

흠. 여러분들은 기하와 벡터 공부하면서

크게 저 세가지 개념을 배웠습니다.

저건 정말 **누구나** 이해할 수 있습니다.

그런데 왜 수능문제만 보면 그렇게 오답률 5위 안에 항상

공간도형 문제가 드는 걸까요.

이유는 두가지 정도인데...

1. 너무나 쉽게 이해하므로, 학습에 필요성을 못 느낌.
2. 학습에 필요성을 못 느끼므로 적용훈련 덜함>> 문제 못 품.

뭐, 또한 상대적으로 후반에 배우는 단원이기 때문에,

수능 이전까지 학습할 시기가 부족한 단원입니다.

애초에 시간투자가 적은데 그 이상의 효과, 즉 점수를 바라는데

말이 안되는 거죠. 시간 투자만큼 점수가 나와줘도 감사할판에.

자, 그래서 이 칼럼이 쓰여진 거겠죠?? ㅎㅎ

개념을 재학습하여 적용훈련을 하고 싶다!

시간대비 확실한 성적을 얻고 싶다! 하는 분들을 위한 칼럼입니다.

다시 본문으로 돌아와서, 계속 진행해보죠.

자.. 정사영, 삼수선의 정리, 이면각은 그 쓰임새와 목적을

알아야합니다.

공간도형 문제는 크게 두가지로 나뉩니다.

1. 정사영 된 도형의 넓이를 구하시오.

2. 평면과 평면이 이루는 각을 구하시오. (혹은 직선)

1. 은 정사영이죠? 2. 은 이면각입니다.

그런데, 1번부터 보면.

이 “정사영” 을 구하기 위해선, 정사영 공식에 의해

정사영 될 도형과 정사영 된 도형이 이루는 “각” 을 알아야 합니다.

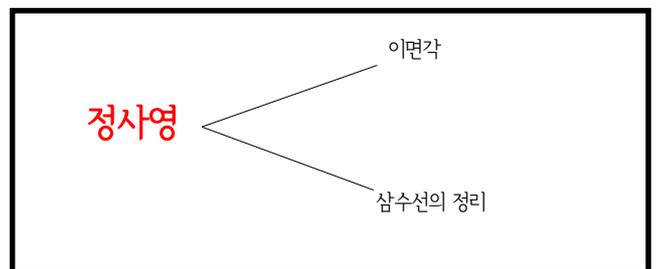
그 각을 찾는 방법은 두가지입니다.

1. 이면각.
2. 삼수선의 정리.

(뒤에 가서 볼 겁니다.)

정리하면,

1. 정사영 된 도형의 넓이를 구하시오.

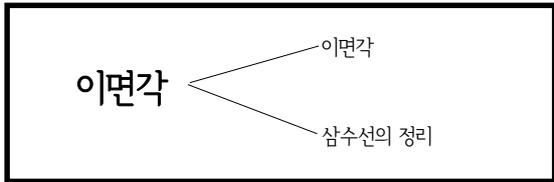


일단은 아하 ㅇㅇ. 하시면 되구요. ㅎㅎ 곧바로 2번 보겠습니다.

2. 평면과 평면이 이루는 각을 구하시오. (혹은 직선)

얘는 대놓고 이면각을 묻는 문제죠?

하지만, 이면각 구할 때도 두 가지로 나뉩니다.



왜 이면각에 또 이면각이 있느냐. 하시겠지만, 뒤에 문제 다루는것을 보면 납득하실겁니다.

중요한건, 두개의 문제들속에서 공통적으로 존재하는 요소는,

“이면각”과 “삼수선의 정리” 이요?

그런데 그 이면각에도 삼수선의 정리가 포함되어 있으니,

사실 가장 중요하고 근본적인 요소는 바로

“삼수선의 정리” 입니다.

정말 근본적인 요소이기 때문에, 여러분이 공간도형 문제를

푸는데에 있어서 사실 이 “삼수선의 정리” 를 의식하면

절대 안됩니다.

무슨말이나,

의식하지 않고도 자유자재로 활용할 정도로 체화가 되었어야 한다.

이겁니다.

(사실 모든 공식이 저래야 하지만.)

처음엔 의식적으로 아 삼수선, 삼수선, 삼수선 하면서

적용해가야 하지만,

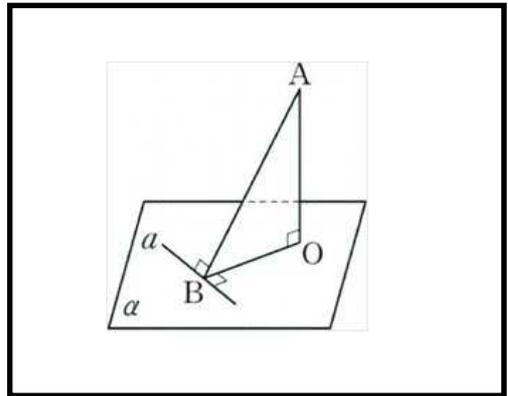
그렇게 무수한 문제를 풀어나가면서 **자기도 모르게 삼수선정리를**

사용하고 있는, 그런 본인을 발견하셔야 합니다.

자, 삼수선의 정리가 중요한건 알았고. 그럼 도대체 언제 ! 삼수선의

정리를 활용하는가 한번 봅시다.

그림한번 보죠.



그림을 보면 알 수 있지만, 우린 저 그림의 “일부” 만 주어져 있으면,

나머지를 채울 수 있습니다.

