

정적분 테크닉

著 : 雀 (ver. 20230722)

sukital729@gmail.com

(1) 각변환

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = -\cos\theta$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = -\cos\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = \sin\theta$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = -\sin\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

$$\tan\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = -\cot\theta$$

$$\tan\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = \cot\theta$$

(2) 덧셈정리

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \quad (1 \mp \tan\alpha\tan\beta \neq 0)$$

(3) 배각공식

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \quad (1 - \tan^2\alpha \neq 0)$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha} \quad (1 - 3\tan^2\alpha \neq 0)$$

(4) 반각공식

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

(5) 곱을 합 또는 차로 고치는 공식

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$$

(6) 합 또는 차를 곱으로 고치는 공식

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

(7) 삼각함수의 합성

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right), \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

(8) 삼각함수 항등식

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

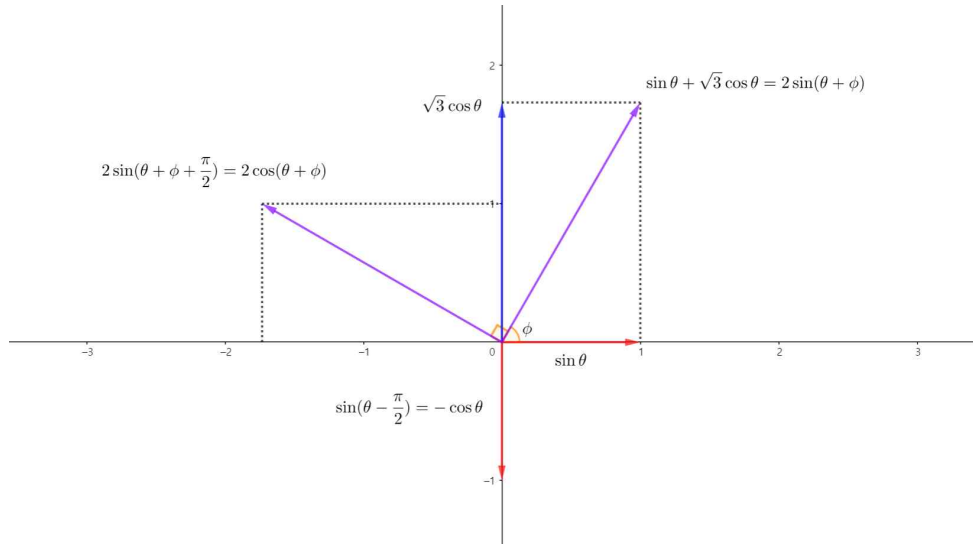
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

(9) 부정적분과 미분

$$\textcircled{1} \frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$$

$$\textcircled{2} \int\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)dx = f(x) + C$$

(10) 삼각함수 위상자(Phasor)

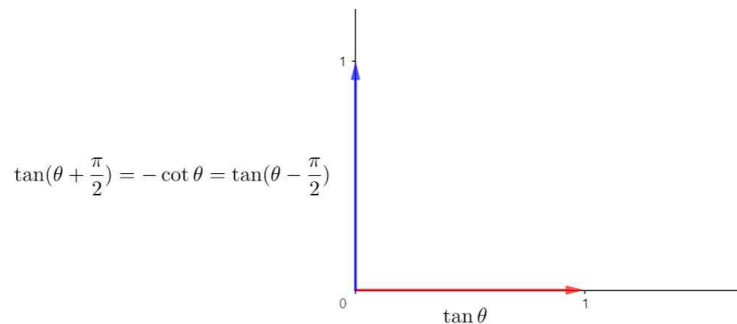


- x 축의 양의 방향을 \sin 축, y 축의 양의 방향을 \cos 축으로 설정하여 삼각함수의 위상을 벡터로 표현한다.
- 각이 더해질 경우 위상자는 길이는 유지된 채 반시계방향으로 회전한다.
- 위상자가 표현하는 삼각함수의 계수는 그 위상자의 길이로 표현된다.
- 서로 다른 두 위상자를 벡터합하면 이는 각 위상자가 표현하는 삼각함수의 합성과 같다.

가령, 위 사진에서 $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin(\theta + \phi)$ 이고 $\phi = \frac{\pi}{3}$ 이다.

- $\sin\theta$ 위상자를 시계방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 회전시키면 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ 이며, 이는 $-\cos$ 축이므로 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$ 이다.

