EBS
Probability and statistics

EBS Ch① 경우의 수

① 경우의 수

TH①. 2024년 수능특강

2024년 수능특강 Lv2

3점(27번) 연계 가능

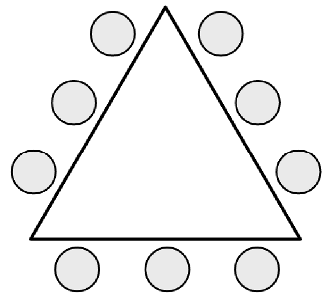
1. 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공을 같은 종류의 상자 3개에 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 넣는 경우의 수는?

(가) 각 상자에 넣는 공의 개수는 2 이상이다.
(나) 한 상자에 넣은 모든 공에 적힌 수의 곱이 12의 배수인 상자의 개수는 3이다.

① 45 ② 54 ③ 63 ④ 72 ⑤ 81

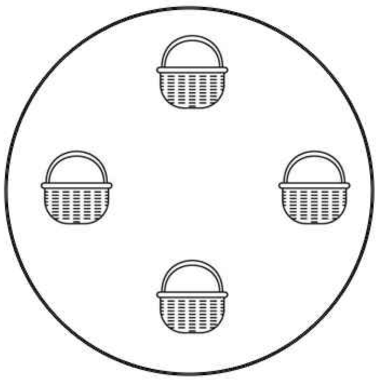
2024년 수능특강 Lv2

2. 어른 4명과 어린이 5명이 일정한 간격을 두고 그림과 같은 정삼각형 모양의 탁자에 둘러앉으려고 한다. 삼각형의 모든 변에 대하여 삼각형의 한 변의 3개의 의자에 적어도 1명의 어른이 앉도록 9명이 모두 둘러앉는 경우의 수는 $k \times 6!$이다. k의 값은? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 105 ② 108 ③ 111 ④ 114 ⑤ 117

3. 원 모양의 일정한 간격을 두고 원형으로 놓인 같은 종류의 바구니 4개가 있다. 이 4개의 바구니에 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 흰 공 5개와 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적힌 검은 공 3개를 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 담는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



(가) 각 바구니에 공을 2개씩 담는다.
(나) 검은 공만 담는 바구니는 없다.
(다) 한 바구니에 담는 두 공에 적힌 수의 곱이 짝수인 바구니의 개수는 3이다.

2024년 수능특강 Lv3
연계 가능

4. 다음 조건을 만족시키는 집합

$$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$

의 세 부분집합 $A,\ B,\ C$의 모든 순서쌍 $(A,\ B,\ C)$의 개수를 구하시오.

(가) $n(A\cup B)=3,\ A\cap C=\varnothing$
(나) 두 집합 $A,\ C$는 공집합이 아니다.

2024년 수능특강 Lv3

최고 난이도

5. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 카드가 각각 2장씩 있다. 이 12장의 카드를 모두 일렬로 나열하려고 할 때, 서로 이웃한 카드에 적힌 두 수의 최대공약수가 항상 5의 약수가 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.)

$\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{6}$

① 9640 ② 9720 ③ 9800
④ 9880 ⑤ 9960

2024년 수능특강 유제

3점(27번) 연계 가능

6. 같은 종류의 빵 6개와 같은 종류의 우유 8개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 주는 경우의 수는?

(가) 각 학생에게 적어도 1개의 빵을 준다.
(나) 각 학생에게 나누어 주는 우유의 개수는 빵의 개수보다 크거나 같다.

① 50 ② 60 ③ 70
④ 80 ⑤ 90

7. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to Y$의 개수를 구하시오.

> (가) 5 이하의 모든 자연수 x에 대하여
> $f(x) \leq f(x+1)$이다.
> (나) $f(x)=x^2-3$을 만족시키는 6 이하의 자연수 x가 존재한다.

2025 Trend

8. 같은 종류의 쿠키 26개를 서로 다른 종류의 선물 상자 5개에 남김없이 나누어 담을 때, 각 상자에 담는 쿠키의 개수가 2 이상 6 이하가 되도록 나누어 담는 경우의 수는?

① 62 ② 64 ③ 66
④ 68 ⑤ 70

9. 다음 조건을 만족시키는 12 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오.

(가) $b \times c \times d$는 홀수이다.
(나) $a+b+c=d$

2025 Trend

10. 두 집합

$X=\{x\,|\,x$는 6 이하의 자연수$\}$,
$Y=\{x\,|\,x$는 $-9 \le x \le 9$인 정수$\}$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to Y$의 개수는?

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여
$x_1 < x_2$이면 $f(x_1)+2 \le f(x_2)$이다.
(나) $f(6)=f(3)+10$

① 525 ② 540 ③ 555
④ 570 ⑤ 585

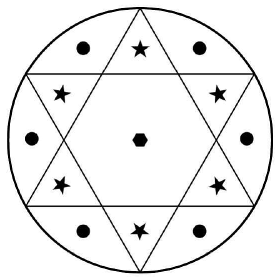
11. 검은색 볼펜 5개, 빨간색 볼펜 3개, 파란색 볼펜 1개가 있다. 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4개의 필통에 이 9개의 볼펜을 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않는다.)

> (가) 파란색 볼펜을 넣지 않는 필통에는 검은색 볼펜을 1개 이상씩 넣는다.
> (나) 숫자 k ($k=1,\ 2,\ 3,\ 4$)가 적혀 있는 필통에 넣는 모든 볼펜의 개수를 S_k라 할 때, 4 이하의 임의의 두 자연수 $m,\ n$에 대하여 $|S_m - S_n| \le 3$이다.

TH②. 2024년 수능완성

12. 그림과 같이 원에 내접하는 합동인 두 정삼각형을 포개서 서로 합동인 6개의 정삼각형에 ★ 모양의 스티커를 각각 1개씩 붙이고, 가운데 정육각형에 ⬣ 모양의 스티커를 1개 붙인다. 다음 조건을 만족시키도록 색을 칠하는 경우의 수는? (단, 각 영역에 1가지 색만 칠하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

> (가) 빨간색, 주황색, 노란색, 초록색, 파란색, 남색, 보라색의 7가지 색 중에서 6가지 색을 택하여 ★ 모양의 스티커가 1개 붙어 있는 6개의 정삼각형에 각각 한 가지 색으로만 칠하고, 7가지 색 중 택하지 않은 1가지 색으로 ⬣ 모양의 스티커가 붙어 있는 정육각형을 칠한다.
> (나) 흰색, 검은색, 금색 중 2가지 이상의 색을 택하여 ● 모양의 스티커가 각각 1개씩 붙어 있는 6개의 영역을 칠할 때, 원의 중심을 기준으로 서로 마주 보는 두 영역은 같은 색으로 칠한다.



① $120 \times 6!$ ② $144 \times 5!$ ③ $144 \times 6!$
④ $168 \times 5!$ ⑤ $168 \times 6!$

13. 8개의 숫자 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 6을 다음 조건을 만족시키도록 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는?

> (가) 양 끝에 놓인 수 중 적어도 한 개가 짝수이다.
> (나) 양 끝에 놓인 두 수를 제외한 나머지 6개의 수의 합은 짝수이다.

① 1600 ② 1800 ③ 2000
④ 2200 ⑤ 2400

2024년 수능완성

14. 검은 공 1개와 흰 공 1개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 1개의 공을 꺼내어 색을 확인한 후 다시 넣는 과정을 10회 반복하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

> 1회부터 3회까지 흰 공이 나온 횟수에 1을 더하고, 4회부터 7회까지 흰 공이 나온 횟수에 2를 더하고, 8회부터 10회까지 흰 공이 나온 횟수에 3을 더해서 점수를 얻는다.

예를 들어 표와 같이 1회에서 3회까지 흰 공이 0번, 4회에서 7회까지 흰 공이 3번, 8회에서 10회까지 흰 공이 1번 나왔다면 얻은 점수는 $(0+1)+(3+2)+(1+3)=10$이다.

횟수	1회	2회	3회	4회	5회	6회	7회	8회	9회	10회
검은 공	●	●	●		●			●	●	
흰 공				○		○	○			○
점수	$0+1$			$3+2$				$1+3$		

1회에서 3회까지 흰 공이 나온 횟수를 a, 4회에서 7회까지 흰 공이 나온 횟수를 b, 8회에서 10회까지 흰 공이 나온 횟수를 c라 할 때, 10회의 과정이 끝난 후 얻은 점수가 10이 되는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.

15. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는?

(가) $a+b+c+d=12$
(나) 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(b,\ c)$, $\mathrm{C}(c,\ d)$는 모두 직선 $y=x$ 위에 있지 않다.
(다) 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(b,\ c)$, $\mathrm{C}(c,\ d)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심은 직선 $y=x$ 위에 있다.

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

2024년 수능완성

16. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는? [4점]

(가) $a+2b+3c$의 값은 홀수이다.
(나) $a+b+c=20$

① 88 ② 90 ③ 92 ④ 94 ⑤ 96

17. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 A에서 A로의 모든 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(1)\times f(2)\times f(3)\times f(4)\times f(5)\times f(6)=240$ (나) $f(1)$의 값이 짝수이면 $f(5)$의 값은 홀수이다.

2024년 수능완성

2025 Trend

18. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에서 집합 $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는? [4점]

4 이하의 자연수 n에 대하여 집합 $\{x\,\vert\,f(x)=n,\ x\in X\}$의 원소의 개수를 a_n이라 하면 3 이하의 모든 자연수 k에 대하여 $a_k+a_{k+1}=3$이다.

① 320 ② 340 ③ 360
④ 380 ⑤ 400

19. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a\times b\times c\times d=192$
(나) $a+b+c+d$는 홀수이다.