아니, **채울 줄 알아야 하고 채워야만 합니다.**

즉, 여러분이

1.공간 위에 떠있는 점에서

평면에 수선을 내린 것을 본다거나,

2.공간위에 떠있는 점에서

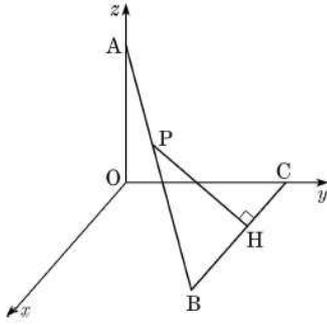
평면에 어떤 직선에 수선을 내린 것

을 보는 즉시,

바로 삼수선의 정리를 활용해야 합니다.

예제 한번 볼까요?

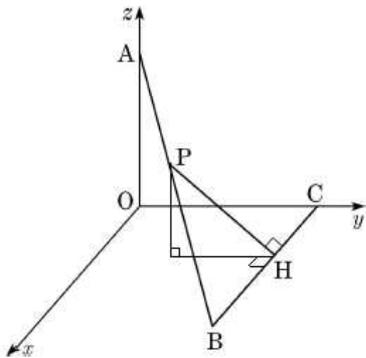
그림과 같이 좌표공간에 세 점 $A(0, 0, 3)$, $B(5, 4, 0)$, $C(0, 4, 0)$ 이 있다. 선분 AB 위의 한 점 P 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, $\overline{PH}=3$ 이다. 삼각형 PBH 의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이는? [4점]



- ① $\frac{14}{5}$
- ② $\frac{16}{5}$
- ③ $\frac{18}{5}$
- ④ 4
- ⑤ $\frac{22}{5}$

보면, 점 P에서 xy 평면 위에 직선 CB에 수선을 내렸죠?

보자마자 아 삼수선! 하고 삼수선 완성해주면 됩니다.



요렇게요 ㅎㅎ.

아시겠죠?

물론 더 나아가, 그냥 공간위에 점 하나 떠있을 때도

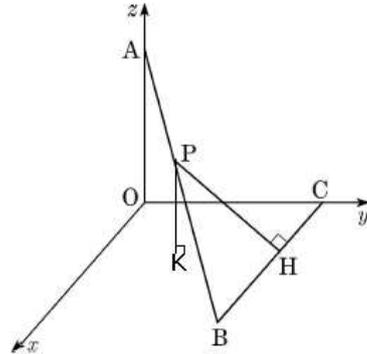
바로 삼수선 쓸 줄 알아야합니다.

방금 한것은, 삼수선의 첫번째 포인트입니다.

하나의 수선만 있으면, or 한 점만 떠있으면,
나머지 수선만 그어주어 완성할 수 있다.

두번째 포인트는, “수선은 만난다”입니다.

옆 그림 다시 볼까요?



자, 여기까지만 진행된 상태에서,

개념이 미숙하신 분들은, 점 K에서 직선 CB로 그은 수선이

어디로 갈지 몰라 하십니다 .

그게 점 H로 같지 안 같지를 어떻게 아냐? 이런식이죠 ..

그게 개념이 덜 된 겁니다.

삼수선의 정리에 의해, 무조건 만납니다. 무조건.

왜? 한 평면을 이뤄야 하니깐.

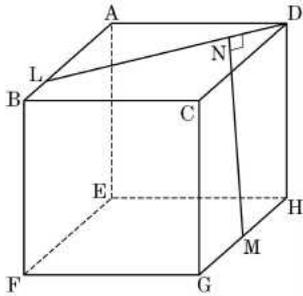
자세한 개념설명은 생략하구요.

다시, 중요한건.

일부분만 보고 바로 나머지를 그려야하며,
그 수선들은 모두 만난다.

한문제 더 보면,

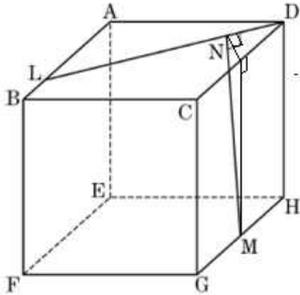
그림과 같이 한 모서리의 길이가 20인 정육면체 $ABCD-EFGH$ 가 있다. 모서리 AB 를 3:1로 내분하는 점을 L , 모서리 HG 의 중점을 M 이라 하자. 점 M 에서 선분 LD 에 내린 수선의 발을 N 이라 할 때, 선분 MN 의 길이는? [4점]



- ① $12\sqrt{3}$ ② $8\sqrt{7}$ ③ $15\sqrt{2}$
- ④ $4\sqrt{29}$ ⑤ $4\sqrt{30}$

점 M에서 직선 LD로 수선그은거 보이죠??

보자마자 삼수선!!! 하고 다른 수선들을 그려줬어야 합니다.

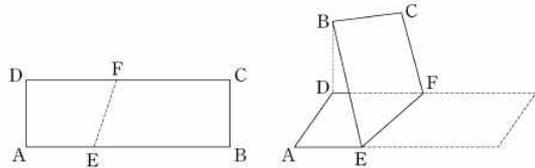


이렇게요.

이게자꾸 바로바로 안되면 연습이 아주많이. 필요하단 겁니다.

또 볼까요??