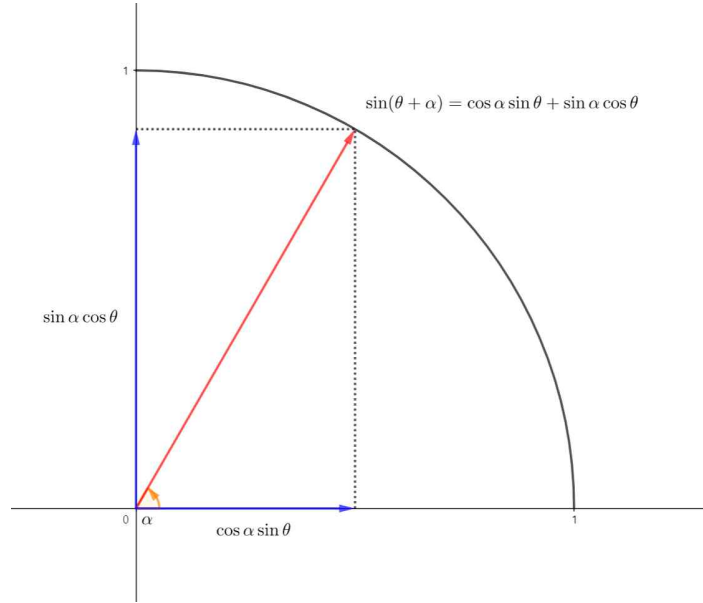
- \sin 을 \csc 로, \cos 을 \sec 로 바꾸면 \csc 와 \sec 에 대한 각변환이 가능하나 덧셈정리와 합성은 성립하지 않는다. 즉, $\csc\theta + \sqrt{3}\sec\theta = 2\csc(\theta + \phi)$ 는 성립하지 않는다.



- \tan 와 $-\cot$ 의 경우 위와 같이 xy 평면의 제 1사분면만을 이용하여 도시할 수 있다. 이 경우 주기가 π 이므로 시계방향으로 회전하는 경우 돌아간 각도를 $\frac{3}{2}\pi$ 가 아닌 $\frac{\pi}{2}$ 로 본다.

(11) 삼각함수 위상자의 활용

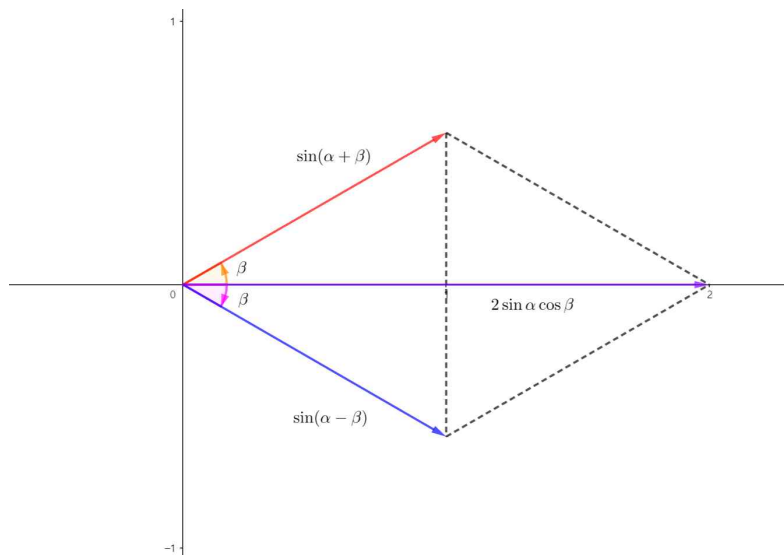
- 삼각함수 위상자를 사용하면 (1), (2), (5), (6), (7)의 공식들은 모두 증명 가능하다. 이에 대한 예시로 (2)와 (5)의 첫 번째 공식의 증명을 제시해 놓는다.



그림과 같은 단위원에서 $\sin(\theta + \alpha)$ 는 $\sin\theta$ 축에서 길이 1인 위상자가 각도 α 만큼 회전한 것이다. 따라서 위상자의 종점에서 \sin 축, \cos 축에 각각 수선의 발을 내리면 원점을 시점으로 하고 두 수선의 발을 종점으로 하는 두 위상자의 길이는 각각 $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ 이다. 즉 처음의

$\sin(\theta + \alpha)$ 위상자(빨간색)를 \sin 축 성분과 \cos 축 성분의 두 위상자(파란색)로 분해할 수 있고

이들의 길이는 각각 $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ 이므로, $\sin(\theta + \alpha) = \cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta$ 가 성립한다.



그림과 같이 기준각이 α 인 위상 평면에서 $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$ 는 길이가 1인 $\sin\alpha$ 축 위

상자가 각각 β , $-\beta$ 만큼 회전한 것이다. 따라서 이들을 합성한 보라색 위상자는 $\sin\alpha$ 축으로 길이가 $2\cos\beta$ 인 위상자이므로 $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$ 이고 증명이 완료되었다.

이와 비슷한 방법으로 (1), (2), (5), (6), (7)의 공식들을 모두 증명할 수 있다.

