩니다.
그러므로 $f(x)$와 $l(x)$의 대소에 따라 결정되는 함수 $y=g(x)$또한 우함수입니다.
따라서 $x>0$구간에 대해서 판단한 결과로 $f(x), l(x), g(x)$의 전구간을 판단할 수 있습니다.

우선 조건 (다)의 의미를 살펴봅시다. “$0<x_1<x_2$인 임의의 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1)\times f'(x_2)>0$이다.”로부터
$x\neq0$이면 $f'(x)\neq0$, 즉 f가 $x\neq0$인 모든 x에 대하여 극점을 갖지 않는다는 성질과
$x>0$에서 f는 ‘증가함수’, 혹은 ‘감소함수’ 라는 성질을 알 수 있습니다.
다시 말해서 구간 $(0,\ \infty)$에서 $f'(x)>0$이거나 $f'(x)<0$ 두 경우뿐이며 미분 가능한 우함수f는 $x=0$에서 극솟값 1 또는 극댓값 1을 갖습니다.
또한 $(0,\ \infty)$에서 $f'(x)>0$이라면 조건 (나)의 “모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq2$이다.”로부터 $f(x)$는 $x\to\pm\infty$일 때 2이하의 값으로 수렴함을 알 수 있습니다.

그런데 우함수 $y=g(x)$가 극점을 3개 갖기 위해서는 필연적으로 $x=0$에서 한 개, 구간 $(0,\ \infty)$에서 한 개, $(-\infty,\ 0)$에서 한 개를 가져야 합니다.

이제 $y=l(x)$를 살펴보면

$$l(x)=\begin{cases}\int_0^x\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ \int_x^0\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt & (x<0)\end{cases}$$

이므로

$$l'(x)=\begin{cases}\sqrt{1+(f'(x))^2} & (x>0)\\ -\sqrt{1+(f'(x))^2} & (x<0)\end{cases}$$

입니다.
함수 l은 $(0,\ \infty)$에서 증가함수이며 $x=0$에서 미분불가능한 극소점 $(0,\ 0)$을 갖습니다.

$x=0$일 때 $f(0)=1>l(0)=0$이므로 x가 0부근일 때는 $g(x)=f(x)$입니다.
l이 $x>0$일 때 증가함수이므로, 극점이 존재하기 위해서는 g가 f에서 l로 바뀌는 지점이 반드시 존재해야하므로 $f(\alpha)=l(\alpha)$인 양수 α가 오직 하나 존재하면서 $x=\alpha$에서 g의 증감이 바뀌어야 합니다.
이때 함수 l은 $(0,\ \infty)$에서 증가함수이므로 $f'(\alpha)<0$이어야 하고 이는 곧 $(0,\ \infty)$에서 f가 감소함수임을 나타냅니다.

$y=g(x)$를 다시 정의하면

$$y=g(x)=\begin{cases}l(x) & (x<-\alpha)\\ f(x) & (-\alpha\le x\le\alpha)\\ l(x) & (x>\alpha)\end{cases}$$

이며 함수 $y=g(x)$는 극대점 $(0,\ 1)$과 두 극소점 $(-\alpha,\ f(-\alpha))$, $(\alpha,\ f(\alpha))$을 갖습니다.

이제 $f(x)$를 알아봅시다. 조건 (라)를 활용하면

$$1-\left\{\frac{f'(x)}{2-f(x)}\right\}^2=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$$ 이고

$$\left\{\frac{f'(x)}{2-f(x)}\right\}^2=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2$$ 입니다.

$x>0$에서 $f'(x)<0$이고 $f(x)<f(0)=1<2$이므로

$\frac{-f'(x)}{2-f(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$입니다. 양변을 적분해주면 (적분상수는 모두 C로 통일했습니다.)

$$\int\frac{-f'(x)}{2-f(x)}dx=\ln(2-f(x))+C=\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\ln(e^x+e^{-x})+C$$

$f(0)=1$이므로

$\ln(2-f(0))=0=\ln(e^0+e^{-0})+C=\ln2+C,\ C=-\ln2$

$2-f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ f(x)=2-\frac{e^x+e^{-x}}{2}$입니다.

