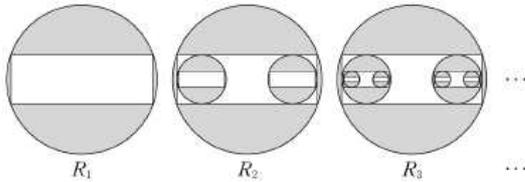


14. 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 그림과 같이 가로와 세로의 길이의 비가 3:1인 직사각형을 이 원에 내접하도록 그리고, 원의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_2 에서 직사각형의 세 변에 접하도록 원 2개를 그린다. 새로 그려진 각 원에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 그림 R_3 에서 새로 그려진 직사각형의 세 변에 접하도록 원 4개를 그린다. 새로 그려진 각 원에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{5}{4}\pi - \frac{5}{3}$
- ② $\frac{5}{4}\pi - \frac{3}{2}$
- ③ $\frac{4}{3}\pi - \frac{8}{5}$
- ④ $\frac{5}{4}\pi - 1$
- ⑤ $\frac{4}{3}\pi - \frac{16}{15}$

자, 무한등비급수에서 여러분은 무얼배웠죠??

네!

$$\frac{a}{1-r}$$

요놈이죠? 뭐 자질구레 한것 많이 배웠지만 결국은 저것 배웠습니다. (... 이건 뭐지? 하는분들은 교과서부터 정독 부탁드립니다.)

우리가 배운건 이겁데.. 그럼 문제는 무얼 물을까요?

네! 요거.

$$\frac{a}{1-r}$$

당연하죠? 이걸로 우린 모든걸 풀겁니다. 저 공식을 사용하기 위해선 단 두가지만 알면 됩니다.

바로,

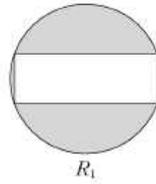
1.첫째항

2.공비

당연하다구요? ... 근데 왜 틀리세요...

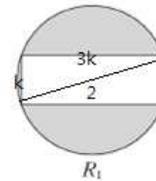
자 해설보시면서, 어떻게 문제에 적용시키는지 봅시다 !!

첫째항 먼저 구해야겠죠?



< 이 넓이가 곧 첫째항이 됩니다. 넓이 구해보면, 원의 넓이에서 사각형 넓이 빼주면 되니, $\frac{\pi - 6}{5}$ 입니다.

(복잡합니다만, 구해보세요. 직사각형의 가로 세로 비가 3:1 인것과, 지름이 2인 걸 사용해서요.)



자 그 다음은 , 공비입니다.

이 공비가 문제인데, 제 설명을 잘들어 보세요.

“공비” 라는건 결국 비율을 의미합니다. 첫째항에서 둘째항으로 갈 때 어느 정도의 비율로 변화하였는지. 그것이 바로 공비이고, 우린 그것이 궁금한것이죠.

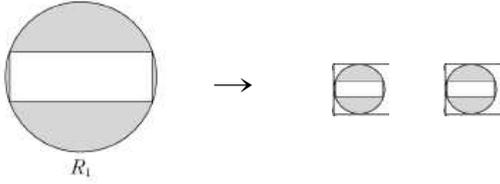
“아 그래서 R2 를 구해서 R1 과 비교하면 되나요 ??”

“... 아뇨 .”

그게 아닙니다. 왜 R2 를 직접 구하나요. 변화하는 정도만 알면됩니다.

다음페이지에서 계속하겠습니다.

자, 두 가지 사항에 대해 언급할테이니, 잘 들어보세요.



첫째, 상황을 파악해볼 것. 무슨소리가 하면, R1의 저 원은,

크기가 줄고, 두 개가 되어

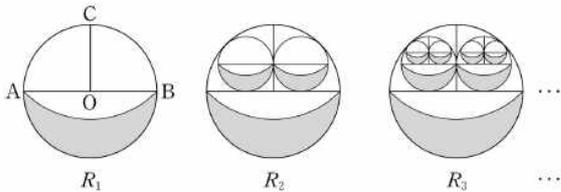
그림 R2에 들어갑니다. 이 변화하는 비율만 따져주면 됩니다.