(12) 부정적분의 기본 성질

$$\textcircled{1} \int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\textcircled{2} \int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \quad (\text{복부호동순})$$

(13) 치환적분법

$$\textcircled{1} g(x) = t \text{ 일 때, } \int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

$$\textcircled{2} \int f(x)dx = F(x) + C \text{ 일 때, } \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

$$\textcircled{4} \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

(14) 바이어슈트라스 치환 (Weierstrass Substitution)

- 바이어슈트라스 치환은 삼각함수의 유리 적분을 유리식의 적분으로 바꿔주는 치환법이다.

$$\tan \frac{x}{2} = t$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

(15) 오일러 치환 (Euler's Substitution)

- 오일러 치환은 유리 이변수 함수 R 에 대하여 다음과 같은 부정적분을 계산하기 위한 치환법이다.

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

[1] 제 1종 오일러 치환

$a > 0$ 일 때,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} + t,$$

$$x = \frac{c-t^2}{\pm 2t\sqrt{a-b}}$$

와 같이 치환한다.

[2] 제 2종 오일러 치환

$c > 0$ 일 때,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c},$$
$$x = \frac{\pm 2t\sqrt{c-b}}{a-t^2}$$

와 같이 치환한다.

[3] 제 3종 오일러 치환

방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 이 두 실근 α, β 를 가질 때,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t,$$
$$x = \frac{\alpha\beta - \alpha t^2}{a-t^2}$$

와 같이 치환한다.

(16) 부정적분 공식 ($C \in \mathbb{R}$)

1. $\int dx = x + C$
2. $\int adx = ax + C$ ($a \in \mathbb{R}$)
3. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ ($-1 \neq n \in \mathbb{R}$)
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($0 < a \neq 1$)
7. $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
9. $\int \cos x dx = \sin x + C$
10. $\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$
11. $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$
12. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
13. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

14. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
 15. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
 16. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
 17. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$
 18. $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + C$
 19. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + C$
 20. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$
 21. $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + C$
 22. $\int \sin^{-1} x dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$
 23. $\int \cos^{-1} x dx = x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C$
 24. $\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

(17) 헤비사이드 법 (부분분수 분해)

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{x-a_i} = \frac{b_1}{x-a_1} + \frac{b_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{b_n}{x-a_n} \text{ 일 때}$$

$$\frac{f(x)}{(x-a_i)} = h_i(x) \text{ 라 하면 } b_i = \frac{g(a_i)}{h_i(a_i)} \text{ 가 성립한다. } (1 \leq i \leq n)$$

(18) 부분적분법

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(19) 삼각함수의 거듭제곱의 부정적분 공식 (Reduction Formula)

$$n \in \mathbb{N} - \{1\},$$

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

$$\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx$$

(20) 이상적분 (Improper Integration)

- 이상적분은 적분구간의 끝 값이 특정 실수값 또는 $\pm\infty$ 로 접근할 때의 정적분이다. (양끝 값이 모두 극한으로써 작용할 수도 있다.)

즉,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx, \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx, \quad \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

등과 같은 정적분이다. (Apostol, T (1967), Calculus, Vol. 1 (2nd ed.), Jon Wiley & Sons.) 또한 기호의 남용(abuse of notation)에 의해 적분구간에 $\pm\infty$ 등을 포함하여 쓰기도 한다.

- 예를 들어, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{1}\right) = 1$ 이다.

- 또한, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 의 경우 $x=0$ 에서 정의되지 않지만 구간 $[0, 1]$ 에서의 이상적분은 정의 가능하다. 즉,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{a}) = 2$$

이다. 이상적분을 극한으로 변환하여 계산할 때 극한이 발산하면 이상적분이 발산한다고 하고, 대표적인 예시로 $\frac{1}{x}$ 를 0부터 1까지 적분한 이상적분은 발산한다. 이상적분의 정의에 따른 극한이 수렴할 경우 그 수렴값을 이상적분의 값으로 한다.

- 적분구간의 내점에서 함수가 무한대로 발산하는 등 유계가 아닌 구간이 존재하면, 그 점을 기점으로 적분구간을 쪼갠 후 적분을 진행해야 한다. 예를 들어,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx &= \lim_{s \rightarrow 0^-} \int_{-1}^s \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^-} 3(1 - \sqrt[3]{s}) + \lim_{t \rightarrow 0^+} 3(1 - \sqrt[3]{t}) = 3 + 3 = 6. \end{aligned}$$

- 그러나 이와 비슷한 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ 는 0을 기점으로 한 각각의 적분이 모두 발산하므로 동일

한 논리로 계산할 수 없다. (기함수의 적분을 생각하면 직관적으로 0이겠지만 값이 정의되지 않는다.)

(21) 코시 주요값 (Cauchy Principal Value)

- 오귀스탱 루이 코시가 도입한 코시 주요값은 일반적인 정적분으로 값을 구할 수 없는 일부 이상적분의 값을 구하는 방법 중 하나이다.