2025 Trend

20. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서 X로의 함수 $f:X\rightarrow X$ 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

3 이하의 자연수 n에 대하여 $f(n)>f(n+2)$인 n의 개수는 2이다.

21. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사과 2개와 같은 종류의 배 10개를 남김없이 나누어주려고 한다. 받은 사과의 개수와 배의 개수가 같은 학생이 단 한 명이 되도록 나누어주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 과일은 구별하지 않고, 모든 학생은 한 개 이상의 과일을 받는다.) [4점]

2025 Trend

22. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 5 이하의 모든 자연수 x에 대하여 $f(x)\le f(x+1)$ 이다.
> (나) $3\le x\le 4$일 때, $f(x)f(x+1)f(x+2)$ 의 값은 3의 배수이다.

1. 정답 ②

풀이

한 상자에 넣은 모든 공에 적힌 수의 곱이 12의 배수인 상자의 개수가 3이므로 3의 배수 3, 6, 9가 적힌 공은 3개의 상자에 하나씩 넣어야 한다. 12의 배수가 되려면 3, 9가 적힌 공을 넣은 상자에는 4 또는 8이 적힌 공을 하나씩 넣어야 하고, 6이 적힌 공을 넣은 상자에는 2가 적힌 공을 넣어야 한다.

즉, 2, 3, 4, 6, 8, 9가 적힌 공을 같은 종류의 상자 3개에 나누어 넣는 경우의 수는 2이다.

남은 공 3개를 이 3개의 상자에 나누어 넣는 경우의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times27=54$

2. 정답 ②

풀이

그림을 회전하여 같아지는 것이 3개씩이므로 9명이 둘러앉는 경우의 수는 $\frac{9!}{3}$

어린이 5명 중 3명이 어떤 변의 3개의 의자에 모두 앉는 경우의 수는

${}_5C_3\times3!\times{}_3C_1\times\frac{1}{3}=60$

이고, 나머지 6자리에 어른 4명과 남은 어린이 2명이 앉는 경우의 수는 6!이므로 삼각형의 어떤 변의 3개의 의자에 모두 어린이만 앉도록 9명이 둘러앉는 경우의 수는

$60\times6!$

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{9!}{3}-60\times6\neq 108\times6!$

이므로

$k=108$

3. 정답 180

풀이

주어진 조건을 만족시키도록 같은 종류의 바구니 4개에 공8개를 나누어 담는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 한 바구니에 담는 두 공에 적힌 수의 곱이 홀수이고 두 공이 모두 흰 공인 경우

1, 3, 5가 적힌 흰 공 중에서 2개를 택해 한 바구니에 담는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$이다. 짝수가 적힌 공 3개를 남은 바구니 3개에 1개씩 담는 경우의 수는 1이다. 남은 공 중 홀수가 적힌 흰 공은 2가 적힌 검은 공만 담은 바구니에 담아야 하고, 홀수가 적힌 검은 공 2개를 1개의 공만 담은 두 바구니에 나누어 담는 경우의 수는 2이다.

따라서 (ⅰ)의 경우의 수는

$3\times1\times2=6$

(ⅱ) 한 바구니에 담는 두 공에 적힌 수의 곱이 홀수이고 두 공이 흰 공 1개, 검은 공 1개인 경우

1, 3, 5가 적힌 흰 공 중에서 1개와 1, 3이 적힌 검은 공 중에서 1개를 택해 한 바구니에 담는 경우의 수는 ${}_3C_1\times{}_2C_1=6$이다. 짝수가 적힌 공 3개를 남은 바구니 3개에 1개씩 담는 경우의 수는 1이다. 남은 공 중 홀수가 적힌 검은 공을 짝수가 적힌 1개의 흰 공만 담은 두 바구니 중 한 바구니에 담는 경우의 수는 2이고 홀수가 적힌 흰 공 2개를 1개의공만 담은 두 바구니에 나누어 담는 경우의 수는 2이다.

따라서 (ⅱ)의 경우의 수는

$6\times1\times2\times2=24$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 같은 종류의 바구니 4개에 공 8개를 나누어 담는 경우의 수는 $6+24=30$

이고, 이 네 바구니를 원형으로 나열하는 경우의 수는

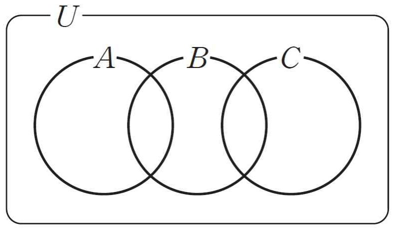
$(4-1)!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $30\times6=180$

4. 정답 344

풀이

집합 $A\cup B$의 원소를 정하는 경우의 수는 ${}_4C_3=4$



집합 $A\cup B$의 세 원소는 각각 네 집합 $A\cap B^C$, $A\cap B$, $A^C\cap B\cap C^C$, $B\cap C$중 하나의 원소이므로 그 집합을 정하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_3=4^3=64$

집합 $(A\cup B)^C$의 원소는 두 집합 $B^C\cap C$, $(A\cup B\cup C)^C$ 중 하나의 원소이므로 그 집합을 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_1=2^1=2$

따라서 조건 (가)를 만족시키는 $(A,\ B,\ C)$의 개수는

$4\times64\times2=512$

(ⅰ) $A=\varnothing$인 경우

집합 $A\cup B$의 세 원소는 각각 두 집합 $A^C\cap B\cap C^C$, $B\cap C$ 중 하나의 원소이므로 그 집합을 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

집합 $(A\cup B)^C$의 원소는 두 집합 $B^C\cap C$, $(A\cup B\cup C)^C$ 중 하나의 원소이므로 그 집합을 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_1=2^1=2$

따라서 $A=\varnothing$이고, 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 $(A,\ B,\ C)$의 개수는 $4\times8\times2=64$

(ⅱ) $C=\varnothing$인 경우

집합 $A\cup B$의 세 원소는 각각 세 집합 $A\cap B^C$, $A\cap B$, $A^C\cap B\cap C^C$ 중 하나의 원소이므로 그 집합을 정하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_3=3^3=27$

집합 $(A\cup B)^C$의 원소는 집합 $(A\cup B\cup C)^C$의 원소이므로 $C=\varnothing$이고 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 $(A,\ B,\ C)$의 개수는

$4\times27=108$

(ⅲ) $A=C=\varnothing$인 경우

$A\cup B$의 원소는 모두 집합 $A^C\cap B\cap C^C$의 원소이고 집합

$(A \cup B)^C$의 원소는 집합 $(A \cup B \cup C)^C$의 원소이므로
$A=C=\varnothing$이고, 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 $(A,\ B,\ C)$의 개수는 4이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $A=\varnothing$ 또는 $C=\varnothing$이고, 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 $(A,\ B,\ C)$의 개수는

$64+108-4=168$

따라서 구하는 순서쌍 $(A,\ B,\ C)$의 개수는

$512-168=344$

5. 정답 ②

풀이

서로 이웃한 카드에 적힌 두 수의 최대공약수가 5의 약수가 되려면 2, 4, 6이 적힌 카드는 서로 이웃하면 안 되고, 3, 6이 적힌 카드도 서로 이웃하면 안 된다. 1, 3, 5가 적힌 카드를 먼저 나열한 후 2, 4, 6이 적힌 카드를 나열할 때, 1, 3, 5가 적힌 카드를 나열하는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 1, 3, 5가 적힌 카드를 먼저 나열할 때, 3이 적힌 카드가 서로 이웃하는 경우

3이 적힌 2장의 카드를 한 묶음으로 1, 3, 5가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$

나열된 카드의 사이사이와 양 끝 중 3이 적힌 카드와 이웃하는 3개의 자리를 제외한 4개의 자리 중 2개의 자리에 6이 적힌 카드를 나열하고, 3이 적힌 두 카드 사이에 2, 4가 적힌 카드 중 하나를 나열하고 남은 4개의 자리 중 3개의 자리에 남은 2, 4가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

$_4C_2\times 2\times {}_4C_3\times\frac{3!}{2!}=144$

따라서 (ⅰ)의 경우의 수는

$30\times 144=4320$

(ⅱ) 1, 3, 5가 적힌 카드를 먼저 나열할 때, 3이 적힌 카드가 서로 이웃하지 않는 경우

1, 5가 적힌 카드를 나열하고, 나열한 카드 사이사이 중 2개의 자리에 3이 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times 2!}\times {}_5C_2=60$

나열된 카드의 사이사이와 양 끝 중 3이 적힌 카드와 이웃하는 4개의 자리를 제외한 3개의 자리 중 2개의 자리에 6이 적힌 카드를 나열하고 6이 적힌 카드와 이웃하는 4개의 자리를 제외한 5개의 자리 중 4개의 자리에 2, 4가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

$_3C_2\times {}_5C_4\times\frac{4!}{2!\times 2!}=90$

따라서 (ⅱ)의 경우의 수는

$60\times 90=5400$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$4320+5400=9720$

6. 정답 ②

길잡이

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$_nH_r={}_{n+r-1}C_r$

풀이

3명의 학생에게 빵을 나누어주는 경우는 먼저 빵을 1개씩 나누고 남은 3개의 빵을 3명의 학생에게 나누어 주면 되므로 이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times 4}{2\times 1}=10$

우유를 나누어 주는 경우는 먼저 6개의 우유를 각 학생에게 나누어 준 빵의 개수만큼 나누어 주고 남은 2개의 우유를 3명의 학생에게 나누어 주면 되므로 이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=\frac{4\times 3}{2\times 1}=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times 6=60$

7. 정답 146

풀이

조건 (가)에 의하여

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le f(6)$

$1\le x^2-3\le 6$을 만족시키는 자연수 x는 2 또는 3이므로

$f(2)=1$ 또는 $f(3)=6$이다.