둘째, **넓이비는 (길이비)².**

간혹 제가 가르치는 학생들보면, 공비를 구해야하므로

A1과 A2의 넓이를 구해서 그 값을 통해 공비를 구하더군요.

.....흠.. 맞죠.. 맞는데.



그럼 이걸 어찌시게요...

자, 물론 저런 것도 넓이를 구할 수 있지만, 중학도형에서 배웠던 것이죠?

넓이비는 (길이비)².

이걸 통해서 좀 더 빠르게 공비를 구할 수 있습니다.

아니, 이걸 이용해야만 합니다.

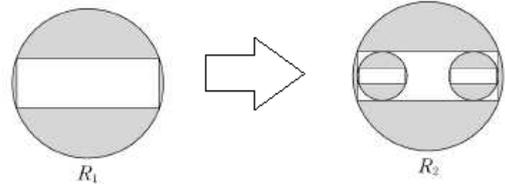
우리목적은 공비 구하는 것이니깐요. 어떻게든 **빠르고 정확하게** 공비만

구해내면 됩니다. 즉, 넓이비를 구하느라 애쓰는게 아니라 길이비만 구한다.이거죠.

당연한소리로 들리는 학생들도 있겠지만 ㅎㅎ 점검한답시고 계속 읽어보세요.

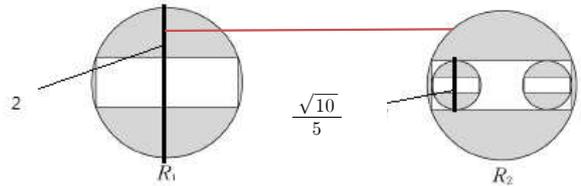
그럼 옆에 그림을 통해

길이비를 어떻게 **빠르게** 구하는지 배워보죠.



길이비를 구할 때, **가장 쉽게 구할 수 있는 길이**를 구하면 됩니다.

이 문제에선, 이렇게 되겠군요.



그림에 그어져 있는 저 줄, 즉 큰원의 지름과 그 원이 줄어든 작은 원의 지름의 길이비를 구하면 됩니다.

그 길이비를 구한 후, 제곱하여 넓이비를 구합니다.

다만 여기서 !!!!

그림 보면 알겠지만 개체가 줄어든 후 갯수가 두개로 늘었습니다.

즉, **넓이자체도 두 배**가 되어야하는 것입니다.

그러므로 아간 구한 넓이비 X2 해주시면 됩니다.

만약 도형이 줄어든 뒤에 4개로 늘어나면 어떻게 해야 될까요?

네. 넓이비 구한 후 X4 해주시면 됩니다.

그 값이 공비가 되는 것입니다.

이제 첫째항과 공비 구했으니

$$\frac{a}{1-r}$$

해주면 되겠군요 ㅎㅎ.

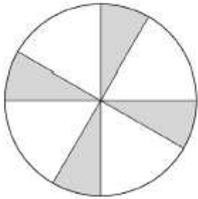
다음 문제 풀면서 다시 확인해 보겠습니다.

< 14년도 9월 평가원 A형 16번 문항 >

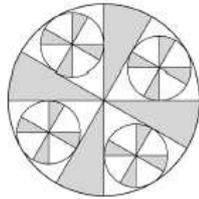
16. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 중심각의 크기가 60° 이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴을 서로 겹치지 않게 4개 그린 후 원의 내부와 새로 그린 부채꼴의 외부에 공통으로 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 [그림 1]이라 하자.