[def] 함수 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 가 $x = x_0$ 근처에서 발산한다고 하자. 그러면 $a < x_0 < b$ 에서의 적분

$$\int_a^b f(x) dx$$

는 리만 적분 또는 르베그 적분으로서 그 값이 존재하지 않을 수 있다. 그러나 만약 다음과 같은 극한이 수렴한다면, 이를 코시 주요값으로 정의한다.

$$PV \int_a^b f(x) dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{x_0 - \epsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \epsilon}^b f(x) dx \right]$$

앞서 언급된 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ 는 코시 주요값을 적용하면

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-a} \frac{1}{x} dx + \int_a^1 \frac{1}{x} dx \right) = 0$$

과 같이 계산할 수 있다. 코시 주요값은

$$PV \int f(x) dx, \quad \text{p.v.} \int f(x) dx, \quad \int_L^* f(z) dz$$

등으로 표기한다.

(22) Cauchy-Schlömilch Transformation

- Cauchy-Schlömilch Substitution 또는 Cauchy-Schlömilch Transformation은

$$u = x - \frac{1}{x}$$

일 때

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} F(u) dx = PV \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx$$

임을 이용하는 치환이다. ($F(u)du$ 가 아니라 $F(u)dx$ 임에 유의하라.)

pf) $u = x - \frac{1}{x}$, $x^2 - ux - 1 = 0$ 에서

$$x_{\pm} = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 4}}{2} \quad (\text{복부호동순})$$

이고

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(u)dx = \int_{-\infty}^{0-} F(u)dx_{-} + \int_{0+}^{\infty} F(u)dx_{+} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)(x_{-}' + x_{+}')du$$

이다. 한편

$$x_{\pm}' = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4}} \right)$$

이므로 $x_{-}' + x_{+}' = 1$ 이고

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(u)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)(x_{-}' + x_{+}')du = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)du$$

이다. (Glasser, M. L. (1983). A remarkable property of definite integrals. mathematics of computation, 561-563.)

(23) Glasser's Master Theorem

- (22)번의 $u = x - \frac{1}{x}$ 를

$$u = x - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{x - C_j} \quad \dots \quad [1]$$

로 대체해도

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} F(u)dx = PV \int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx \quad \dots \quad [2]$$

가 성립한다는 것이 알려져 있다. (여기서 $\{a_j\}$ 는 양의 실수열, C_j 는 실수이다.)

pf) 일반성을 잃지 않고 $C_1 < C_2 < C_3 \dots$ 라 하자. 이때 식 [1]은 x 에 대하여 다음과 같은 n 차식으로 환원된다.

$$x^n - \left(u - \sum_{j=1}^{n-1} C_j\right)x^{n-1} + \dots = 0$$

대수학의 기본정리에 의해 이 방정식은 복소 범위에서 (중복을 포함하여) n 개의 근을 가지고, n 개의 근 $x_i \in \mathbb{C}$ ($1 \leq i \leq n$)에 대하여 근과 계수의 관계에 의해

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = u - \sum_{j=1}^{n-1} C_j$$

가 성립한다. 따라서

$$x_1' + x_2' + \dots + x_n' = 1$$

이고,

$$\begin{aligned} I &= \left(\int_{-\infty}^{C_1^-} dx_1 + \int_{C_1^+}^{C_2^-} dx_2 + \dots + \int_{C_{n-1}^+}^{\infty} dx_n \right) F(u) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(u)(x_1' + x_2' + \dots + x_n') du = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) du \end{aligned}$$

이다. 이와 같은 논리를 그대로 적용하면 다음과 같은 치환을 적용해도 식 [2]가 성립한다.

$$u = x - \sum_j a_j \cot[(x - C_j)^{-1}]$$

위 정리를 이용하면 특정한 값으로 수렴하는 아주 복잡한 적분식을 만들어낼 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2 + 1} du = [\tan^{-1} u]_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

이므로

$$u = x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

를 대입하여 Glasser's Master Theorem을 적용하면

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)^2 + 1} dx = \pi$$

이고, 식을 전개하여 짝수차항만 추출하면 다음 적분을 얻는다.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{14} - 15x^{12} + 82x^{10} - 190x^8 + 184x^6 - 60x^4 + 16x^2}{x^{16} - 20x^{14} + 156x^{12} - 616x^{10} + 1388x^8 - 1792x^6 + 1152x^4 - 224x^2 + 16} dx = \frac{\pi}{2}$$

이와 같이 복잡한 적분이 주어졌을 때 Glasser's Master Theorem을 이용하기 위해 식을 변형하여 역추적을 하는 것도 하나의 방법이다. (이를 이용하지 않는다면 복소적분과 매우 복잡한 계산과정을 거쳐야할 것이다.)