(ⅰ) $f(2)=1$인 경우

$f(1)=f(2)=1$이고, $f(3),\ f(4),\ f(5),\ f(6)$은 6 이하의 자연수이므로 이 경우 함수 f의 개수는

$$_6H_4={}_{6+4-1}C_4={}_9C_4=\frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}=126$$

(ⅱ) $f(3)=6$인 경우

$f(1),\ f(2)$는 6 이하의 자연수이고,

$f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=6$ 이므로 이 경우 함수 f의 개수는

$$_6H_2={}_{6+2-1}C_2={}_7C_2=\frac{7\times 6}{2\times 1}=21$$

(ⅲ) $f(2)=1,\ f(3)=6$인 경우

$f(1)=f(2)=1$이고, $f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=6$ 이므로 이 경우 함수 f의 개수는 1이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$126+21-1=146$

8. 정답 ⑤

풀이

서로 다른 종류의 선물 상자 5개에 담는 쿠키의 개수를 각각 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$라 하면

$a+b+c+d+e=26$ ($a,\ b,\ c,\ d,\ e$는 2 이상 6 이하의 자연수)

$a=a_1+2,\ b=b_1+2,\ c=c_1+2,\ d=d_1+2,\ e=e_1+2$라 하면

$(a_1+2)+(b_1+2)+(c_1+2)+(d_1+2)+(e_1+2)=26$

$a_1+b_1+c_1+d_1+e_1=16$

(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1은 4 이하의 음이 아닌 정수)

또 $a_1=4-a_2$, $b_1=4-b_2$, $c_1=4-c_2$, $d_1=4-d_2$, $e_1=4-e_2$라 하면

$(4-a_2)+(4-b_2)+(4-c_2)+(4-d_2)+(4-e_2)=16$

$a_2+b_2+c_2+d_2+e_2=4$

(a_2, b_2, c_2, d_2, e_2는 4 이하의 음이 아닌 정수)

따라서 구하는 경우의 수는 순서쌍 $(a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2,\ e_2)$의 개수와 같으므로

$${}_5\mathrm{H}_4={}_{5+4-1}\mathrm{C}_4={}_8\mathrm{C}_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$$

9. 정답 35

풀이

$b\times c\times d$가 홀수이므로 b, c, d는 모두 홀수이고, $a=d-b-c$에서 자연수 a도 홀수이다.

$a+b+c=d$에서

$a=2a'+1$, $b=2b'+1$, $c=2c'+1$, $d=2d'+1$이라 하면

$(2a'+1)+(2b'+1)+(2c'+1)=2d'+1$

$a'+b'+c'=d'-1$ (a', b', c', d'은 5 이하의 음이 아닌 정수)

이때 $d'-1\geq 0$이므로 d'은 $1\leq d'\leq 5$인 자연수이다.

순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 방정식 $a'+b'+c'=d'-1$을 만족시키는 5 이하의 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 순서쌍 $(a',\ b',\ c',\ d')$의 개수와 같으므로

$$\sum_{d'=1}^{5}{}_3\mathrm{H}_{d'-1}$$
$$={}_3H_0+{}_3H_1+{}_3H_2+{}_3H_3+{}_3H_4$$
$$={}_2\mathrm{C}_0+{}_3\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_4$$
$$={}_3\mathrm{C}_0+{}_3\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_4$$
$$={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4$$
$$={}_5C_2+{}_5C_3+{}_6C_4$$
$$={}_6C_3+{}_6C_4$$
$$={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3$$
$$=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}$$
$$=35$$

10. 정답 ①

풀이

조건 (가)에 의하여 5 이하의 자연수 x에 대하여

$f(x)+2\leq f(x+1)$임을 알 수 있다.

$f(2)=f(1)+2+a$,

$f(3)=f(2)+2+b=f(1)+4+a+b$,

$f(4)=f(3)+2+c=f(1)+6+a+b+c$,

$f(5)=f(4)+2+d=f(1)+8+a+b+c+d$,

$f(6)=f(5)+2+e=f(1)+10+a+b+c+d+e$

(a, b, c, d, e는 음이 아닌 정수)

로 놓을 수 있다.

$f(6)=f(3)+10$에서

$f(1)+10+a+b+c+d+e=\{f(1)+4+a+b\}+10$

$c+d+e=4$ (c, d, e는 음이 아닌 정수)

이므로 c, d, e를 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_4$이다.

$f(1)\geq -9$이므로 $p=f(1)+9$라 하면 p는 음이 아닌 정수이다.

$f(6)=(p+1)+a+b+4\leq 9$에서

$p+a+b\leq 4$

$p+a+b+q=4$ (q는 음이 아닌 정수)

이므로 p, a, b, q를 정하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_4$이다.

따라서 a, b, c, d, e, p, q가 정해지면 함숫값이 모두 정해지므로 구하는 함수의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_3\times{}_4\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4\times{}_7\mathrm{C}_4$$
$$={}_6\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{C}_3$$
$$=\frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}$$
$$=15\times35$$
$$=525$$

11. 정답 688

풀이

파란색 볼펜을 넣는 필통을 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

파란색 볼펜을 넣지 않는 3개의 필통에 검은색 볼펜을 1개씩 넣고, 남은 검은색 볼펜 2개, 빨간색 볼펜 3개를 나누어 넣는 경우는 다음과 같다.

검은색 볼펜 2개를 4개의 필통에 나누어 넣는 경우의 수는

$${}_4\mathrm{H}_2={}_{4+2-1}\mathrm{C}_2={}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

빨간색 볼펜 3개를 4개의 필통에 나누어 넣는 경우의 수는

$${}_4\mathrm{H}_3={}_{4+3-1}\mathrm{C}_3={}_6\mathrm{C}_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

이때 검은색 볼펜 2개, 빨간색 볼펜 3개 중 4개 또는 5개의 볼펜을 1개의 필통에 넣으면 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

4개의 볼펜을 1개의 필통에 넣는 경우는 함께 넣을 볼펜 4개를 택하는 경우의 수는 2, 이 4개의 볼펜과 남은 1개의 볼펜을 넣을 필통을 택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$이므로 4개의 볼펜을 1개의 필통에 넣는 경우의 수는

$2\times12=24$

5개의 볼펜을 1개의 필통에 넣는 경우는 볼펜 5개를 넣을 필통을 택하면 되므로 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

즉, 검은색 볼펜 2개, 빨간색 볼펜 3개를 4개의 필통에 나누어 넣는 경우의 수는

$10\times20-(24+4)=172$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times172=688$

12. 정답 ④

빨간색, 주황색, 노란색, 초록색, 파란색, 남색, 보라색의 7가지 색 중에서 ★ 모양의 스티커가 1개 붙어 있는 6개의 정삼각형에 각각 한 가지 색으로만 칠할 6가지 색을 택하는 경우의 수는

${}_7C_6=7$
이고, ★ 모양의 스티커가 1개 붙어 있는 6개의 정삼각형을 칠하는 경우의 수는
$(6-1)!=5!$
⬣ 모양의 스티커가 1개 붙어 있는 정육각형을 남은 색으로 칠하는 경우의 수는 1이다.
● 모양의 스티커가 각각 1개씩 붙어 있는 6개의 부분을 시계 반대 방향으로 ⓐ, ⓑ, ⓒ, ⓓ, ⓔ, ⓕ라 하면 영역 ⓐ, ⓑ, ⓒ, ⓓ, ⓔ, ⓕ를 칠할 때는 (ⓐ, ⓓ)와 (ⓑ, ⓔ)와 (ⓒ, ⓕ)를 같은 색으로 칠해야 한다. 이 각각의 묶음을 X, Y, Z라 하자. 이 세 묶음을 2가지 이상의 색으로 칠하려면 X, Y, Z를 칠하는 모든 경우에서 X, Y, Z를 모두 같은 색으로 칠하는 경우를 제외하면 된다.
$3\times3\times3-3=27-3=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$7\times5!\times1\times24=168\times5!$

13. 정답 ②
8개의 숫자 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 6에서 홀수의 개수는 5, 짝수의 개수는 3이다.
조건 (가)에서 양 끝에 적어도 한 개의 짝수가 오는 경우는
(홀, □, □, □, □, □, □, 짝),
(짝, □, □, □, □, □, □, 홀),
(짝, □, □, □, □, □, □, 짝)
이다.
(ⅰ) (홀, □, □, □, □, □, □, 짝), (짝, □, □, □, □, □, □, 홀)인 경우
양 끝에 놓인 두 수를 제외한 나머지 6개의 수는 홀수의 개수가 4, 짝수의 개수가 2이다.
그러므로 양 끝에 놓인 두 수를 제외한 나머지 6개의 수의 합이 짝수이다.
ⓐ (홀, □, □, □, □, □, □, 짝)인 경우
ⓐ-1) 맨 처음의 홀수 자리에 1이 오고, 맨 끝의 짝수 자리에 2 또는 4 또는 6이 올 수 있다.
(1, □, □, □, □, □, □, 짝)일 때, 1, 3, 3, 3과 남은 서로 다른 짝수 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.
즉, $3\times\dfrac{6!}{3!}=360$
ⓐ-2) 맨 처음의 홀수 자리에 3이 오고, 맨 끝의 짝수 자리에 2 또는 4 또는 6이 올 수 있다.
(3, □, □, □, □, □, □, 짝)일 때, 1, 1, 3, 3과 남은 서로 다른 짝수 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.
즉, $3\times\dfrac{6!}{2!\times2!}=540$
ⓑ (짝, □, □, □, □, □, □, 홀)인 경우
ⓑ-1) 맨 처음의 짝수 자리에 2 또는 4 또는 6이 올 수 있고, 맨 끝의 홀수 자리에 1이 올 수 있다. (짝, □, □, □, □, □, □, 1)일 때, 1, 3, 3, 3과 남은 서로 다른 짝수 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.
즉, $3\times\dfrac{6!}{3!}=360$
ⓑ-2) 맨 처음의 짝수 자리에 2 또는 4 또는 6이 올 수 있고, 맨 끝의 홀수 자리에 3이 올 수 있다. (짝, □, □, □, □, □, □, 3)일 때, 1, 1, 3, 3과 남은 서로 다른 짝수 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.
즉, $3\times\dfrac{6!}{2!\times2!}=540$
(ⅱ) (짝, □, □, □, □, □, □, 짝)인 경우
양 끝에 놓인 두 수를 제외한 나머지 6개의 수는 홀수의 개수가 5, 짝수의 개수가 1이다.
따라서 양 끝에 놓인 두 수를 제외한 나머지 6개의 수의 합이 홀수이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$(360+540)+(360+540)=1800$