[그림 1]에서 색칠되지 않은 각 부채꼴에 두 반지름과 호에 모두 접하도록 원을 그린다. 새로 그린 각 원에 중심각의 크기가 60° 이고 반지름의 길이가 새로 그린 원의 반지름의 길이와 같은 부채꼴을 서로 겹치지 않게 4개씩 그린 후 새로 그린 원의 내부와 새로 그린 부채꼴의 외부에 공통으로 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 [그림 2]라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림에서 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



[그림 1]



[그림 2]

- ① $\frac{7}{15}\pi$ ② $\frac{8}{15}\pi$ ③ $\frac{3}{5}\pi$ ④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{11}{15}\pi$

바로 가보도록 하죠.

1. 첫째항

2. 공비

첫째항을 구하긴 할건데.. 부채꼴의 넓이 어떻게 구하죠??

네. 반지름을 r , 각도를 θ 라 했을 때, 부채꼴의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta$$

넵. 그럼 첫째항은 $\frac{\pi}{3}$ 임을 알 수 있습니다.

공비가 문제죠 공비??

뭘 구한다구요? 네. **길이비.**

자. 길이비를 구하기 전에, 또 개념한번 보고 갈게요.

원 은 자주 나오는 소재로, 자주 등장하는 소재인 만큼 자주 쓰이는 푸는 개념, 행동 또한 존재합니다. 불게요.

1. 원과 접하는 접선이 존재할 때.

- 접점과 원의 중심을 이은 선은 접선과 수직이다.
- 또한 그 접점이 문제해결의 point 다.

2. 원과 원이 공존할 때.

- 중심을 이어라.

저 행동들이 원과 관련하여 주로 쓰입니다. 그림으로 보겠습니다.

..는 다음페이지에서 다시 불게요.

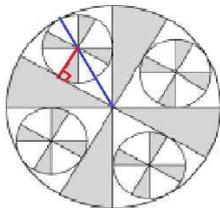
1. 원과 접하는 접선이 존재할 때.

- 접점과 원의 중심을 이은 선은 접선과 수직이다.
- 또한 그 접점이 문제해결의 point 다.

2. 원과 원이 공존할 때.

- 중심을 이어라.

자, 아까문제에 적용시키면서 설명해보죠.

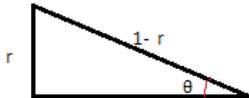


[그림 2]

원과 접선이 만나는 부분이 point 이므로, 그 점을 이용할 생각을 해서 수선을 그려줬습니다.

또한 원과 원이 공존하니 중심을 이어줬습니다.

그러면 그림에서 삼각형이 하나 나옵니다. 삼각형만 떼서 볼까요.



작은 원의 반지름을 r 이라 했을 때, 그림과 같은 결과가 나옵니다.

남득가시나요? 왜 빗변이 1-r 인지 아시겠나요??

큰 원의 반지름이 1이고, 작은 원의 반지름이 r입니다. 그 둘을 이용하려고

중심거리 이어줬고, 그 결과 삼각형의 빗변의 길이가 1-r 임을 알 수 있습니다.

그런데, 저 θ는 몇도죠? 네. 30도 $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 입니다.

우리는 특수각을 배웠었죠?? ㅎㅎ (모르시면 공부...)

그러므로 $\frac{1-r}{r} = 2$ 입니다. 그럼 $r = \frac{1}{3}$ 이군요.

자 무얼해야하죠?? 길이비 !!! 작은 원과 큰 원의 반지름 비율

길이비로 삼으면 간단하겠군요.

$$1 : \frac{1}{3}$$

그 다음은? 넓이비. 길이비 제공하신 뒤에, 뭐 하죠??

네. 개체가 작아진 뒤에 4개로 늘어나고 있으니 4를 곱해주시면 됩니다.

즉, 공비는 $\frac{4}{9}$ 입니다.

$$\frac{a}{1-r}$$

이거 써주시면, 답은 $\frac{3}{5}\pi$ 네요. 간단합니다.

원에 관한 성질 기억해주세요. 꼭 !