조건 (라)를 활용하면

$\{f'(x)\}^2=\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2\times\{2-f(x)\}^2=\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$이고

$1+\{f'(x)\}^2=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2$이므로

$x>0$에서

$l(x)=\displaystyle\int_0^x\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt=\int_0^x\frac{e^t+e^{-t}}{2}dt=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$입니다.

$f(x)-l(x)=2-\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=2-e^x$이므로

$\alpha=\ln 2$로 유일합니다.

$f(\alpha)=2-\dfrac{2+\frac{1}{2}}{2}=2-\dfrac{5}{4}=\dfrac{3}{4}$이고 $f(-\alpha)=f(\alpha)$이므로

$g(x)=k$의 근의 개수가 4인 k의 범위는 $\dfrac{3}{4}<k<1$입니다.

$a=\dfrac{3}{4}$, $b=1$이므로 $4(a+b)=4\times\left(\dfrac{3}{4}+1\right)=7$,

따라서 구하고자 하는 값은 7입니다.

※이 문제는 17학년도 6월 모의평가 가형 21번을 특이한 방식으로 반영하였습니다.

주어진 식 (라)를 자세히 살펴보면 17학년도 6월 모의평가 가형 21번 조건 (다)와 같은 식이라는 것을 알 수 있을 것입니다.

17학년도 6월 모의평가 21번에서 $-1<f(x)<1$인 기함수 $f(x)$에 대하여 주어진 조건 $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}$에서

$\dfrac{f'(x)}{1+f(x)}-\dfrac{-f'(x)}{1-f(x)}=2$이고

양변 적분하면

$\ln\left(\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)=2x$

$1+f(x)=e^{2x}-e^{2x}f(x)$, $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$입니다.

계산기를 살펴보면 종종 볼 수 있는 tanh라는 기호가 있을 텐데요, 물론 교과과정 밖이지만 17학년도 6월 모의평가 21번의 함수 $f(x)$는 성질이 널리 알려진 $\tanh x$라는 함수입니다.

쌍곡선 $x^2-y^2=1$을 매개변수로 치환하는 방법 중에 $x=\sec\theta$, $y=\tan\theta$가 있지만 이는 수학적으로 큰 의미가 없어 잘 활용되지 않습니다.

대신 $x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$, $y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$로 치환하는 방법이 더 많이 쓰이는데요, 이렇게 치환한 x, y를

$x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}=\cosh t$, $y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}=\sinh t$로 표현하며

$\cosh x$, $\sinh x$를 쌍곡선함수라 하며 삼각함수와 유사하지만 $(\cosh x)'=\sinh x$, $(\sinh x)'=\cosh x$의 성질을 가지고 있습니다.

17학년도 6월 모의평가 가형 21번 조건 (다)는 결국 교과과정 밖의 표현으로는 $\mathrm{sech}^2x=(1-\tanh x)(1+\tanh x)$라는 식이며 x에 관하여 표현하면

$\left(\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^2=\left(1-\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)\left(1+\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)$입니다.

위 내용에 따르면 30번의 $f(x)$는 $2-\cosh x$라고 볼 수 있으며 $f'(x)=-\sinh x$입니다. (라)조건을 보면

$\left\{1-\dfrac{f'(x)}{2-f(x)}\right\}\left\{1+\dfrac{f'(x)}{2-f(x)}\right\}=\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$는 결국

$(1+\tanh x)(1-\tanh x)=\mathrm{sech}^2x$인 것이죠.

피력하고 싶은 바는 절대로 “이런 것을 알고 있어야 한다.”가 아닙니다.

다만 17학년도 6월 모의평가 가형 21번에서 확신을 얻은 바로써, 평가원 출제진은 교과과정외의 소재를 교과과정 내에서 풀어내는 것에 거부감이 없다는 것과,

$\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 등과 같은 다양한 초월함수의 개형, 성질들을 체화시켜 놓는 것이 견문을 넓히는 하나의 방법이 될 수 있다는 것을 말씀드리고 싶었습니다.

by Gomblic, GMBLC