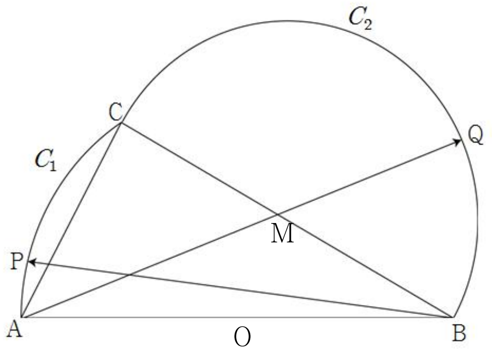
28. 그림과 같이 직각삼각형 ABC와 길이가 8인 선분 AB를 지름으로 하는 원의 일부인 C_1위의 임의의 점 P와 선분 BC를 지름으로 하는 반원 C_2위의 임의의 점 Q가 있다. $\angle \mathrm{ABC} = \frac{\pi}{6}$일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$가 최대가 되게하는 점 P, Q에 대하여 삼각형 BPQ의 넓이가 $\frac{a\sqrt{b}}{7}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.) [4점]



두 벡터 모두 크기와 방향이 변하는, 두 개의 변수를 지닌 벡터이므로 적절히 분해하여 크기 나 방향을 고정해줄 생각을 할 수 있다. 해서,

$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{BO}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}$,

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{MQ}}$

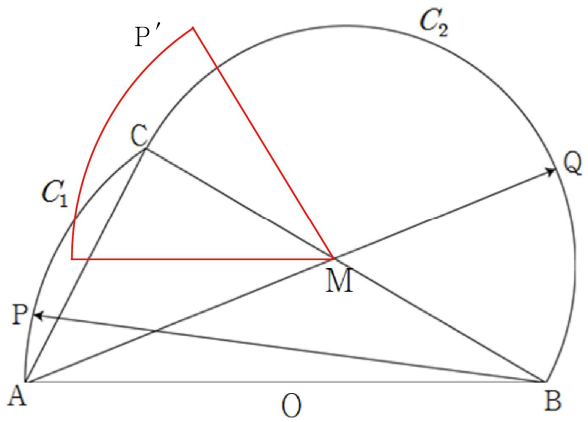
로 분해해줬다.

이제 5개의 벡터를 잘 합하여 그 최대가 되는 상황을 찾아보면 된다. 일단, $\overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{BO}} = 0$이니 지워주면 $\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 만 남는다.

여기서부터가 까다로운데, 최대한 논리적으로 풀이를 진행해보겠다.

$\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}$을 먼저해줄텐데, 벡터의 합성은 두가지를 배웠다.
시점을 일치하여 합성하는 평행사변형법과
종점에 시점을 일치시키는 삼각형법이 있었다.

평행사변형법으로 보면, $\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 점 P, M의 중점과 O를 이은 벡터와 평행한 볼 수 있는데, 중점을 정확히 표시하기도, 크기 파악도 힘드니 삼각형법으로 가보자.
해서, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 시점을 점 M으로 평행이동시키자.

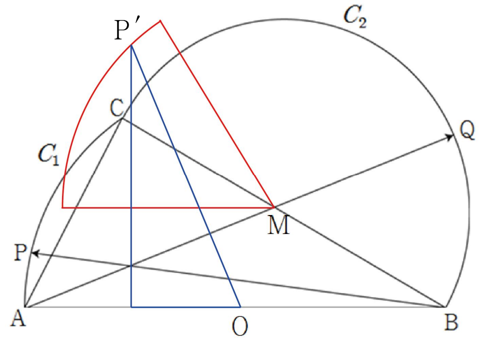


(빨간색 부채꼴이 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 자취입니다.)

그럼 이제 $\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MP'}}$ 의 크기의 최댓값을 구해줘야한다. 왜냐면, $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$도 더해줘야하지만 $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$는 크기가 일정하고 방향만 변하는 벡터이니 방향만 $\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MP'}}$와 평행하게 해주면 되기 때문.

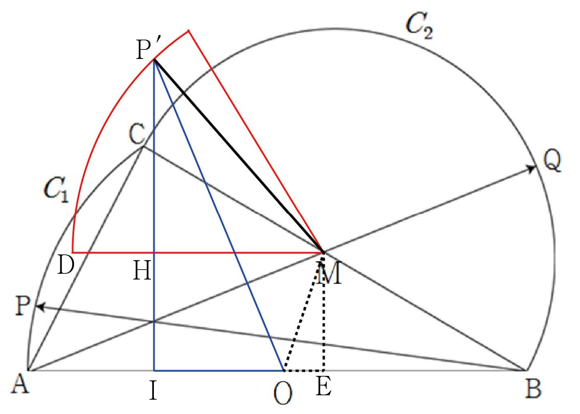
해서, $\overline{\mathrm{OP}'}$가 최대일 때의 P′를 먼저 찾아주면 된다. 여기서 많은 학생들이 직관적으로 P가 C일때다! (원래의 그림에서)했는데, 그 부분도 다음과 같이 증명할 수 있다.(참고로 증명도 여러 가지가 있다. 자주 쓰이는 삼각함수로 접근해보자.)