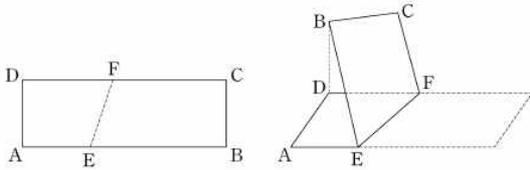
그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\overline{AD}=3$ 인 직사각형 $ABCD$ 모양의 종이가 있다. 선분 AB 위의 점 E 와 선분 DC 위의 점 F 를 연결하는 선을 접는 선으로 하여, 점 B 의 평면 $AEFD$ 위로의 정사영이 점 D 가 되도록 종이를 접었다. $\overline{AE}=3$ 일 때, 두 평면 $AEFD$ 와 $EFCB$ 가 이루는 각의 크기가 θ 이다. $60\cos\theta$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이고, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]



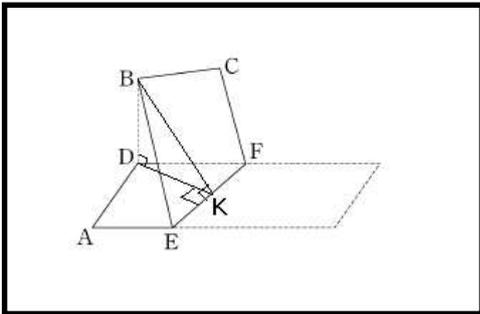
풀어보세요 ㅎㅎ 13수능문제입니다. 오답률 77% 였구요.

공간도형치곤 쉬웠던 문제이군요.

그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\overline{AD}=3$ 인 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. 선분 AB 위의 점 E와 선분 DC 위의 점 F를 연결하는 선을 접는 선으로 하여, 점 B의 평면 AEFD 위로의 정사영이 점 D가 되도록 종이를 접었다.
 $\overline{AE}=3$ 일 때, 두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각의 크기가 θ 이다. $60\cos\theta$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이고, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]



그려볼까요?? 삼수선 바로 했죠??



아. 쉽네요.

B와 D에서 선분 EF에 그은 직선이 점 K에서 만난다는걸

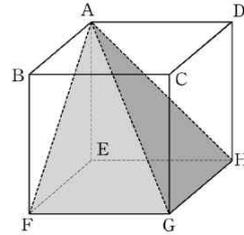
절대 잊으면 안됩니다. 그게 삼수선의 정리인걸요.

여기서 만나나??? 이려고 계시면 안된다는 겁니다 ㅠ

이제 “이면각”으로 한번 가봅시다.

다음 문제 풀어볼게요.

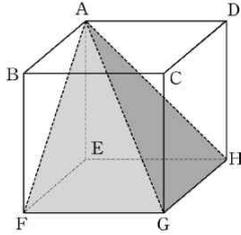
정육면체 ABCD-EFGH에서 평면 AFG와 평면 AGH가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos^2\theta$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{1}{6}$
- ② $\frac{1}{5}$
- ③ $\frac{1}{4}$
- ④ $\frac{1}{3}$
- ⑤ $\frac{1}{2}$

풀이는 다음장에.

정육면체 ABCD-EFGH에서 평면 AFG와 평면 AGH가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos^2\theta$ 의 값은? [3점]



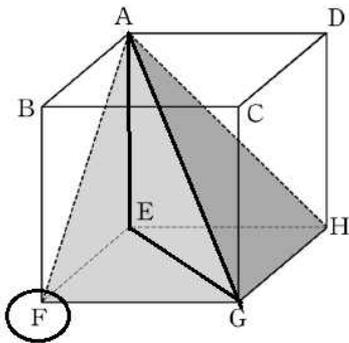
- ① $\frac{1}{6}$
- ② $\frac{1}{5}$
- ③ $\frac{1}{4}$
- ④ $\frac{1}{3}$
- ⑤ $\frac{1}{2}$

보면, 이면각을 구하라는 문제죠?

두 가지 풀이를 볼 겁니다.

1. 삼수선을 이용한 풀이.

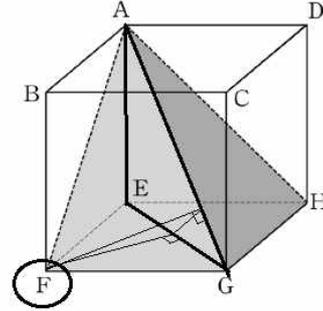
점 F를, 평면 AEG 위에 떠있는 점이라 생각해봅시다.



요렇게요.

보이지요?

그럼 주저 말고 바로 뭐한다구요??? 네. 삼수선.

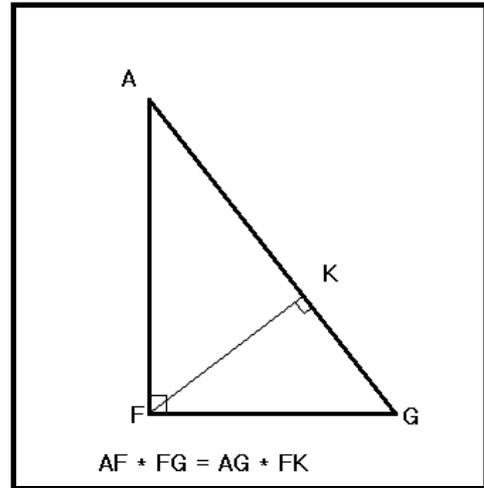


아하. 그렇죠?

그럼 직각삼각형이 등장하므로, 우린 $\cos \frac{\theta}{2}$ 를 구할수 있습니다.