14. 정답 13
1회부터 3회까지의 과정에서 흰 공이 나온 횟수 a $(0\le a\le 3)$,
4회부터 7회까지의 과정에서 흰 공이 나온 횟수 b $(0\le b\le 4)$,
8회부터 10회까지의 과정에서 흰 공이 나온 횟수 c $(0\le c\le 3)$에 대하여 10회의 과정이 끝난 후 얻는 점수는
$(a+1)+(b+2)+(c+3)$이고,
얻은 점수가 10이 되는 경우는
$(a+1)+(b+2)+(c+3)=10$ (a, b, c는 음이 아닌 정수)
즉, $a+b+c=4$ (a, b, c는 음이 아닌 정수) …… ㉠
일 때이므로 방정식 ㉠을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$
이때 $0\le a\le 3$, $0\le c\le 3$이므로 방정식 ㉠을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 중 $(4, 0, 0)$, $(0, 0, 4)$는 제외된다.
따라서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$15-2=13$

15. 정답 ④
두 조건 (나), (다)에 의하여 서로 다른 세 점 $A(a, b)$, $B(b, c)$, $C(c, d)$의 무게중심 $\left(\dfrac{a+b+c}{3}, \dfrac{b+c+d}{3}\right)$가 직선 $y=x$ 위에 있으므로
$\dfrac{b+c+d}{3}=\dfrac{a+b+c}{3}$, $a=d$
조건 (가)에서
$2a+b+c=12$
(ⅰ) $a=1$일 때
$b+c=10$이므로
$c=10-b$이고 세 점 A, B, C의 좌표는 각각
$(1, b)$, $(b, 10-b)$, $(10-b, 1)$이다.
이 세 점 A, B, C가 직선 $y=x$ 위에 있지 않으므로 $b\ne 1$이고 $b\ne 5$이고 $b\ne 9$이다.
$b=b'+1$, $c=c'+1$ (b', c'은 음이 아닌 정수)라 하면
$(b'+1)+(c'+1)=10$
$b'+c'=8$
이고, 이를 만족시키는 b', c'의 순서쌍 (b', c')의 개수는
${}_2H_8={}_{2+8-1}C_8={}_9C_8={}_9C_1=9$
이때 $b'=0$, $b'=4$, $b'=8$인 경우를 제외하면 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$9-3=6$

(ii) $a=2$일 때

$b+c=8$이므로

$c=8-b$이고 세 점 A, B, C의 좌표는 각각

$(2, b)$, $(b, 8-b)$, $(8-b, 2)$이다.

이 세 점 A, B, C가 직선 $y=x$ 위에 있지 않으므로 $b\neq 2$이고 $b\neq 4$이고 $b\neq 6$이다.

$b=b'+1$, $c=c'+1$ (b', c'은 음이 아닌 정수)라 하면

$(b'+1)+(c'+1)=8$

$b'+c'=6$

이고, 이를 만족시키는 b', c'의 순서쌍 (b', c')의 개수는

${}_2H_6={}_{2+6-1}C_6={}_7C_6={}_7C_1=7$

이때 $b'=1$, $b'=3$, $b'=5$인 경우를 제외하면 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$7-3=4$

(iii) $a=3$일 때

$b+c=6$이므로

$c=6-b$이고 세 점 A, B, C의 좌표는 각각

$(3, b)$, $(b, 6-b)$, $(6-b, 3)$이다.

이 세 점 A, B, C가 직선 $y=x$ 위에 있지 않으므로 $b\neq 3$이다.

$b=b'+1$, $c=c'+1$ (b', c'은 음이 아닌 정수)라 하면

$(b'+1)+(c'+1)=6$

$b'+c'=4$

이고, 이를 만족시키는 b', c'의 순서쌍 (b', c')의 개수는

${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

이때 $b'=2$인 경우를 제외하면 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$5-1=4$

(iv) $a=4$일 때

$b+c=4$이므로

$c=4-b$이고 세 점 A, B, C의 좌표는 각각

$(4, b)$, $(b, 4-b)$, $(4-b, 4)$이다.

이 세 점 A, B, C가 직선 $y=x$ 위에 있지 않으므로 $b\neq 2$이다.

$b=b'+1$, $c=c'+1$ (b', c'은 음이 아닌 정수)라 하면

$(b'+1)+(c'+1)=4$

$b'+c'=2$

이고, 이를 만족시키는 b', c'의 순서쌍 (b', c')의 개수는

${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

이때 $b'=1$인 경우를 제외하면 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$3-1=2$

(v) $a=5$일 때

$b+c=2$이므로

$c=2-b$이고 세 점 A, B, C의 좌표는 각각

$(5, b)$, $(b, 2-b)$, $(2-b, 5)$이다.

이 세 점 A, B, C가 직선 $y=x$ 위에 있지 않으므로 $b\neq 1$이다.

이때 $b+c=2$를 만족시키는 자연수 b, c의 순서쌍 (b, c)가 존재하지 않는다.

즉, 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)는 존재하지 않는다.

(i)~(v)에 의하여 구하는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$6+4+4+2+0=16$

16. 정답 ②

조건 (가)에서 $2b$의 값은 짝수이므로 $a+2b+3c$의 값이 홀수가 되려면 $a+3c$의 값이 홀수이어야 한다.

이때 a가 홀수이면 c는 짝수이고, a가 짝수이면 c는 홀수이어야 한다.

(i) a가 홀수이고 c가 짝수인 경우

$a=2a'-1$, $c=2c'$ (a', c'은 자연수)

로 놓으면 조건 (나)에서

$(2a'-1)+b+2c'=20$

$2a'+b+2c'=21$ …… ㉠

이때 ㉠을 만족시키는 자연수 b가 존재하려면 b는 홀수이어야 한다.

$b=2b'-1$ (b'은 자연수)로 놓으면

$2a'+(2b'-1)+2c'=21$

$a'+b'+c'=11$ (a', b', c'은 자연수) …… ㉡

즉, 주어진 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 방정식 ㉡을 만족시키는 자연수 a', b', c'의 모든 순서쌍 (a', b', c')의 개수와 같으므로

${}_3H_{11-3}={}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

(ii) a가 짝수이고 c가 홀수인 경우

(i)과 같은 방법으로 구라혐 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 45이다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$45+45=90$

17. 정답 834

곱이 240인 6 이하의 자연수 6개의 순서쌍은 다음과 같다.

$(1, 2, 2, 2, 5, 6)$, $(1, 2, 2, 3, 4, 5)$, $(1, 1, 3, 4, 4, 5)$, $(2, 2, 2, 2, 3, 5)$, $(1, 1, 2, 4, 5, 6)$

위의 각 순서쌍에 속한 6개의 자연수를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하여 더하면

$$\frac{6!}{3!}+\frac{6!}{2!}+\frac{6!}{2!2!}+\frac{6!}{4!}+\frac{6!}{2!}=120+360+180+30+360=1050$$

이때 $f(1)$의 값이 짝수이고, $f(5)$의 값이 짝수인 경우의 수를 구해보자.

(i) $(1, 2, 2, 2, 5, 6)$인 경우

$f(1)=2$, $f(5)=2$인 경우의 수는 $4!=24$

$f(1)=2$, $f(5)=6$인 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

$f(1)=6$, $f(5)=2$인 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

따라서 이 경우의 수는

$24+12+12=48$

(ii) $(1, 2, 2, 3, 4, 5)$인 경우

$f(1)=2$, $f(5)=2$인 경우의 수는 $4!=24$

$f(1)=2$, $f(5)=4$인 경우의 수는 $4!=24$

$f(1)=4$, $f(5)=2$인 경우의 수는 $4!=24$

따라서 이 경우의 수는

$24\times 3=72$

(iii) $(1, 1, 3, 4, 4, 5)$인 경우

$f(1)=4$, $f(5)=4$인 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

따라서 이 경우의 수는 12이다.

(iv) $(2, 2, 2, 2, 3, 5)$인 경우

$f(1)=2$, $f(5)=2$인 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

따라서 이 경우의 수는 12이다.