예제) Glasser's Master Theorem을 이용하여 다음 식이 성립함을 증명하시오.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^8 - 4x^6 + 9x^4 - 5x^2 + 1}{x^{12} - 10x^{10} + 37x^8 - 42x^6 + 26x^4 - 8x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2}$$

Glasser, M. L. (1983). A remarkable property of definite integrals. mathematics of computation, 561-563.

(24) 확장된 Glasser's Master Theorem

- Glasser's Master Theorem의 또 다른 유용한 점은 sum의 끝 범위(n)가 유한할 필요가 없다는 것이다. 즉, $u = x - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{x - C_j}$ 에서 n 이 $+\infty$ 로 발산하는 무한급수의 형태로 치환이 주어져 있더라도 정리는 여전히 성립한다.

$$\pi \cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \pi n} + \frac{1}{z + \pi n} \right)$$

임이 알려져 있으므로 $z = \frac{\pi}{2} - x$ 를 대입하면

$$\pi \tan x = -\frac{1}{x - \pi/2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x + \pi n - \pi/2} + \frac{1}{x - \pi n - \pi/2} \right)$$

을 얻고, 따라서 임의의 적분가능한 함수 f 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x + \tan x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$$

이를 이용하면 다음과 같은 absurd한 적분을 아주 쉽게 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(x+\tan x)^2} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\tan^{-1}x]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1}x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1}x = \pi \\ \int_0^{\infty} \operatorname{sech}^2(x+\tan x) dx &= \int_0^{\infty} \operatorname{sech}^2 x dx = [\tanh x]_0^{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 1 \end{aligned}$$

이를 일반적으로 서술하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

아래 조건을 만족시키는 유리형 함수(Meromorphic Function) $\phi(z)$ 와 \mathbb{R} 에서 르벡(Lebesgue) 적분 가능한 함수 f 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_{\mathbb{R}} f(\phi(x)) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$$

[조건]

Let $\phi(z)$ be any meromorphic function over \mathbb{C} which

1. preserve the extended real line $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ in the sense:

$$\begin{cases} \phi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^* \\ \phi^{-1}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \end{cases} \implies P \stackrel{\text{def}}{=} \phi^{-1}(\infty) = \{p \in \mathbb{C} : p \text{ poles of } \phi(z)\} \subset \mathbb{R}$$

2. Split $\mathbb{R} \setminus P$ as a countable union of its connected components $\bigcup_n (a_n, b_n)$. Each connected component is an open interval (a_n, b_n) and on such an interval, $\phi(z)$ increases from $-\infty$ at a_n^+ to ∞ at b_n^- .
3. There exists an ascending chain of Jordan domains D_1, D_2, \dots that cover \mathbb{C} ,

$$\{0\} \subset D_1 \subset D_2 \subset \dots \quad \text{with} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = \mathbb{C}$$

whose boundaries ∂D_k are "well behaved", "diverge" to infinity and $|z - \phi(z)|$ is bounded on the boundaries. More precisely, let

$$\begin{cases} R_k \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ |z| : z \in \partial D_k \} \\ L_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial D_k} |dz| < \infty \\ M_k \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ |z - \phi(z)| : z \in \partial D_k \} \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \infty \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{L_k}{R_k^2} = 0 \\ M = \sup_k M_k < \infty \end{cases}$$

(위 정리의 증명은 여기서는 생략하기로 한다. 관심 있는 독자들을 위해 마지막 페이지에 증명을 제시해 놓았다.)

이러한 치환이 성립하는 근본적인 이유는 $\phi(z)$ 가 \mathbb{R} 에서 Lebesgue measure를 보존하기 때문이며, \mathbb{R} 에서의 measure-preserving transform의 대표적인 예시가 앞서 살펴본

Glasser's Master Theorem에서의 함수이다.

그러나 위와 같은 확장된 정리는 $\phi(z)$ 가 만족시켜야 할 조건이 너무나도 많기 때문에 활용 가능성이 낮다. 따라서 조건이 조금 더 간단한 또 다른 확장된 정리를 제시하겠다.

[Letac, 1977]

Let α be a real number and μ be a measure on \mathbb{R} which is singular to the Lebesgue measure and satisfies $\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(d\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty$. Then the function

$$\phi(z) = z - \alpha - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{z + i\epsilon - \lambda} + \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) \mu(d\lambda)$$

defines a measurable function on \mathbb{R} that preserves the Lebesgue measure on \mathbb{R} .

Glasser's Master Theorem에서 n 이 $+\infty$ 로 발산해도 무관하다는 시점에서 이미 이 정리의 활용 및 확장 가능성은 무궁무진하다.