그 후 답을 구해주면 되겠죠? ㅎㅎ

답 구하는 과정은 한부분만 쓰자면,



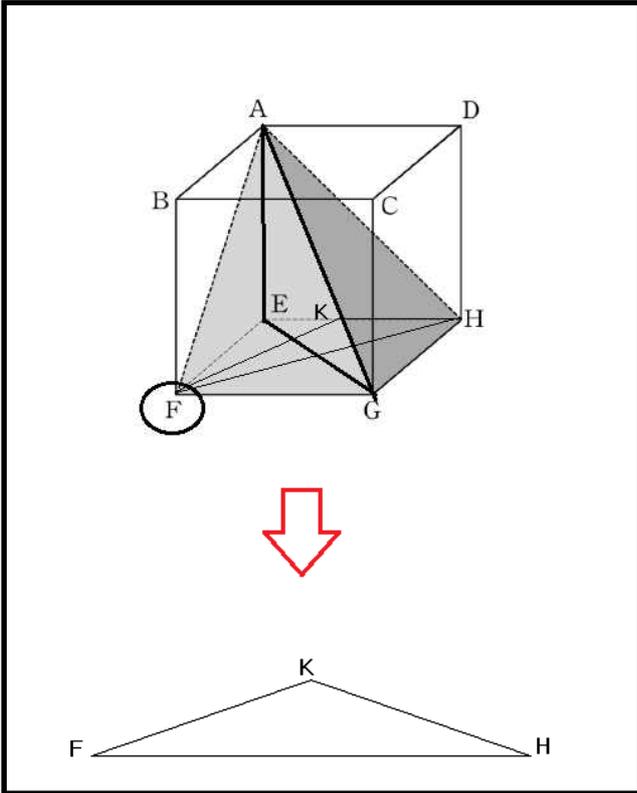
넓이를 이용하여 FK 를 구하는 방법입니다.

다들 알고있겠지만, 많이 나오는 것이니 한번더 숙지하시고,

구체화하고 가세요.

2. 이면각을 이용한 풀이.

다음 그림을 봅시다.



무슨소리냐면, 삼수선이용하여 직각삼각형만들어 풀 수도 있지만,

애초에 “각”만 구하면 되므로,

각을 구할 수 있는 수단만 사용하면 됩니다.

여러가지가 있는데, 그중 하나가

제2 코사인 법칙입니다.

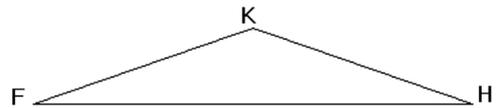
개념잇으신건 아니겠요 ...ㅠㅠ

혹여나, 혹여 잊으셨을까봐, 다시한번 보고 가겠습니다.

* 제2 코사인 법칙

위와 같은 삼각형에 대해서 아래와 같은 식이 성립하며
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
 이것을 제 2 코사인 법칙이라 부른다.

아하. 아무튼 각도를 알 수 있단 거군요.



차이 그림다시보면,

우린 세변의 길이를 알 수 있죠?? 그러므로 각 FKH도 손쉽게 구할 수
 있습니다.

이면각 풀이였구요.

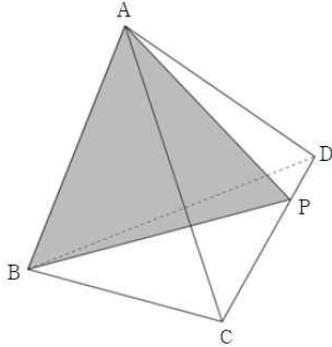
>> 제 2코사인은 교육과정에서 제외되었습니다.

확실히 삼수선을 활용해서 “직각삼각형”만드는 문제만 나올
 확률이 무지매우많이 높네요. -2016. 1.19

다음문제 보시죠.

(2012년 7월 고3 모의고사 21번문항)

그림과 같이 정사면체 ABCD의 모서리 CD를 3:1로 내분하는 점을 P라 하자. 삼각형 ABP와 삼각형 BCD가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\theta$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]