1. 원과 접하는 접선이 존재할 때.

- 접점과 원의 중심을 이은 선은 접선과 수직이다.
- 또한 그 접점이 문제해결의 point 다.

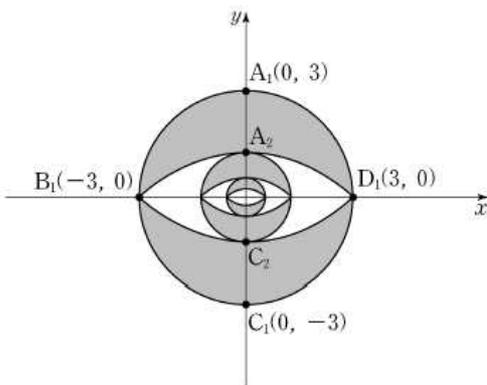
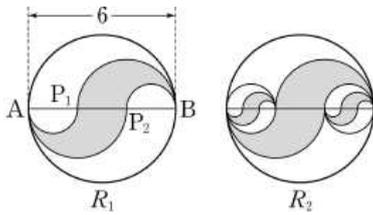
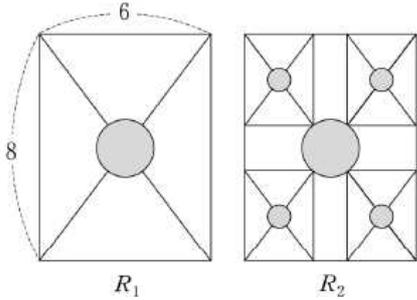
2. 원과 원이 공존할 때.

- 중심을 이어라.

길이비 구할 때 항상 빠르고 쉽게 구할 수 있는 것 위주로 하라 했습니다.

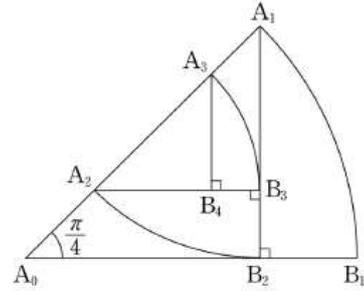
그림으로만 쪽 살피고 바로 다음 내용 넘어갈게요.

자. 그림만 보고 어떤, 어떤 것을 가지고 길이비를 구하는게 빠를지 선을 그어보세요.

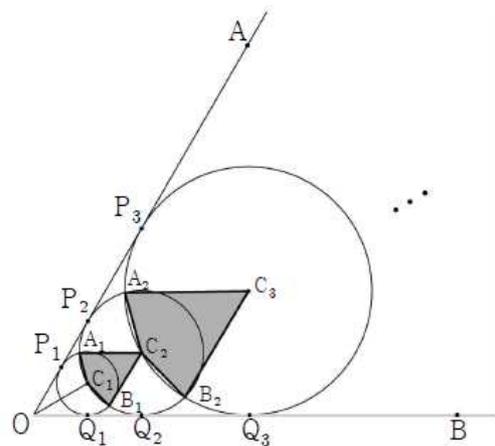
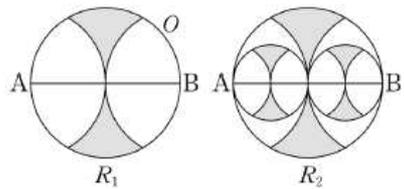


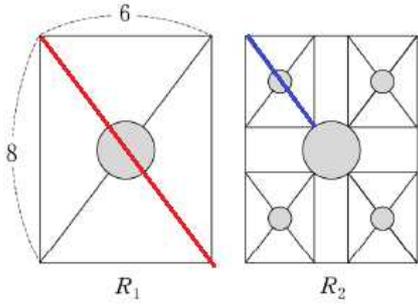
부제꼴 $A_{n-1}A_nB_n$ 의 호 A_nB_n 의 길이를 l_n 이라 할 때,

$\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은? [3점]