[1] Letac, Gérard. "Which Functions Preserve Cauchy Laws?" Proceedings of the American Mathematical Society 67, no. 2 (1977): 277-86. doi:10.2307/2041287.

[2] G. Pólya and G. Szegő. "Problems and Theorems in Analysis" I, II, Problem 118.1 Springer-Verlag, Berlin and New York (1972).

(25) Lobachevsky's Dirichlet Integral Formula

- 연속함수 f 가 $0 \leq x < \infty$ 에 대하여 $f(x+\pi) = f(x) = f(\pi-x)$ 를 만족시킬 때, 즉 f 의 주기가 π 일 때 리만 이상적분으로써의 적분

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} f(x) dx$$

에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

- 또한, 이 공식의 확장된 결과로써 다음이 성립한다.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x f(x) dx$$

- 예를 들어, $f(x) = 1$ 을 대입하여 다음 적분을 얻을 수 있다.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$$

[1] Jolany, H. (2018). An extension of the Lobachevsky formula. Elemente der Mathematik, 73(3), 89-94.

(26) 정적분 테크닉

① 적분 구간을 이용한 치환 ($x \mapsto a+b-x$)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(a+b-x)(-dx) = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

- $f(x) + f(a+b-x)$ 의 정적분이 쉽게 계산되는 경우

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2} dx$$

를 이용하여 정적분을 계산할 수 있다.

② 대칭 치환 ($x \mapsto -x$)

$$\int_{-c}^c f(x) dx = \int_c^{-c} f(-x)(-dx) = \int_{-c}^c f(-x) dx$$

- 이는 ①에서 $a+b=0$ 인 특수한 경우이지만, 마찬가지로 자주 등장한다.

$$\int_{-c}^c f(x) dx = \int_{-c}^c \frac{f(x) + f(-x)}{2} dx$$

(27) 파인만 적분 테크닉 (The Feynman Integration Technique)

- 다음과 같은 적분을 생각하자.

$$I = \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

여기서 x 는 적분변수이고, a 는 상수이다. 따라서 x 에 대해 미분 또는 적분을 할 때 a 는 관여하지 않는다. 하지만 관점을 조금 바꿔 보면 피적분함수인 e^{ax} 를

$$f(x, a) = e^{ax}$$

인 이변수함수로 볼 수도 있을 것이다. 이 관점에 따라 위 적분의 양변을 a 에 대하여 미분(즉, 편미분)해보면,

$$\frac{d}{da} \int e^{ax} dx = \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{1}{a} e^{ax} + C \right] = -\frac{1}{a^2} e^{ax} + \frac{x}{a} e^{ax} = \frac{(ax-1)e^{ax}}{a^2} \dots [3]$$

이다. 한편

$$\frac{d}{da} \int e^{ax} dx = \int \left[\frac{\partial}{\partial a} e^{ax} \right] dx = \int x e^{ax} dx$$

이고 실제로 이는 [3]의 결과와 일치한다. 리처드 파인만에 의해 유명해진 이 적분법은 다음과 같은 라이프니츠 적분 규칙(Leibniz Integral Rule)의 특수한 경우이다.

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{a(z)}^{b(z)} f(x, z) dx = \int_{a(z)}^{b(z)} \frac{\partial f}{\partial z} dx + f(b(z), z) \frac{\partial b}{\partial z} - f(a(z), z) \frac{\partial a}{\partial z}$$

즉, 함수 $f(x, a)$ 가 a 에 대해 미분가능하고 $\frac{\partial f}{\partial a}$ 가 연속함수이면 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{da} \int_b^c f(x, a) dx = \int_b^c \frac{\partial}{\partial a} f(x, a) dx$$

이 테크닉을 이용하면 다음과 같은 특이한 정적분의 값을 구할 수 있다.

$$\phi(a) = \int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx = 2\pi \ln |a| \quad (|a| > 1)$$

이 테크닉을 사용하기 위해서는 피적분함수를 강제적으로 이변수함수로 바꿔야 하므로, 특정 숫자를 a 로 바꾸어 매개변수를 강제로 추가하거나 e^{-ax} 등을 곱해 이변수함수로 만들어준 후 $a=0$ 일 때의 값을 구하는 식으로 처리한다.

또한 피적분식의 결과를 a 에 대하여 미분한 값이 a 에 대한 함수로 나오므로 이는 a 에 대한 미분방정식을 푸는 것으로 이어진다.