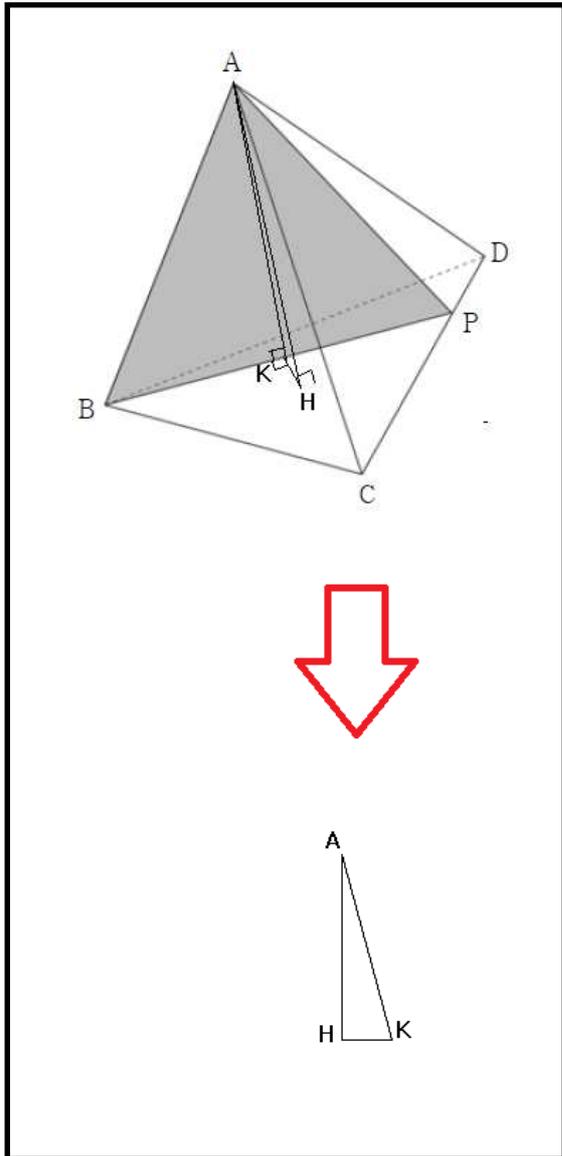


꼭 풀어보세요 ㅠㅠ 여백도 드릴터이니.

자 문제보면, 이면각 문제죠 ?

보자마자 두가지로 풀어야죠 뭐.

근데 이걸 삼수선이 더 빠를듯 싶네요.



정사면체 꼭지점에서 내린 수선은 무게중심으로 가는건 알죠? ㅎㅎ.

자 기본틀은 이정도 이고, 한발 더 나가보겠습니다.

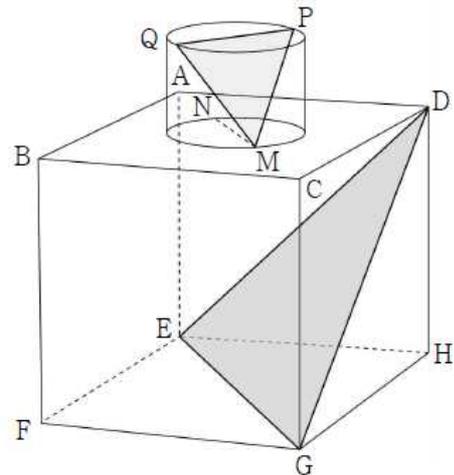
다음 문제 볼게요. 익숙하죠 ㅎㅎ ?

어번 7월 모의고사 30번문항 입니다. (-작성할 때가 2014년 입니다.)

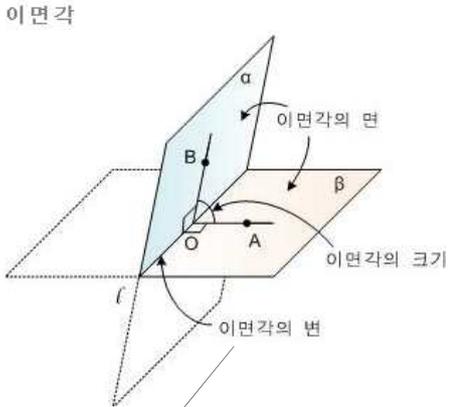
한 변의 길이가 4인 정육면체 $ABCD - EFGH$ 와 밑면의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이고 높이가 2인 원기둥이 있다. 그림과 같이 이 원기둥의 밑면이 평면 $ABCD$ 에 포함되고 사각형 $ABCD$ 의 두 대각선의 교점과 원기둥의 밑면의 중심이 일치하도록 하였다. 평면 $ABCD$ 에 포함되어 있는 원기둥의 밑면을 α , 다른 밑면을 β 라 하자.

평면 $AEGC$ 가 밑면 α 와 만나서 생기는 선분을 \overline{MN} , 평면 $BFHD$ 가 밑면 β 와 만나서 생기는 선분을 \overline{PQ} 라 할 때, 삼각형 MPQ 의 평면 DEG 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{b}{a}\sqrt{3}$ 이다. $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 서로소인 자연수이다.)

[4점]



자, 익숙하니 바로 해설을 하죠.
 정사영은 따로 다루진 않을게요. 필요하다면 보충칼럼으로하고,
 정사영도 결국 이면각을 구해야하므로,
 그 이면각을 이면각이나 삼수선으로 구한다 했습니다.
 그런데, 이면각 개념을 다시 보면,

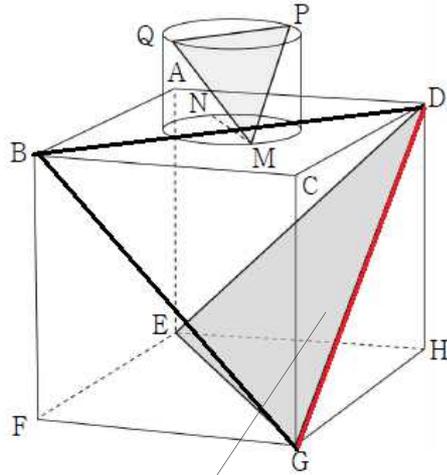


보시다시피. 이면각구하기 위해선 항상
“이면각의 변”이 존재해야합니다.

평면과 평면사이의 교선이죠.
 그런데 없다면요?