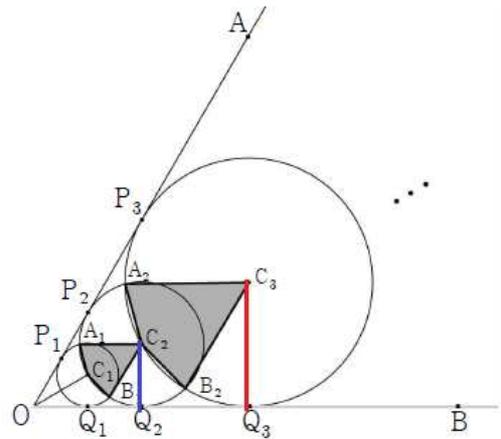
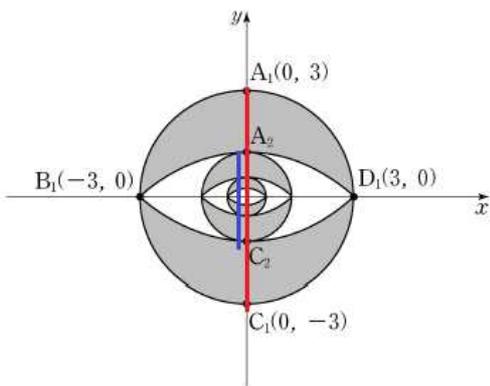
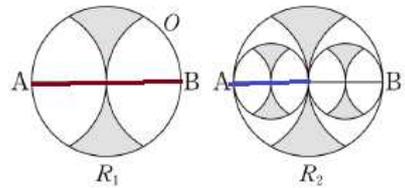
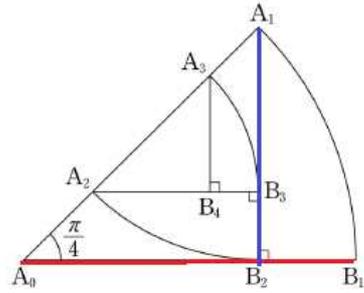
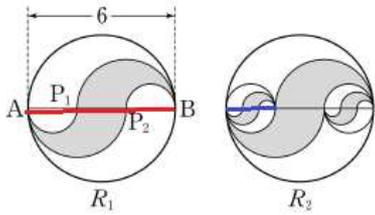


(이건 문제를 알아야 할 것 같아 문제도 첨부했습니다.)





(두번째그림에서, 긴 대각선길이는 이미 왼쪽그림에서 10으로 알고 있고, 가운데 원의 지름길이를 빼주면 작은 직사각형 대각선 길이 $\times 2$ 한 길이가 나오므로 이렇게 구하는게 맞습니다.)

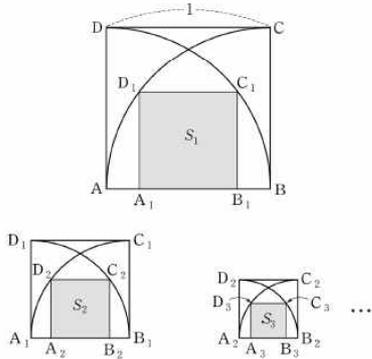


마지막 그림만 해설하자면, 원이 여러개 나왔으니 중심이어주고, 접선과 수선 그려주면 삼각형이 나오죠?? 그래서 쉽게 반지름 비로 길이비 구할 수 있습니다.

이어서 다음 개념 보겠습니다. !! 생소한 내용이실겁니다.

개념설명하기에 앞서, 문제 먼저 풀고 가겠습니다.

17. 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 정사각형 ABCD 안에 두 점 A, B를 각각 중심으로 하고 변 AB를 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 $A_1B_1C_1D_1$ 이라 하자. 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 안에 두 점 A_1, B_1 을 각각 중심으로 하고 변 A_1B_1 을 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 $A_2B_2C_2D_2$ 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{3}{8}$
- ② $\frac{9}{16}$
- ③ $\frac{4}{5}$
- ④ $\frac{9}{8}$
- ⑤ $\frac{23}{16}$

어렵죠? 제가 이걸 제대로 푸는 학생을 못봤어요..