$\overline{\mathrm{OP}'}$ 는 직각삼각형의 빗변으로 생각할 수 있는데, 그 그림은 다음과 같다.



그런데, P′가 움직이면서 직각삼각형의 밑변과 높이가 변하므로, 빗변의 길이가 언제 최대인지 정확하게 짚을 수 없다. 해서, 빨간 부채꼴에서 각 θ를 도입하여 풀어보자.

다음장을 참고.



(일단 설명을 위해 점D, E, H를 추가했다. 그림참고)

$\angle P'MD = \theta$로 두고 접근해보자.
파란 삼각형의 높이와 밑변을 구할건데, 높이는
$\overline{MP}'\sin\theta + \overline{HI}$ 이다.
밑변은 $\overline{MP'}\cos\theta - \overline{OE}$이다.
일단, $\overline{HI} = \sqrt{3}$ 임을 알 수 있고(삼각형 MOE에서)
$\overline{OE} = 1$임을 알 수 있다.
$\overline{MP}' = 4$이므로, 식을 정리해주면,

빗변 $=$ (높이)^2+(밑변)^2
$= (4\sin\theta + \sqrt{3})^2 + (4\cos\theta - 1)^2$

$= 16\sin^2\theta + 8\sqrt{3}\sin\theta + 3 + 16\cos^2\theta - 8\cos\theta + 1$
$= 20 + 8\sqrt{3}\,sin\theta - 8\cos\theta$
어차피 최대인 상황만 구하면 되니깐, 미분해보자.

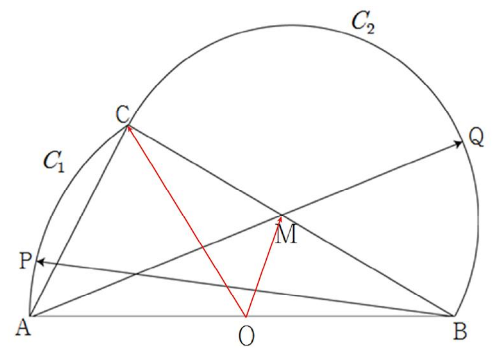
미분하면, $8\sqrt{3}\,cos\theta + 8\sin\theta$ 이고, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$에선

$8\sqrt{3}\,cos\theta + 8\sin\theta > 0$이므로, 빗변은 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$

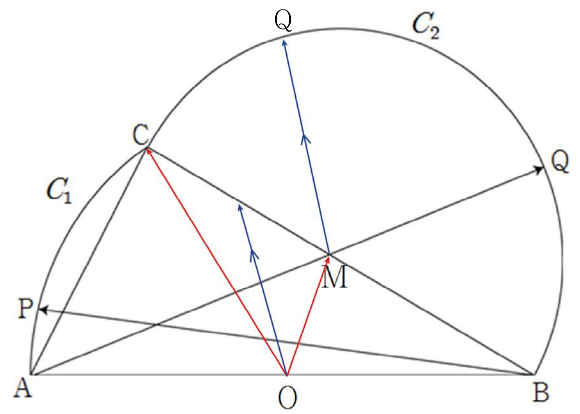
에서 계속 증가함을 알 수 있다. 해서, $\theta = \frac{\pi}{3}$일 때

가 최대가 된다.

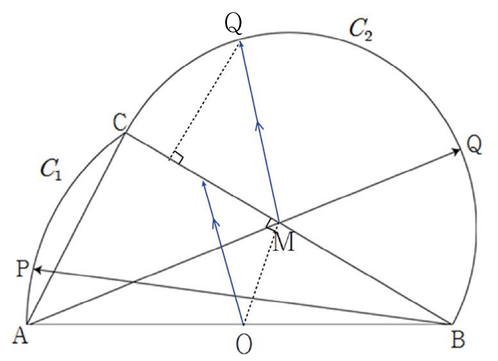
이제 P의 위치를 정확히 구했으니,
“평행사변형법을 활용하여 Q의 위치를 확인해보자.
옆에 그림참고.



이제 정확한 P의 위치는 P = C일 때임을 안다.
두 벡터 $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OM}$을 해주면, 점 C와 점 M의 중점을 지나는 벡터가 된다.



그러면 더해줘야할 $\overrightarrow{MQ}$는 그 벡터에 평행해야 하므로 위의 그림처럼 그려진다. 이제 점Q의 위치를 찾았으니, 넓이를 구해주자.



두 파란벡터가 **“평행”** 하므로 닮음을 활용하기 위해 점 Q와 점 O에서 각각 선분BC에 수선을 내려줬다.

닮음을 활용해서, 높이를 구해 삼각형 넓이를 구해주면 답이 쉽게 나온다.