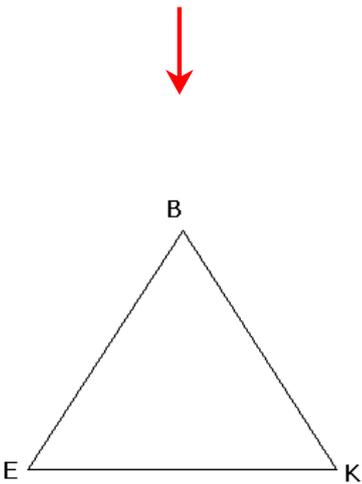
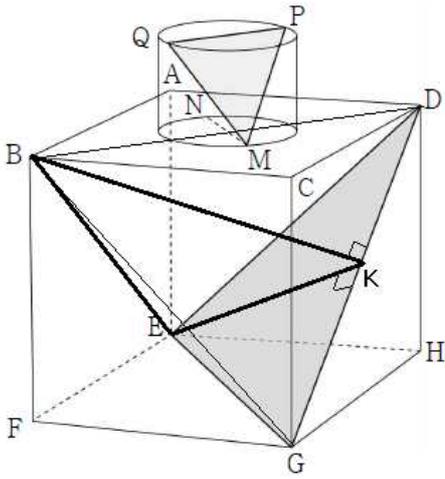
“만들어야죠”

이렇게요.



변 DG가 교선이죠? 삼각형 QPM과 BGD는 닮음입니다.
 문제읽으면 알수 있죠?
 전 삼각형 QPM을 늘린뒤 평행이동하여 교선을 만든겁니다.
 이게 중요해요.

애시당초 이면각을 쓰려면 교선을 구해야하니,
 그 교선을 구하는데에 혈안이 되어있어야 합니다.
 그 후, 뭐 이면각으로 풀어도 되고, 삼수선으로 풀어도 되죠.
 이걸 이면각이 편하겠네요.
 이면각으로 풀기 위해선 어차피 삼수선의 일부를 써야하는데,
 다 그린 뒤 모습은 다음과 같습니다.



그럼 BEK 는 BK 와 EK 길이가 같은 이등변이고,

각 BKE 구해주면 되죠?

뭐..제2코사인 써도 되는거구요.

쉽습니다.

정리!

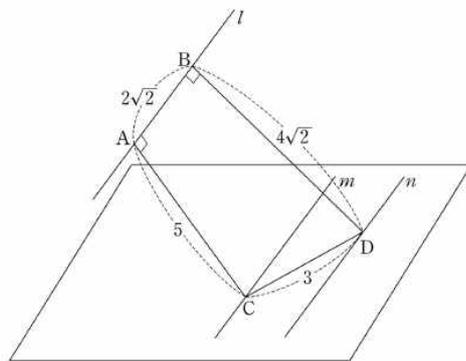
평면이든 도형이든 교선이 없으면

어떻게든 교선을 만든다.

자, 유명한 기출 하나더보고 마칠게요.

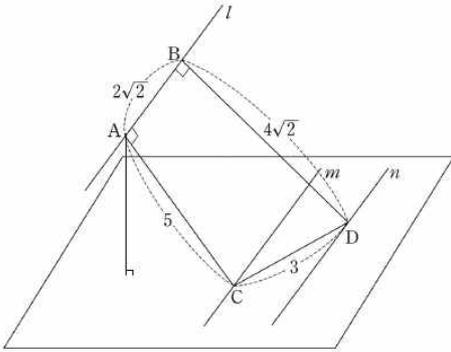
같은 평면 위에 있지 않고 서로 평행한 세 직선 l, m, n 이 있다. 직선 l 위의 두 점 A, B, 직선 m 위의 점 C, 직선 n 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\overline{AB} = 2\sqrt{2}, \overline{CD} = 3$
- (나) $\overline{AC} \perp l, \overline{AC} = 5$
- (다) $\overline{BD} \perp l, \overline{BD} = 4\sqrt{2}$



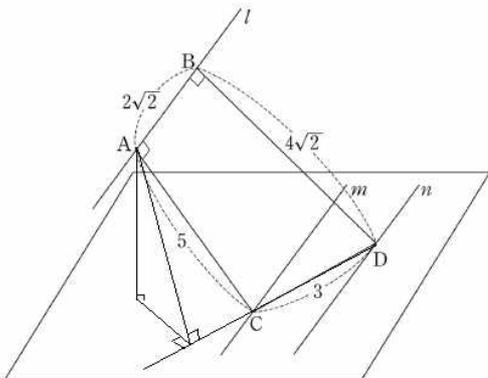
두 직선 m, n 을 포함하는 평면과 세 점 A, C, D를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $15 \tan^2 \theta$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]

이면각을 구하라네요 ! ACD 와 바닥이 이루는 각인데,
보자마자 바닥에서 점A가 떠있는것을 보고 삼수선임을 직감합니다.



어? 그런데 교선이 있긴한데..부족하죠? 선분 CD에다가는 수선을
내릴 수 없습니다.

그래서 다음과 같이 해야죠.



CD 를 늘려서 A에서 수선을 내릴 수 있게끔 교선을 만들어줍니다.

끝이네요 그러면.

이 문제에서 이렇게 풀었다가 중요한게 아니라,
여러분이 수능날 이면각 구하는 문제를 만났을 때,
교선이 없으면 어떻게 해서든 그 교선을 설정할 수 있느냐.
그게 관건입니다.
그것만 잘되었다면 웬만한 공간도형은 손쉽게 해결가능하죠 ㅎㅎ
이번 7월 30번도 5분정도만에 무난히 풀었을 겁니다.
다음시간에는 정사영 보충칼럼으로 뵙겠습니다.
감사합니다.

P.S 그냥 보지만 말고 꼭 다시 다풀어보고 기출도 다 풀어보세요 .