이건 위에 있는 무한등비급수 문제들과는 조금 다른 유형의 문제입니다.

바로, **“미지수 설정 문항”**입니다. (.. 제가 지었지만 이름 참..)

무슨 말이고 하면,

지금까지 문제들에선 **모든 길이가 주어졌고 충분히 구할 수 있으므로**,

그냥 바로 길이비를 구할 수 있었고, 그것을 통해 넓이비 구해서 공비를 구했습니다만,

지금 옆에 문제와 같은 문항은 첫째항조차 구하기 힘듭니다.

왜냐하면 **정의되어 있는 길이의 정보가 부족해서**입니다.

그래서 우린 **“미지수를 설정”** 해주어야 하고, (길이정보가 부족하니, 구하려고)

우리가 아는 도형의 개념으로 문제를 푼다.

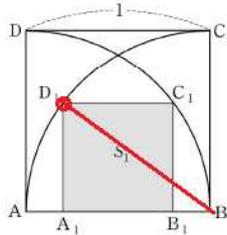
도대체 무슨 소리인지 아래 해설을 봅시다.

아니.. 인쇄해주시는 여러분들(ㅎㅎ곳)을 위해

해설은 다음페이지에서 하겠습니다.

일단, 아까 설명했던 개념인데,

원과의 접점은 point 이다. 해결의 실마리가 있다.



접점이 포인트이므로 그 점과 B (원의중심) 을 연결해 주었습니다. 그 길이는 1이군요.

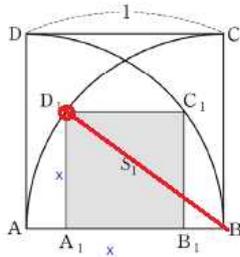
그 다음은 어떻게 하죠??? 할 수 있는게 없을 겁니다.

그래서 이젠 우린 미지수를 설정해야 합니다.

뭐한다구요?

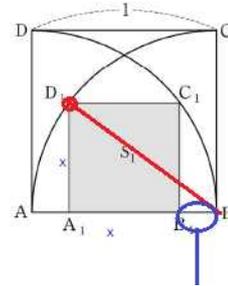
“미지수 설정”

S1의 넓이를 구해야 하므로 $\overline{D_1A_1}$ 을 x 라 두면,

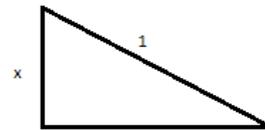


이렇게 되지요. 그런데, AB 의 길이는 1이므로 ,

아, 그럼 또 삼각형이 나오는데.



$$1 - \frac{x}{2}$$



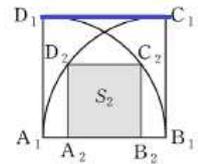
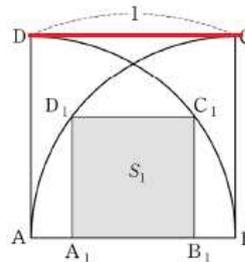
$$\frac{2+x}{2}$$

직각삼각형이므로, **피타고라스의 정리** 를 쓰면 됩니다.

그럼 x 에 관한 이차방정식이 나오고, 그렇게 x 를 구할 수 있습니다.

x 를 구했으니 S_1 도 구할 수 있고, 길이비 또한 다음과 같으므로 공비도 쉽게

구할 수 있군요 !.



(x 와 $\overline{D_2C_2}$ 의 길이비로 구하는게 아닙니다.. 1과 x 로 길이비 구하는거죠.

항상 최대한 빨리 구할 수 있는 길이비로 구하시면 됩니다.

S_1 이 S_2 로 작아진거라 생각하셔도 되지만,

ABCD 라는 개체가 A1B1C1D1 라는 개체로 작아지셨다
생각해도 됩니다. [이거중요..]