(v) $(1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6)$인 경우

$f(1)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2=6$

나머지 함숫값을 정하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

따라서 이 경우의 수는

$6\times12=72$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는

$48+72+12+12+72=216$

이므로 구하는 함수 f의 개수는

$1050-216=834$

18. **정답** ⑤

3 이하의 자연수 k에 대하여 $a_k+a_{k+1}=3$이므로

$a_1+a_2=3$, $a_2+a_3=3$, $a_3+a_4=3$

$a_1=0$이면 $a_2=3$, $a_3=0$, $a_4=3$

$a_1=1$이면 $a_2=2$, $a_3=1$, $a_4=2$

$a_1=2$이면 $a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=1$

$a_1=3$이면 $a_2=0$, $a_3=3$, $a_4=0$

$a_1\geq4$이면 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(ⅰ) $a_1=0$, $a_2=3$, $a_3=0$, $a_4=3$인 경우

$f(x)=2$인 x의 개수와 $f(x)=4$인 x의 개수가 모두 3이므로

구하는 함수 f의 개수는

2, 2, 2, 4, 4, 4

를 일렬로 나열한 다음 맨 왼쪽에 있는 수부터 차례로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{6!}{3!3!}=20$

$a_1=3$, $a_2=0$, $a_3=3$, $a_4=0$인 경우도 같은 방법으로 구하면

함수 f의 개수는 20

(ⅱ) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=1$, $a_4=2$인 경우

$f(x)=1$인 x의 개수와 $f(x)=3$인 x의 개수가 모두 1이고,

$f(x)=2$인 x의 개수와 $f(x)=4$인 x의 개수가 모두 2이므로

구하는 함수 f의 개수는

1, 2, 2, 3, 4, 4

를 일렬로 나열한 다음 맨 왼쪽에 있는 수부터 차례로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{6!}{2!2!}=180$

$a_1=2$, $a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=1$인 경우도 같은 방법으로 구하면

함수 f의 개수는 180

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$2\times20+2\times180=400$

19. **정답** 176

$192=2^6\times3$이므로 a, b, c, d 중 홀수인 자연수는 1 또는 3이어야 한다.

또한 음이 아닌 정수 m_1, m_2, m_3, m_4, n_1, n_2, n_3, n_4에 대하여

$a=2^{m_1}\times3^{n_1}$, $b=2^{m_2}\times3^{n_2}$, $c=2^{m_3}\times3^{n_3}$, $d=2^{m_4}\times3^{n_4}$라 하면

$m_1+m_2+m_3+m_4=6$ $\cdots\cdots$ ㉠

$n_1+n_2+n_3+n_4=1$ $\cdots\cdots$ ㉡

이어야 한다.

조건 (나)에서 $a+b+c+d$가 홀수이어야 하므로

a, b, c, d 중 홀수인 자연수의 개수는 1 또는 3이어야 한다.

(ⅰ) a, b, c, d 중 홀수인 자연수의 개수가 1인 경우

a, b, c, d 중 홀수가 될 자연수를 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

이때 a가 홀수라 하자.

① $a=1$인 경우

b, c, d는 모두 짝수이어야 하므로

$m_2\geq1$, $m_3\geq1$, $m_4\geq1$

㉠에서

$m_2'+1=m_2$, $m_3'+1=m_3$, $m_4'+1=m_4$

(m_2', m_3', m_4'은 음이 아닌 정수)

라 하면 $m_1=0$이므로 ㉠을 만족시키는 모든 순서쌍

$(m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4)$의 개수는 방정식

$m_2'+m_3'+m_4'=3$을

만족시키는 음이 아닌 정수 m_2', m_3', m_4'의 모든 순서쌍

$(m_2',\ m_3',\ m_4')$의 개수와 같고, 이는 서로 다른 3개에서

3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

또한 ㉡에서 $n_1=0$이므로 ㉡을 만족시키는 모든 순서쌍

$(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4)$의 개수는 방정식 $n_2+n_3+n_4=1$을

만족시키는 음이 아닌 정수 n_2, n_3, n_4의 모든 순서쌍

$(n_2,\ n_3,\ n_4)$의 개수와 같고, 이는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

그러므로 이 경우 구하는 모든 순서쌍의 개수는

$10\times3=30$

② $a=3$인 경우

b, c, d는 모두 짝수이어야 하므로

$m_2\geq1$, $m_3\geq1$, $m_4\geq1$

㉠에서

$m_2''+1=m_2$, $m_3''+1=m_3$, $m_4''+1=m_4$

(m_2'', m_3'', m_4''은 음이 아닌 정수)

라 하면 $m_1=0$이므로 ㉠을 만족시키는 모든 순서쌍

$(m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4)$의 개수는 방정식

$m_2''+m_3''+m_4''=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 m_2'',

m_3'', m_4''의 모든 순서쌍 $(m_2'',\ m_3'',\ m_4'')$의 개수와

같고, 이는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와

같으므로

${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

또한 ㉡에서 $n_1=1$이므로 ㉡을 만족시키는 모든 순서쌍

$(n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4)$의 개수는 1이다.

그러므로 이 경우 구하는 모든 순서쌍의 개수는 10이다.

따라서 a, b, c, d 중 홀수인 자연수의 개수가 1인 경우 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$4\times(30+10)=160$

(ii) a, b, c, d 중 홀수인 자연수의 개수가 3인 경우

a, b, c, d 중 홀수가 될 자연수를 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

이때 a, b, c가 홀수라 하자.

① a, b, c 모두 1인 경우

$d=192$이면 되므로 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 1이다.

② a, b, c 중 어느 하나가 3인 경우

a, b, c 중 3이 될 자연수를 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

이때 $d=64$이면 되므로 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 3이다.

따라서 a, b, c, d 중 홀수인 자연수의 개수가 3인 경우의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$4\times(1+3)=16$

(i), (ii)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는

$160+16=176$

20. 정답 950

(i) 조건을 만족시키는 n의 값이 1, 2인 경우

$f(1)>f(3)$, $f(2)>f(4)$, $f(3)\leq f(5)$이다.

① $f(3)=1$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$4\times5=20$

② $f(3)=2$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3\times4=12$

③ $f(3)=3$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2\times3=6$

④ $f(3)=4$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$1\times2=2$

각각의 경우에 $f(2)$와 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2=10$

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$(20+12+6+2)\times10=400$

(ii) 조건을 만족시키는 n의 값이 1, 3인 경우

$f(1)>f(3)>f(5)$이고 $f(2)\leq f(4)$이다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

${}_5\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_2=10\times15=150$

(iii) 조건을 만족시키는 n의 값이 2, 3인 경우

$f(2)>f(4)$, $f(3)>f(5)$, $f(1)\leq f(3)$이다.

① $f(3)=2$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2\times1=2$

② $f(3)=3$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3\times2=6$

③ $f(3)=4$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$4\times3=12$

④ $f(3)=5$일 때 $f(1)$과 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$5\times4=20$

각각의 경우에 $f(2)$와 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2=10$

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$(2+6+12+20)\times10=400$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$400+150+400=950$

21. 정답 432

네 명의 학생 A, B, C, D가 받은 과일의 개수를 각각 a, b, c, d (a, b, c, d는 자연수)라 하면

$a+b+c+d=12$ …… ㉠

이때 받은 사과의 개수와 배의 개수가 같은 학생이 단 한 명이 되도록 모든 과일을 남김없이 나누어주는 경우는 다음과 같다.

(i) 네 명의 학생 중 한 명이 사과와 배를 각각 2개씩 받은 경우

네 명의 학생 중 2개의 사과를 받을 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

이때 2개의 사과를 받은 학생이 A이면 A가 받은 배의 개수도 2이므로 $a=4$

㉠에서 $b+c+d=8$ (b, c, d는 자연수)이므로

$b'+1=b$, $c'+1=c$, $d'+1=d$라 하면 b', c', d'은 음이 아닌 정수이고

$(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)=8$

즉, $b'+c'+d'=5$이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 b', c', d'의 순서쌍 (b', c', d')의 개수는

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

따라서 사과와 배를 각각 2개씩 받은 학생이 한 명이 되도록 나누어 주는 경우의 수는

$4\times21=84$

(ii) 네 명의 학생 중 한 명만 사과와 배를 각각 한 개씩 받은 경우

네 명의 학생 중 사과를 한 개씩 받을 2명의 학생을 선택하는 경우

${}_4C_2=6$

사과를 한 개씩 받은 학생이 A, B이면 A, B 중 배를 한 개만 받을 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

이때 사과와 배를 각각 한 개씩 받은 학생이 A이면 $a=2$이다.

또 B가 받은 배의 개수를 b'이라 하면 $b=b'+1$이고 b'은 음이 아닌 정수이다.

㉠에서 $(b'+1)+c+d=10$, 즉 $b'+c+d=9$ (c, d는 자연수)이므로 $c'+1=c$, $d'+1=d$라 하면 c', d'은 음이 아닌 정수이고

$b'+(c'+1)+(d'+1)=9$

즉, $b'+c'+d'=7$이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 b', c', d'의 순서쌍 (b', c', d')의 개수는

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

그런데 B가 받은 배의 개수는 1이어야 하므로 위에서 구한 경우에서 $b'=1$인 경우를 제외해야 한다.