예를 들어, 적분 $\int_0^1 \frac{x^{2023} - 1}{\ln x} dx$ 의 경우 2023의 자리에 a 를 대입하여 정의한 함수 $I(a)$

를 a 에 대하여 미분하면 피적분함수는 x^a 가 되어 적분을 매우 쉽게 계산할 수 있으며,

적분값인 $\frac{1}{a+1}$ 은 $I'(a)$ 와 같으므로 다음을 얻을 수 있다.

$$I(a) = \int_0^1 \frac{x^a - 1}{\ln x} dx = \ln |a+1| + C$$

또한 $I(0) = \int_0^1 0 dx = 0$ 이므로 $C = 0$ 이고, 따라서 다음을 얻는다.

$$I(a) = \int_0^1 \frac{x^a - 1}{\ln x} dx = \ln |a+1|, \quad \int_0^1 \frac{x^{2023} - 1}{\ln x} dx = \ln 2024$$

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ 와 같은 적분의 경우 피적분함수에 e^{-ax} 를 곱한 후 a 로 미분하여

최종적으로 $a = 0$ 을 대입하여 답을 얻어내는 형태이며, $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2e}$ 의 경우 $\cos x$ 를 $\cos(ax)$ 로 바꾼 후 a 로 두 번 미분하여 $I''(a) = I(a)$ 의 미분방정식을 푸는 구조이다. (풀이에 필요한 초기조건은 $a = 0$ 을 대입하거나 $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a)$ 및 $\lim_{a \rightarrow -\infty} I(a)$ 를 이용하여 얻어낼 수 있다.)

[1] Feynman, R. P. "A Different Set of Tools." In 'Surely You're Joking, Mr. Feynman!': Adventures of a Curious Character. New York: W. W. Norton, 1997.

[2] Hijab, O. Introduction to Calculus and Classical Analysis. New York: Springer-Verlag, p. 189, 1997.

[3] Woods, F. S. "Differentiation of a Definite Integral." § 60 in Advanced Calculus: A Course Arranged with Special Reference to the Needs of Students of Applied Mathematics. Boston, MA: Ginn, pp. 141-144, 1926.

(28) Ramanujan's Master Theorem

- 복소함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k!} (-x)^k$$

과 같은 형태의 MacLaurin Expansion을 가질 때, $f(x)$ 의 멜린 변환(Mellin Transform)은 다음과 같이 주어진다.

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx = \Gamma(s) \varphi(-s)$$

(단, 여기서 $\Gamma(s)$ 는 감마 함수이다.)

라마누잔은 이 기법을 이용하여 수많은 정적분과 무한급수의 값을 구했으며, 이 기법을 이용하여 구할 수 있는 특이한 적분 몇 개를 적어보겠다.

1. $\int_0^{\infty} x^{\phi} \sin(x^n) dx = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{\phi+1}{n}\right) \sin\left(\frac{\phi+1}{2n} \pi\right)$
2. $\int_0^{\infty} (\ln x)^m \sin(x^n) dx = \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{d^m}{d\phi^m} \left[\frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{\phi+1}{n}\right) \sin\left(\frac{\phi+1}{2n} \pi\right) \right]$
- 2-(2). $\int_0^{\infty} (\ln x)^2 \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{64} (\pi - 4\ln 2 - 2\gamma)^2$
3. $\int_0^{\infty} x^{s-1} \sin x dx = \Gamma(s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$
4. $\int_0^{\infty} x^{s-1} \cos x dx = \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$
5. $\int_0^{\infty} \frac{\text{Li}_s(-x)}{x^{\alpha+1}} dx = -\frac{1}{\alpha^s} \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}, \quad s > 0, \alpha \in (0, 1)$
6. $\int_0^{\infty} x^{s-1} \ln(1+x) dx = \frac{1}{s} \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$
7. $\int_0^{\infty} x^{s-1} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; -x) dx = B(a, s-\alpha) \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(s-\beta)}{\Gamma(s-\gamma)\Gamma(\gamma)}$
8. $\int_0^{\infty} \frac{\text{Li}_3(-x)}{1+x} x^{s-1} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} [\zeta(3) - \zeta(3, 1-s)]$
9. $\int_0^{\infty} \sin(x^n) dx = \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
10. $\int_0^{\infty} \cos(x^n) dx = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
11. $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{\pi}{n} \csc\left(\frac{\pi}{n}\right)$

아래 [2]번 참고문헌에서 더 많은 활용 예시를 찾아볼 수 있다.

[1] Berndt, B. (1985). Ramanujan's Notebooks, Part I. New York: Springer-Verlag.

[2] Qureshi, M. I., Quraishi, K. A., & Pal, R. (2014). Some applications of celebrated master theorem of Ramanujan. British Journal of Mathematics & Computer Science, 4(20), 2862.

(http://www.journalrepository.org/media/journals/BJMCS_6/2014/Jul/Qureshi4202013BJMCS4842_1.pdf)

[3] Mathematical Poetry, *Ramanujan & Feynman*, 2019. 01. 06.