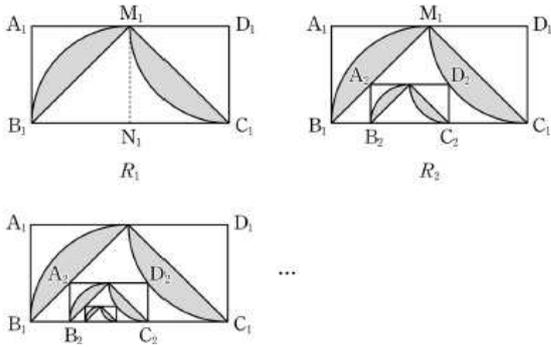
쉽네요. 답은 $\frac{9}{16}$ 인 2번.

이 유형이 어떤 유형인지 감이 오시나요?? 출제되면 좀 어려운 문제인데,

이번 수능에 출제되었던 문제를 통해 (14수능입니다. 시간참빠르네요 - 개정하면서.)
 다시한번 이번 유형공부를 해보죠.

< 14수능 B형 15번문항 >

15. 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에서 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$ 이다. 그림과 같이 선분 A_1D_1 과 선분 B_1C_1 의 중점을 각각 M_1 , N_1 이라 하자. 중심이 N_1 , 반지름의 길이가 $\overline{B_1N_1}$ 이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 $N_1M_1B_1$ 을 그리고, 중심이 D_1 , 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$ 이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 $D_1M_1C_1$ 을 그린다. 부채꼴 $N_1M_1B_1$ 의 호 M_1B_1 과 선분 M_1B_1 로 둘러싸인 부분과 부채꼴 $D_1M_1C_1$ 의 호 M_1C_1 과 선분 M_1C_1 로 둘러싸인 부분인  모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에 선분 M_1B_1 위의 점 A_2 , 호 M_1C_1 위의 점 D_2 와 변 B_1C_1 위의 두 점 B_2 , C_2 를 꼭짓점으로 하고 $A_2B_2 : A_2D_2 = 1 : 2$ 인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 에서 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는  모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



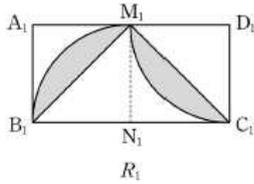
- ① $\frac{25}{19} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$
- ② $\frac{5}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$
- ③ $\frac{25}{21} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$
- ④ $\frac{25}{22} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$
- ⑤ $\frac{25}{23} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$

아, 강조한번 하고.

“미지수 설정 문항”

- 해설은 다음페이지에서 할게요.

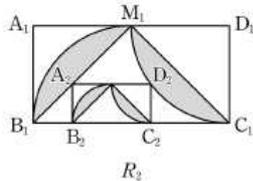
해설해보겠습니다.



첫째항 구하는건 쉽죠?? ($\frac{\pi}{2} - 1$) 입니다.

자 그 다음은 길이비인데.. 다음 그림을 보면,

여러분이 더이상 할 수 있는게 없다는 걸 느낄 겁니다.



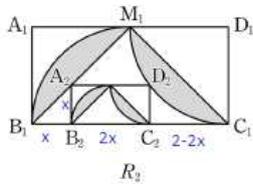
아.. 그죠?? 길이에 관한 정보가 부족합니다.

어떻게 하라구요??

“미지수 설정”

A_2B_2 를 알아야 길이비를 구하므로, 그 부분을 x 라고 하고,

주어진 정보로 다른 길이도 x 로 표현하면,



이런 그림이 됩니다. (안보이시면 부디 프린트해주세요 부디.)

잉?? 미지수까지 다뤘는데 안풀린다구요?? 과연 ??