즉, $b'=1$이면 $c'+d'=6$이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 c', d'의 순서쌍 (c', d')의 개수는

${}_2H_6={}_7C_6={}_7C_1=7$

따라서 사과와 배를 각각 한 개씩 받은 학생이 단 한 명이 되도록 나누어주는 경우의 수는

$6\times2\times(36-7)=348$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$84+348=432$

22. **정답** 254

조건 (가)에 의하여

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le f(6)$

조건 (나)에 의하여 $f(3)f(4)f(5)$, $f(4)f(5)f(6)$의 값이 모두 3의 배수이므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(ⅰ) $f(4)f(5)$의 값이 3의 배수인 경우

① $f(4)=1$일 때

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 1

$f(4)f(5)$의 값이 3의 배수이려면

$f(5)=3$일 때 $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 4

$f(5)=6$일 때 $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 1

그러므로 이 경우의 수는

$1\times(4+1)=5$

② $f(4)=2$일 때

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

$f(4)f(5)$의 값이 3의 배수이려면

$f(5)=3$일 때 $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 4

$f(5)=6$일 때 $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 1

그러므로 이 경우의 수는

$4\times(4+1)=20$

③ $f(4)=3$일 때

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

$f(4)f(5)$의 값이 3의 배수이므로 $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

그러므로 이 경우의 수는

$10\times10=100$

④ $f(4)=4$일 때

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

$f(4)f(5)$의 값이 3의 배수이려면 $f(5)=6$이어야 하고, 이때 $f(6)=6$이다.

그러므로 이 경우의 수는

$20\times1=20$

⑤ $f(4)=5$일 때

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{H}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$

$f(4)f(5)$의 값이 3의 배수이려면 $f(5)=6$이어야 하고, 이때 $f(6)=6$이다.

그러므로 이 경우의 수는

$35\times1=35$

⑥ $f(4)=6$일 때

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{H}_3={}_8\mathrm{C}_3=56$

$f(4)f(5)$의 값이 3의 배수이므로 $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 1

그러므로 이 경우의 수는

$56\times1=56$

①~⑥에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$5+20+100+20+35+56=236$

(ⅱ) $f(4)f(5)$의 값이 3의 배수가 아닌 경우

조건 (나)를 만족시키기 위해서는 $f(3)$의 값과 $f(6)$의 값이 모두 3의 배수이어야 한다.

① $f(3)=f(6)=3$일 때

$f(4)=f(5)=3$이므로 $f(4)f(5)$의 값이 3의 배수가 되어 주어진 경우를 만족시키지 않는다.

② $f(3)=3$, $f(6)=6$일 때

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

이 각각에 대하여 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우는

$f(4)=f(5)=4$ 또는 $f(4)=4$, $f(5)=5$ 또는

$f(4)=f(5)=5$의 3가지이다.

그러므로 이 경우의 수는

$6\times3=18$

③ $f(3)=f(6)=6$일 때

$f(4)=f(5)=6$이므로 $f(4)f(5)$의 값이 3의 배수가 되어 주어진 경우를 만족시키지 않는다.

①, ②, ③에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 18이다.

(ⅰ), (ⅱ)애 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$236+18=254$

② 확률

TH①. 2024년 수능특강

2024년 수능특강 예제

1. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때, 택한 수의 백의 자리의 수가 일의 자리의 수보다 클 확률은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

2024년 수능특강 예제

2. 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3장의 카드를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 세 수 중에서 가장 작은 수가 짝수이거나 가장 큰 수가 3의 배수일 확률은?

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$
④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

3. 숫자 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$중에서 서로 다른 3개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 세 자리의 자연수 중에서 임의로 하나를 택할 때, 택한 수가 홀수 또는 3의 배수일 확률은?

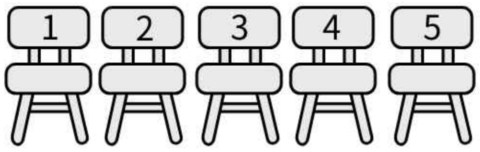
① $\frac{7}{10}$ ② $\frac{11}{15}$ ③ $\frac{23}{30}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

4. 두 개의 문자 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$와 4개의 숫자 $1,\ 1,\ 1,\ 2$를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$ 사이에 두 개의 숫자만 오도록 나열될 확률은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$
④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

3점(27번) 연계 가능

5. 그림과 같이 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 적혀 있는 5개의 의자가 있다. 세 사람 A, B, C가 이 5개의 의자 중 임의로 3개의 의자에 각각 앉을 때, A, B가 앉은 의자에 적혀 있는 두 수의 합이 C가 앉은 의자에 적혀 있는 수 이하일 확률은?



① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{7}{30}$　④ $\frac{4}{15}$　⑤ $\frac{3}{10}$

2024년 수능특강 Lv2

연계 가능

6. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 함수 f중에서 임의로 하나를 선택할 때, 선택한 함수 f가 다음 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오 (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

> 집합 X의 모든 원소 x에 대하여
> $\{x-f(3)\}\{f(x)-3\}\leq 0$이다.

3점(27번) 연계 가능

7. 1부터 8까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개를 택해 임의로 일렬로 나열할 때, 이웃하는 두 수의 곱이 모두 3의 배수일 확률은?

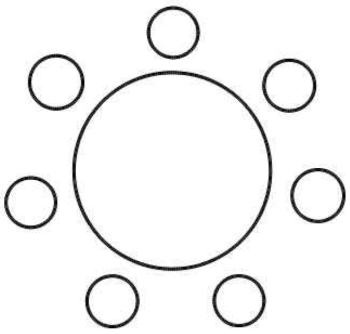
① $\frac{5}{28}$ ② $\frac{3}{14}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{9}{28}$

2024년 수능특강 Lv2

8. 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합 63개 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 선택한 집합 X가 다음 조건을 만족시킬 확률은?

집합 X의 원소의 개수가 3이거나 집합 X의 모든 원소는 홀수이다.

9. 남학생 4명과 여학생 3명이 원 모양의 탁자에 일정한 간격을 두고 임의로 모두 둘러앉을 때, 모든 여학생의 옆에서 적어도 한 명의 남학생이 앉게 될 확률은?



① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

10. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 X에서 Y로의 모든 함수 f중에서 임의로 하나를 선택할 때, 선택한 함수 f가 다음 조건을 만족시킬 확률은?

> (가) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.
> (나) $f(1) < f(2)$

① $\frac{7}{36}$ ② $\frac{23}{108}$ ③ $\frac{25}{108}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{29}{108}$

2024년 수능특강 Lv3

2025년 학년도 6월 평가원 28번 연계

11. 그림과 같이 3개의 동전은 앞면이 보이도록, 1개의 동전은 뒷면이 보이도록 탁자 위에 놓여 있다.

탁자 위의 4개의 동전 중 임의로 서로 다른 3개를 택하여 동시에 뒤집는 시행을 한다. 이 시행을 3번 반복할 때, 3번째 시행 후 처음으로 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있을 확률은?

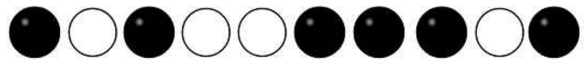
① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

2024년 수능특강 Lv3

연계 가능

12. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 임의로 모두 일렬로 나열할 때, 왼쪽에서 첫 번째 흰 공과 두 번째 흰 공 사이에 놓인 검은 공의 개수를 m, 세 번째 흰 공과 네 번째 흰 공 사이에 놓인 검은 공의 개수를 n이라 하자. 그림은 $m=1$, $n=3$이 되도록 10개의 공을 일렬로 나열한 예이다.



흰 공 4개와 검은 공 6개를 임의로 모두 일렬로 나열할 때, mn의 값이 0 또는 짝수일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

13. 한 개의 주사위를 m번 던져서 $n(1 \leq n \leq m)$번째 나오는 눈의 수를 a_n이라 하고, 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n = \begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{은 홀수}) \\ 3^{a_n} & (a_n\text{은 짝수}) \end{cases}$$

라 하자. 한 개의 주사위를 4번 던지는 시행에서 $b_1 \times b_2 \times b_3 \times b_4 = 6^6$일 때, 5의 눈이 나왔을 확률은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

14. 두 장의 카드 A, B가 모두 앞면이 보이도록 놓여 있다. 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 5 이상이면 A를 뒤집고, 4 이하이면 A, B를 모두 뒤집는 시행을 한다. 이 시행을 3번 반복한 후 두 카드 모두 뒷면이 보이도록 놓여 있을 확률은?

① $\frac{10}{27}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{14}{27}$
④ $\frac{16}{27}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

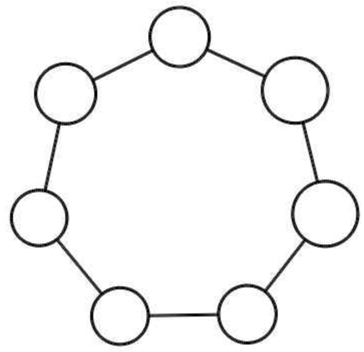
15. 숫자 1, 1, 1, 2가 하나씩 적혀 있는 공 4개가 들어 있는 상자 A와 숫자 1, 2, 2, 2, 4가 하나씩 적혀 있는 공 5개가 들어 있는 상자 B가 있다. 상자 A에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 상자 B에 넣은 후 상자 B에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 상자 B에서 꺼낸 공에 홀수가 적혀 있을 확률은?

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{5}{24}$

④ $\frac{7}{24}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

2024년 수능특강 Lv2

16. 그림과 같이 정칠각형의 각 꼭짓점을 중심으로 하고 합동인 7개의 원이 있다. 1부터 7 까지의 자연수를 이 7개의 원에 임의로 하나씩 모두 적는 시행을 한다. 이 시행에서 이웃하는 두 원에 적은 두 수를 각각 3으로 나눈 나머지가 서로 다를 때. 어떤 원과 이웃한 두 원에 3과 6이 적혀 있을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



최고 난이도

17. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택한다. 선택한 함수 f가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3일 확률은?

함수 $f \circ f$의 치역의 원소 중 홀수의 개수는 3이다.

① $\frac{6}{73}$ ② $\frac{7}{73}$ ③ $\frac{8}{73}$
④ $\frac{9}{73}$ ⑤ $\frac{10}{73}$

2024년 수능특강 Lv3

18. 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8개의 공이 들어 있는 주머니를 사용하여 다음 시행을 한다.