“공간도형의 끝”의 보충칼럼입니다.
 (- 두개의 칼럼을 합쳤습니다. 16/01/19)

적용을 어려워 하는 분들이 계셔서, 어려웠던 기출 하나와,
 ebs를 다뤄보려 합니다.

한 가지만 “다시” 정리하고 가자면,

삼수선의 정리를 활용하여 이면각을 구할 때,

이면각을 구할 두 평면을 먼저 찾는다.
 ↓
 바닥 평면과 그 평면에서 위로 떠 있는 점을 찾는다.
 ↓
 삼수선 완성.

보편적으로 이런 패턴입니다.

처음엔 이걸 “의식” 해가며 적용연습하셔야 할 겁니다.

그러다가 이걸로 풀리는걸 점점 느끼다보면

자유자재로 삼수선쓰고 있는 자신을 발견하겠지요 ㅋㅋ..

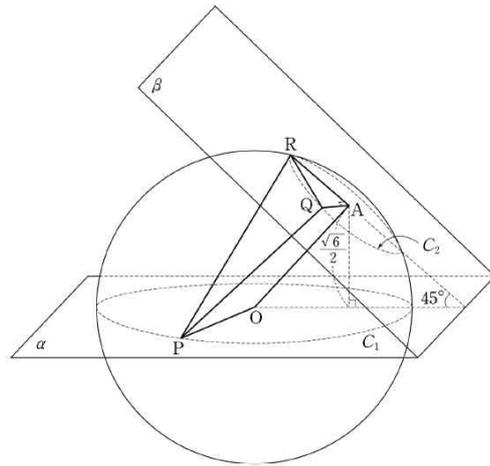
시작해 봅시다. 펜 준비하시고.

다 풀 문제더라도 한번 해보시길.

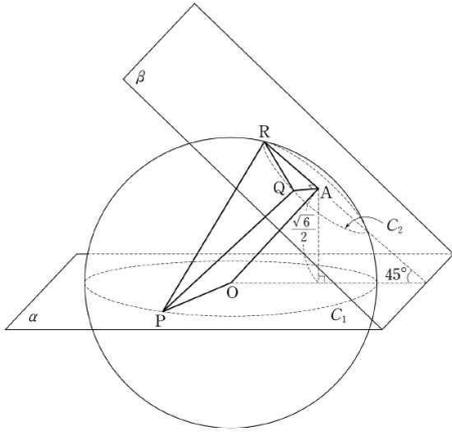
반지름의 길이가 2인 구의 중심 O를 지나는 평면을 α 라 하고, 평면 α 와 이루는 각이 45° 인 평면을 β 라 하자. 평면 α 와 구가 만나서 생기는 원을 C_1 , 평면 β 와 구가 만나서 생기는 원을 C_2 라 하자. 원 C_2 의 중심 A와 평면 α 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 일 때, 그림과 같이 다음 조건을 만족하도록 원 C_1 위에 점 P, 원 C_2 위에 두 점 Q, R를 잡는다.

- (가) $\angle QAR = 90^\circ$
- (나) 직선 OP와 직선 AQ는 서로 평행하다.

평면 PQR와 평면 AQPO가 이루는 각을 θ 라 할 때, $\cos^2\theta = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



그림만 떼와보면,



구하라는 각은, 평면 PQR 과 AOPQ 사이의 각입니다.

두 평면을 찾았으니, 바닥평면을 설정해보죠!

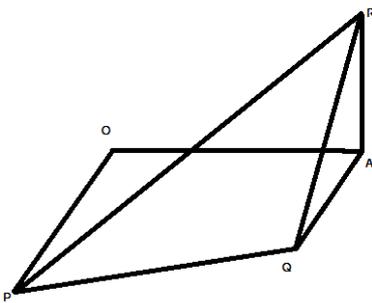
전 AOPQ 를 바닥으로 삼겠습니다.

그럼 떠있는 점은 뭐죠??

넵.

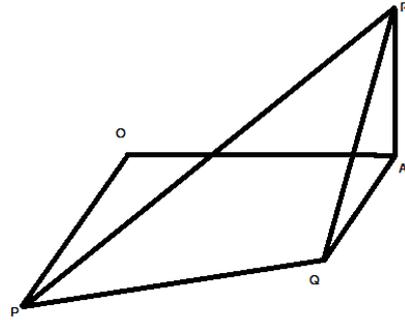
R입니다.

주어진 상황을 보기 편하게 바꾸면,



이렇게 되겠죠?

바닥평면 AOPQ, 떠 있는점 R.



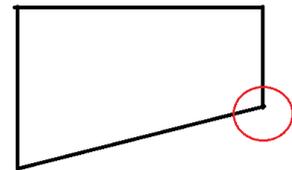
그럼 삼수선을 완성시켜야겠죠?

R에서 바닥평면에 수선 내리고, 교선에도 수선내리면 됩니다.

그런데 대부분, 그 중에서도 이 문제를 처음 접하는 수험생분들은,

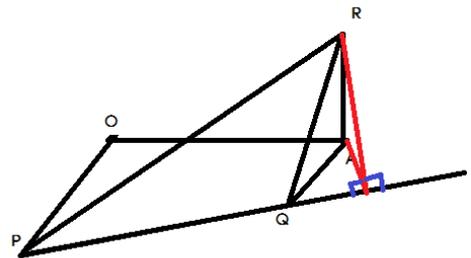
교선에 수선을 Q 에다가 내려요.