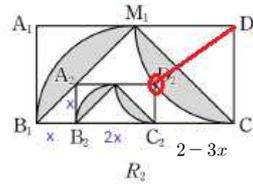
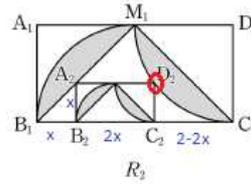
우리가 무언가 놓친게 있습니다.

그죠. 눈이 있으시다면 문제에서 원의 일부가 보이죠?

바로적용!

원과의 접점은 point 이다. 해결의 실마리가 있다.

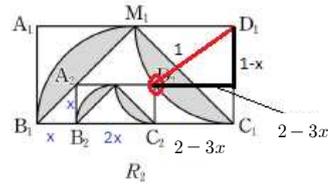
네. 접점..접점 꼭 짚어주세요. 짚고 중심과 연결.



아... 이렇게 하는 순간 방금 풀었던 문항과 매우 유사함을 알 수 있습니다.

잘모르시겠다고요?? 이젠 알아야죠..

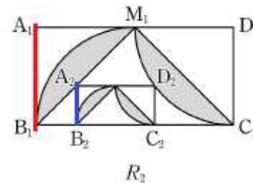
그림보시겠습니다.



아하. 삼각형이었군요 삼각형..

삼각형이면... 피타고라스 정리 !! 그럼 x 를 구할 수 있고,

공비를 구할 수 있군요 !!



공비는 1 : x 로 구해주는 겁니다..최대한 빠르게 구할 수 있는걸로 해달라 했습니다.

역시 핵심은,

“미지수 설정”

자, 이렇게 무한등비급수문제가 총 2개의 유형으로 나뉘는걸 배웠고,

각각의 유형에서의 풀이법을 배웠습니다.

물론 도형이 엄..청 다양해서 좀 더 배워야 할 개념은 많지만,

텍스트로써의 한계가.. 있군요. (고작 조금했는데 12 페이지..)

수업으로 하면 30분이면 똑딱하는걸 지금 새벽 6시가 다되가고 있습니다.

동됐어요 .. (웃기지만.. 지금도네요ㅠㅠ매일같이 야근하는 삶을 보며 취직에 대한
 거부감이 생겼었는데 카만보나 제가 알아서 하고있네요. - 개정하면서.)

하지만 여러분의 추천과 응원의 댓글, 감사하다는 댓글과 문자에

제가 또 이렇게 최다요구 파트로 칼럼을 쓰게 되었습니다.

항상 감사합니다 여러분 ㅎㅎ

제 칼럼으로 한분 한분 도움 얻어가는게 참 기쁘더라고요.

넵 이번 칼럼 여기서 마치겠습니다. 감사합니다.

- 개정을 마치면서.

아실분들은 이미 아시겠지만, 제가 실제로 현장에서 가르치는 내용들에서 대표유형문제들
 만 뽑아 압축에 압축을 거친것이 이 칼럼입니다만, 이걸로 절대로 모든문제를
 다 풀수가 없습니다. 이걸로 그냥 된다면 강사들이 왜 수업을 하며 왜 문제들을
 만들고 할까요.

그래서,

이 칼럼을 보시고 학습하시는 여러분들은,
 복습 제발 많이하시구요. 이 방법들을 가지고 사설, 기출, 실전모의 등등
 다 적용해보면서 노력해보세요.

일단 이것들이 베이스가 되어줘야 조금의 변형이 된 문제가 나와도 덤벼볼 수가 있습니다.
 복습하세요.

제발, 부디

그냥 읽고 오오! 하고 2-3번 짚짚읽고 획 던지는, 지금까지 항상 우매해왔던 여러분의
 선배수험생들을 뒤따르려 하지마세요.

성적오르는 건 절대 어렵지 않습니다. 여러분 등급대에서의 99%가 하는 우매한 행동을
 하지 않으면 되고, 그들보다 조금의 더 복습, 조금의 더 문제풀이로
 그 등급의 집단을 벗어나는 1%가 되면 됩니다.