주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는 두 수 중에서 큰 수를 기록하고, 꺼낸 2개의 공을 다시 주머니에 넣는다.

위의 시행을 두 번 반복하여 기록한 두 수를 차례로 $m,\ n$이라 하자.

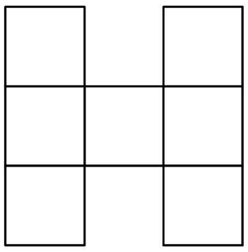
$$\sin\frac{m\pi}{6}\times\cos\frac{n\pi}{3}$$

의 값이 정수일 때, mn의 값이 18의 배수일 확률은?

① $\frac{41}{154}$ ② $\frac{43}{154}$ ③ $\frac{45}{154}$
④ $\frac{47}{154}$ ⑤ $\frac{7}{22}$

TH②. 2024년 수능완성

19. 7개의 정사각형으로 이루어진 다음 도형의 내부의 각 영역을 빨간색, 주황색, 노란색, 초록색, 파란색, 남색, 보라색의 7가지 색을 모두 사용하여 칠하는 경우 중에서 임의로 한 가지를 선택할 때, 빨간색과 보라색이 칠해진 두 정사각형이 이웃할 확률은? (단, 한 영역에는 한 가지 색만 칠한다.)



① $\frac{3}{14}$ ② $\frac{5}{21}$ ③ $\frac{11}{42}$

④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{13}{42}$

20. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 택할 때, 3 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $f(n) \leq f(n+2)$를 만족시킬 확률은?

① $\frac{14}{125}$ ② $\frac{21}{125}$ ③ $\frac{28}{125}$

④ $\frac{7}{25}$ ⑤ $\frac{42}{125}$

21. 수학 시험을 치르기 전에 5명의 학생이 각자 자신의 휴대폰을 하나씩 교탁에 있는 보관함에 제출하였다. 시험이 끝난 후 5명의 학생에게 임의로 휴대폰을 1개씩 나누어 줄 때, 자신의 휴대폰을 받은 학생이 한 명 이하일 확률은?

① $\frac{27}{40}$ ② $\frac{83}{120}$ ③ $\frac{17}{24}$ ④ $\frac{29}{40}$ ⑤ $\frac{89}{120}$

22. 주머니에 1부터 13까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 13장의 카드가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3장의 카드를 동시에 꺼내어 나온 세 수의 합이 3의 배수일 때, 이 세 수의 곱이 3의 배수일 확률은?

① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{9}{14}$ ③ $\frac{5}{7}$ ④ $\frac{11}{14}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

23. 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나온 눈의 수를 차례대로 a, b, c라 하자. 세 수 a, b, c 중 최솟값이 3일 확률은? (단, $a=3$, $b=3$, $c=3$인 경우 최솟값은 3이다.)

① $\frac{31}{216}$ ② $\frac{11}{72}$ ③ $\frac{35}{216}$

④ $\frac{37}{216}$ ⑤ $\frac{13}{72}$

2024년 수능완성

24. 수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져서 3의 배수의 눈이 나오면 점 P를 양의 방향으로 2만큼, 3의 배수의 눈이 나오지 않으면 점 P를 음의 방향으로 1만큼 이동시키는 시행을 한다. 이 시행을 6번 반복할 때, 6 이하의 자연수 n에 대하여 n번째 시행 후 점 P의 좌표를 $f(n)$이라 하자. $f(3)\neq 0$이고 $f(6)=0$일 확률은?

① $\frac{10}{81}$ ② $\frac{32}{243}$ ③ $\frac{34}{243}$

④ $\frac{4}{27}$ ⑤ $\frac{38}{243}$

25. 한 개의 주사위를 다섯 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c, d, e라 하자. $a<b<c$이고 $c<d<e$일 때, 집합 $\{a,\ b\} \cup \{d,\ e\}$의 원소의 개수가 3일 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2024년 수능완성

26. 상자 A에는 흰 공 4개와 검은 공 6개가 들어 있고, 상자 B는 비어 있다. 상자 A에 들어 있는 공을 이용하여 다음 시행을 한다.

> 상자 A에서 임의로 3개의 공을 꺼내어 흰 공이 나오면 꺼낸 공 3개를 상자 B에 넣은 후 상자 A에서 임의로 2개의 공을 더 꺼내어 상자 B에 넣고, 흰 공이 나오지 않으면 꺼낸 공 3개만 상자 B에 넣는다.

이 시행 후 두 상자 A와 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 서로 같을 확률은? [3점]

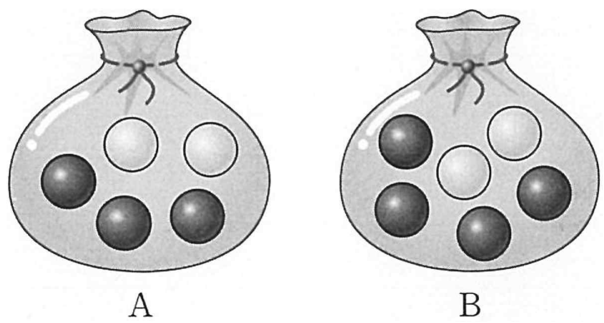
① $\dfrac{4}{7}$ ② $\dfrac{25}{42}$ ③ $\dfrac{13}{21}$ ④ $\dfrac{9}{14}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

27. 주머니 A에는 흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 2개와 검은 공 4개가 들어 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나오는 눈의 수가 홀수이면 주머니 A에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 한 개의 공을 꺼내고, 나오는 눈의 수가 짝수이면 주머니 A에서 임의로 두 개의 공을 동시에 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 한 개의 공을 꺼낸다.

이 시행을 한 번 할 때, 주머니 B에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은? [3점]

① $\frac{17}{56}$ ② $\frac{11}{35}$ ③ $\frac{13}{40}$
④ $\frac{47}{140}$ ⑤ $\frac{97}{280}$

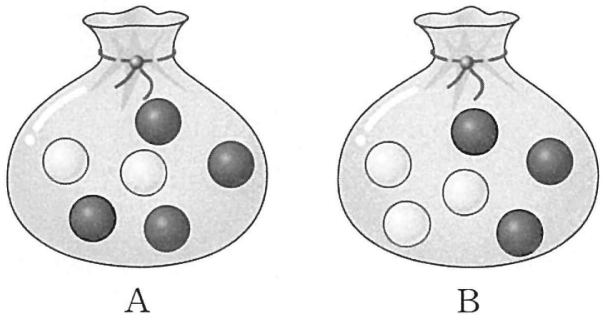


28. 어느 장난감 매장에서 오픈기념으로 장난감 2개를 넣어 포장한 럭키박스를 판매하려고 한다. 같은 종류의 인형 3개, 같은 종류의 피규어 3개, 같은 종류의 자석블록 2개 중에서 임의로 2개의 장난감을 택하여 럭키박스에 넣을 때, 넣은 2개의 장난감이 서로 다른 종류일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 럭키박스에 넣은 2개의 장난감의 순서는 구분하지 않고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

29. 주머니 A에는 흰 공 2개와 검은 공 4개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

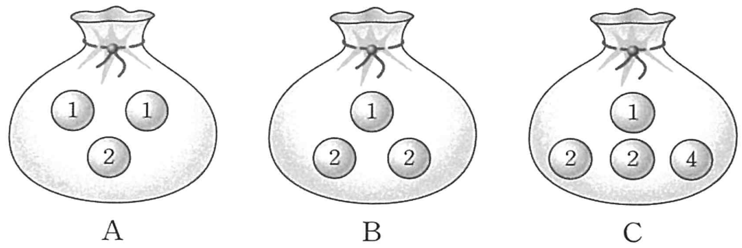
> 두 주머니 A, B에서 임의로 각각 한 개의 공을 동시에 꺼내어 두 공의 색이 같으면 주사위를 2번 던져 나온 두 눈의 수를 곱한 값을 점수로 받고, 두 공의 색이 다르면 주사위를 1번 던져 나온 눈의 수에 3을 곱한 값을 점수로 받는다.

이 시행을 한 번 하여 받은 점수가 6의 배수일 때, 주머니에서 꺼낸 두 공의 색이 서로 다를 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 주머니 A에는 1이 적힌 공 2개, 2가 적힌 공 1개가 들어 있고, 주머니 B에는 1이 적힌 공 1개, 2가 적힌 공 2개가 들어 있고, 주머니 C에는 1이 적힌 공 1개, 2가 적힌 공 2개, 4가 적힌 공 1개가 들어 있다. 세 주머니 A, B, C에서 각각 임의로 1개의 공을 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 최댓값과 최솟값의 차가 3이거나 꺼낸 3개의 공에 적힌 수를 모두 곱한 값이 8일 확률은? [3점]

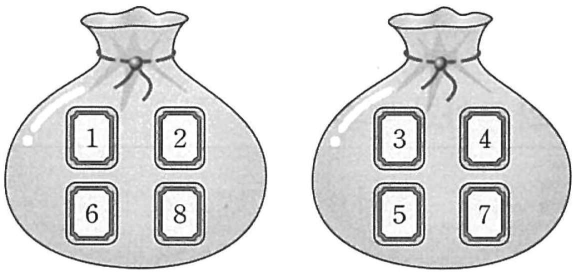
① $\frac{11}{36}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{13}{36}$
④ $\frac{7}{18}$ ⑤ $\frac{5}{12}$



31. 주머니 A에는 숫자 $1,\ 2,\ 6,\ 8$이 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 $3,\ 4,\ 5,\ 7$이 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 들어 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 하용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수이면 주머니 A에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 주머니 B에 넣고, 나온 눈의 수가 6의 약수가 아니면 주머니 B에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 주머니 A에 넣는다.