Q에다가 내릴 수가 없습니다.

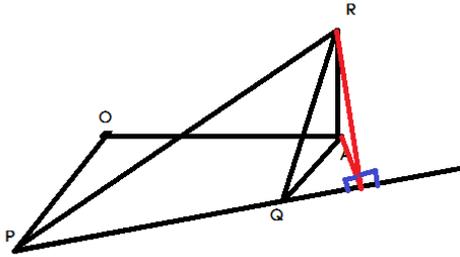


그쵸?

그래서 교선을 “연장” 해줘야 합니다.



이렇게요.



삼수선도 완성했으니,

이제 저 사이각을 구하고, \cos 값도 구하면 됩니다.

뭐.. 쉽네요 ㅎㅎ 어려울게 전혀 없죠?

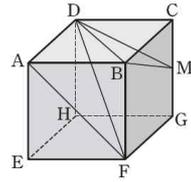
삼수선이야 뭐 이렇게 그을 줄만 알면 다 풀린다 자부합니다.

교선이 없으면?

만들어주면 된다고 전 칼럼에서 했었구요.

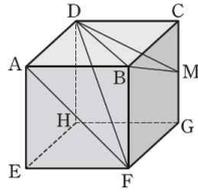
다음 문항 보시죠.

11 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 $ABCD-EFGH$ 에서 모서리 CG 의 중점을 M 이라 하자. 평면 AFD 와 평면 BMD 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $20\cos^2\theta$ 의 값을 구하시오.



풀어보세요. 예전 수능완성 문항입니다.

11 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 ABCD-EFGH에서 모서리 CG의 중점을 M이라 하자. 평면 AFD와 평면 BMD가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $20 \cos^2 \theta$ 의 값을 구하시오.

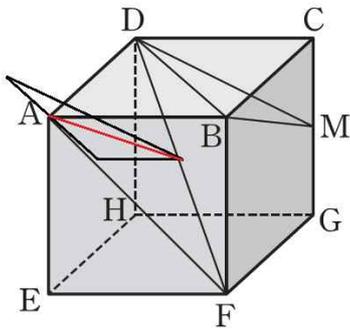


자, 평면두개를 살펴보면, AFD와 BMD 인접할 수 있습니다.

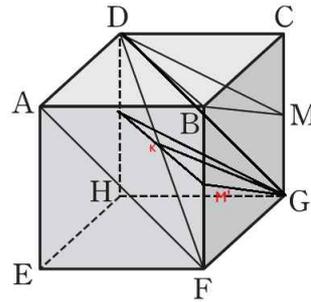
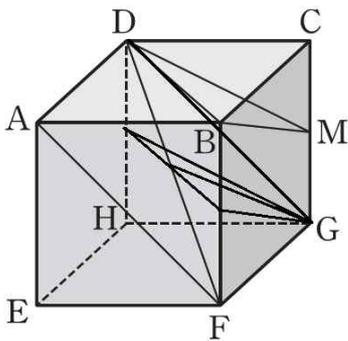
흠. 일단은 교선이 없기 때문에, 평면을 이동시켜 교선을

만들어줘야 겠죠?

교선을,



이렇게 해도 되는데, 이런 방법도 있습니다.



평면 AFD를 확장해서 AFGD라고 한겁니다. 가능하죠?

그래서 평면 BMD를 내려 교선을 만들어줬습니다.

교선을 KG라 할게요.

자 교선도 있으니, 바닥평면을 설정해주면,

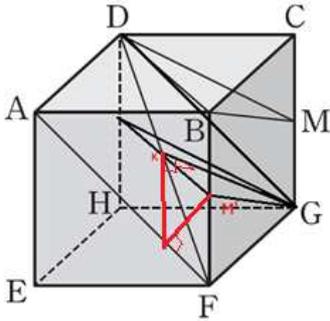
AFGD가 됩니다.

떠있는 점은?

네. M'이죠.

다음 장에서 계속 볼게요.

삼수선을 그려주면,



이렇게 됩니다.

자. 이렇게 두 문항 살펴봄으로써 제 칼럼 풀이법을 다시 한번 살펴보았습니다.

9평날, 수능날 무슨 문제가 출제될런진 모르겠지만,

삼수선을 써야 한다.. 하면

1. 바닥평면. 2. 떠있는점.

꼭 적용하세요.

+ 아 그리고 복습 좀 하세요 제발

이 칼럼들은 제가 수업 때 하는 내용을 쪼개고 쪼개서 쓴 칼럼이지만, 수업을 듣든 될 하든 복습을 안하면, 즉 체화를 안하면 뭐 아무 소용 없습니다. 알죠?

수능장에서 어디보자 이게 떠있는 점이고 이게 평면인가?

이렇게 아니잖아요.

보자마자 식씩 그으려면 복습의 복습. 체화에 체화가 되셔야 합니다.

2016. 1. 29

현재 2년전 썼던 제 모든 칼럼이 개정중이고,

현 교육과정에 맞춰 차근차근 써내려가는중입니다.

질문이 있으면 아래 제 블로그 "홍현빈.com" 에 오셔서 학습상담소에 질문주세요. (이 칼럼을 받은 커뮤니티에 올려주셔도 됩니다만 제 작성시간과 많은 차이가 나는 때에는 답변이 늦습니다.)

또한 제 블로그에 그간 모든 수학칼럼이 모여있습니다.