(<https://philosophicalmath.wordpress.com/2019/01/06/ramanujan-feynman/>)

(29) 역함수의 적분 공식

- 실함수 f 와 그 역함수 f^{-1} , $F(x) = \int f(x)dx$ 에 대하여 다음이 성립한다. (양변을 미분한 후 chain rule을 적용하면 쉽게 증명된다.)

$$\int f^{-1}(x)dx = x \cdot f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C$$

[증명]

In order to prove this, we split our integral into a sum over the connected components of $\mathbb{R} \setminus P$.

$$\int_{\mathbb{R}} f(\phi(x)) dx = \int_{\mathbb{R} \setminus P} f(\phi(x)) dx = \sum_n \int_{a_n}^{b_n} f(\phi(x)) dx$$

For any connected component (a_n, b_n) of $\mathbb{R} \setminus P$ and $y \in \mathbb{R}$, consider the roots of the equation $\phi(x) = y$. Using properties (1) and (2) of $\phi(z)$, we find there is a unique root for the equation $y = \phi(x)$ over (a_n, b_n) . Let we call this root as $r_n(y)$. Change variable to $y = \phi(x)$, the integral becomes

$$\sum_n \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{dr_n(y)}{dy} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(\sum_n \frac{dr_n(y)}{dy} \right) dy$$

We can use the obvious fact $\frac{dr_n(y)}{dy} \geq 0$ and dominated convergence theorem to justify the switching of order of summation and integral.

This means to prove (*1), one only need to show

$$\sum_n \frac{dr_n(y)}{dy} \stackrel{?}{=} 1 \tag{*2}$$

For any $y \in \mathbb{R}$, let $R(y) = \phi^{-1}(y) \subset \mathbb{R}$ be the collection of roots of the equation $\phi(z) = y$.

Over any Jordan domain D_k , we have following expansion

$$\frac{\phi'(z)}{\phi(z) - y} = \sum_{r \in R(y) \cap D_k} \frac{1}{z - r} - \sum_{p \in P \cap D_k} \frac{1}{z - p} + \text{something analytic}$$

This leads to

$$\sum_{r \in R(y) \cap D_k} r - \sum_{p \in P \cap D_k} p = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_k} z \left(\frac{\phi'(z)}{\phi(z) - y} \right) dz$$

As long as $R(y) \cap \partial D_k = \emptyset$, we can differentiate both sides and get

$$\begin{aligned} \sum_{r_n(y) \in D_k} \frac{dr_n(y)}{dy} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_k} z \left(\frac{\phi'(z)}{(\phi(z) - y)^2} \right) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_k} z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\phi(z) - y} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_k} \frac{dz}{\phi(z) - y} \end{aligned}$$

For those k large enough such that $R_k > 2(M + |y|)$, we can expand the integrand in last line as

$$\frac{1}{\phi(z) - y} = \frac{1}{z - (y + z - \phi(z))} = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(y + z - \phi(z))^j}{z^{j+1}}$$

and obtain a bound

$$\begin{aligned} \left| \left(\sum_{r_n(y) \in D_k} \frac{dr_n(y)}{dy} \right) - 1 \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\partial D_k} \frac{(|y| + |z - \phi(z)|)^j}{|z|^{j+1}} |dz| \\ &\leq \frac{(M + |y|)L_k}{2\pi R_k^2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{M + |y|}{R_k} \right)^j \leq \frac{M + |y|}{\pi} \frac{L_k}{R_k^2} \end{aligned}$$

Since $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{L_k}{R_k^2} = 0$, this leads to

$$\sum_n \frac{dr_n(y)}{dy} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{r_n(y) \in D_k} \frac{dr_n(y)}{dy} = 1$$

This justifies (*2) and hence (*1) is proved. Notice all the $\frac{dr_n(y)}{dy}$ are positive, there is no issue in rearranging the order of summation in last line.

Back to the original problem of evaluating

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (x + \tan x)^2} dx$$

One can take $\phi(z)$ as $z + \tan z$ and $f(x)$ as $\frac{1}{1+x^2}$. It is easy to see $\phi(z)$ satisfies:

- Condition (1) - For any $y \in \mathbb{R}$ and $u + iv \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, we have

$$\begin{aligned} \Im(\phi(u + iv) - y) &= v + \Im \tan(u + iv) = v + \Im \frac{\tan u + i \tanh v}{1 - i \tan u \tanh v} \\ &= v + \tanh v \frac{1 + \tan^2 u}{1 + \tan^2 u \tanh^2 v} \neq 0 \end{aligned}$$

- Condition (2) - obvious.
- Condition (3). - Let D_k to be the square

$$D_k = \{ u + vi \in \mathbb{C} : |u|, |v| \leq k\pi \}$$

It is not hard to show $|z - \phi(z)| = |\tan z|$ is bounded above by $\frac{1}{\tanh k\pi}$ on ∂D_k .

Combine these, we can apply (*1) and deduce

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (x + \tan x)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx = \pi$$