이 시행을 두 번 반복한 후 주머니 A에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수의 합이 주머니 B에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수의 합 보다 클 때, 두 주머니 A, B에 들어 있는 카드의 개수가 같을 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



A B

1. **정답** ③

길잡이

표본공간 S의 사건 A가 일어날 수학적 확률 $P(A)$는

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건 } A\text{의 원소의 개수})}{(\text{표본공간 } S\text{의 원소의 개수})}$$

임을 이용한다.

풀이

숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수의 개수는 ${}_6\Pi_4=6^4$

백의 자리의 수가 일의 자리의 수보다 크므로 백의 자리의 수와 일의 자리의 수를 택하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

이때 택한 두 수 중 큰 수가 백의 자리의 수이다.

천의 자리의 수와 십의 자리의 수를 택하는 경우의 수는 ${}_6\Pi_2=6^2$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{15\times6^2}{6^4}=\frac{5}{12}$$

2. **정답** ④

길잡이

두 사건 A, B에 대하여 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률은 확률의 덧셈정리

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

를 이용하여 구한다.

풀이

이 주머니에서 3장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_7\mathrm{C}_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

꺼낸 카드에 적혀 있는 세 수 중에서 가장 작은 수가 짝수인 사건을 A, 가장 큰 수가 3의 배수인 사건을 B라 하면 사건 $A\cap B$는 가장 작은 수가 짝수이고 가장 큰 수가 3의 배수인 사건이다.

가장 작은 수가 짝수인 경우의 수는 3, 4, 5, 6, 7이 적힌 카드 중 2장과 2가 적힌 카드를 꺼내거나 5, 6 7이 적힌 카드 중 2장과 4가 적힌 카드를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2=10+3=13$

그러므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{13}{35}$

가장 큰 수가 3의 배수인 경우의 수는 1, 2, 3이 적힌 카드를 꺼내거나 1, 2, 3, 4, 5가 적힌 카드를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

$1+{}_5\mathrm{C}_2=1+10=11$

그러므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{11}{35}$

가장 작은 수가 짝수이고 가장 큰 수가 3의 배수인 경우의 수는 3, 4, 5가 적힌 카드 중 1장과 2, 6이 적힌 카드를 꺼내거나 4, 5, 6이 적힌 카드를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{C}_1+1=3+1=4$

그러므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{35}$

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$$=\frac{13}{35}+\frac{11}{35}-\frac{4}{35}=\frac{4}{7}$$

3. **정답** ②

풀이

만들 수 있는 모든 세 자리의 자연수의 개수는

${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60$

만든 수가 홀수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하면 사건 $A\cap B$는 홀수이고 3의 배수인 사건이다.

만든 수가 홀수이려면 일의 자리의 수가 홀수이어야 하므로 그 개수는

$3\times{}_4\mathrm{P}_2=3\times4\times3=36$

그러므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{36}{60}=\frac{3}{5}$

만든 수가 3의 배수이려면 각 자리의 수의 합이 3의 배수이어야 하므로 각 자리의 수는

1, 2, 3 또는 1, 3, 5 또는 2, 3, 4 또는 3, 4, 5이고 그 개수는

$3!+3!+3!+3!=24$

그러므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$

만든 수가 홀수이고 3의 배수이려면 각 자리의 수는

1, 2, 3 또는 1, 3, 5 또는 2, 3, 4 또는 3, 4, 5이고 그 개수는

$2\times2!+3\times2!+1\times2!+2\times2!=16$

그러므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{16}{60}=\frac{4}{15}$

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$$=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}-\frac{4}{15}=\frac{11}{15}$$

4. **정답** ②

풀이

A, B, 1, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!}=6\times5\times4=120$

(ⅰ) A, B 사이에 1, 1이 오는 경우

A, B와 1, 1을 배열하는 경우의 수는 $2!$

이 묶음과 1, 2를 배열하는 경우의 수는 $3!$

이때의 경우의 수는

$2!\times3!=12$

(ⅱ) A, B 사이에 1, 2가 오는 경우

A, B와 1, 2를 배열하는 경우의 수는 $2!\times2!$

이 묶음과 1, 1을 배열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}$

이때의 경우의 수는

$2!\times2!\times\frac{3!}{2!}=12$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{12+12}{120}=\frac{1}{5}$$

5. **정답** ③

풀이

세 사람 A, B, C가 이 5개의 의자 중 3개의 의자에 앉는 경우의 수는 ${}_5P_3=5\times4\times3=60$

A, B, C가 앉은 의자에 적혀 있는 수를 각각 a, b, c라 하면

A, B가 앉은 의자에 적혀 있는 두 수의 합이 C가 앉은 의자에 적혀 있는 수 이하인 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 1,\ 3)$,

$(1,\ 2,\ 4)$, $(2,\ 1,\ 4)$, $(1,\ 3,\ 4)$, $(3,\ 1,\ 4)$,

$(1,\ 2,\ 5)$, $(2,\ 1,\ 5)$, $(1,\ 3,\ 5)$, $(3,\ 1,\ 5)$,

$(1,\ 4,\ 5)$, $(4,\ 1,\ 5)$, $(2,\ 3,\ 5)$, $(3,\ 2,\ 5)$

따라서 구하는 확률은

$\frac{14}{60}=\frac{7}{30}$

6. **정답** 43

풀이

집합 X에서 X로의 모든 함수의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4$이다.

(ⅰ) $f(3)=1$인 경우

$f(1)$의 값은 1, 2, 3, 4중 하나이므로 $f(1)$을 정하는 경우의 수는 4

$x>1$일 때 $f(x)\le 3$이므로 $f(2)$, $f(4)$를 정하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_2$

이때의 경우의 수는

$4\times{}_3\Pi_2=4\times3^2=36$

(ⅱ) $f(3)=2$인 경우

$x<2$일 때 $f(x)\ge 3$이므로 $f(1)$을 정하는 경우의 수는 2

$f(2)$의 값은 1, 2, 3, 4중 하나이므로 $f(2)$를 정하는 경우의 수는 4

$x>2$일 때 $f(x)\le 3$이므로 $f(4)$를 정하는 경우의 수는 3

이때의 경우의 수는

$2\times4\times3=24$

(ⅲ) $f(3)=3$인 경우

$x<3$일 때 $f(x)\ge 3$이므로 $f(1)$, $f(2)$를 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2$

$x>3$일 때 $f(x)\le 3$이므로 $f(4)$를 정하는 경우의 수는 3

이때의 경우의 수는

${}_2\Pi_2\times3=2^2\times3=12$

(ⅳ) $f(3)=4$인 경우

$x<3$일 때 $f(x)\ge 3$이므로 $f(1)$, $f(2)$를 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2$

$f(4)$의 값은 1, 2, 3, 4중 하나이므로 $f(4)$를 정하는 경우의 수는 4

이때의 경우의 수는

${}_2\Pi_2\times4=2^2\times4=16$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 확률은

$\frac{36+24+12+16}{4^4}=\frac{11}{32}$

따라서 $p=32$, $q=11$이므로 $p+q=43$

7. **정답** ④

풀이

서로 다른 8개의 숫자 중에서 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_8P_3=8\times7\times6=336$

1부터 8까지의 자연수 중 3의 배수는 3, 6이다.

나열된 수가 3, 6중 하나만 포함하는 사건을 A, 3, 6을 모두 포함하는 사건을 B라 하면 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이다.

(ⅰ) 3, 6 중 하나를 택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

이웃하는 두 수의 곱이 모두 3의 배수이려면 두 번째에 3의 배수를 놓고 첫 번째와 세 번째에 1, 2, 4, 5, 7, 8 중 2개를 놓으면 되므로

${}_6P_2=6\times5=30$

그러므로 $P(A)=\frac{2\times30}{336}=\frac{5}{28}$

(ⅱ) 3, 6을 모두 택하는 경우의 수는

${}_2C_2=1$

1, 2, 4, 5, 7, 8 중 1개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_1=6$

배열과 상관없이 이웃하는 두 수의 곱이 모두 3의 배수이므로

$3!=6$

그러므로 $P(B)=\frac{6\times6}{336}=\frac{3}{28}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{5}{28}+\frac{3}{28}=\frac{2}{7}$$

8. **정답** ③

풀이

집합 X의 원소의 개수가 3인 사건을 A, 집합 X의 모든 원소가 홀수인 사건을 B라 하면 사건 $A\cap B$는 원소의 개수가 3이고 모든 원소가 홀수인 사건이다.

원소의 개수가 3인 집합 X의 개수는

${}_6C_3=20$

이므로

$P(A)=\frac{20}{63}$

모든 원소가 홀수인 집합 X의 개수는 집합 $\{1,\ 3,\ 5\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$2^3-1=7$

그러므로

$P(B)=\frac{7}{63}=\frac{1}{9}$

집합 $\{1,\ 3,\ 5\}$의 원소의 개수가 3인 부분집합의 개수는 1이므로

$P(A\cap B)=\frac{1}{63}$

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{20}{63}+\frac{1}{9}-\frac{1}{63}=\frac{26}{63}$$

9. **정답** ⑤

풀이

남학생 4명과 여학생 3명이 원 모양의 탁자에 일정한 간격을 두고 모두 둘러앉는 경우의 수는

$(7-1)!=6!$

모든 여학생의 옆에는 적어도 한 명의 남학생이 앉게 되는 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 어떤 여학생의 양옆에 여학생이 앉게 되는 사건, 즉 여학생 3명이 이웃하는 사건이다.

여학생 3명이 이웃하는 경우의 수는 여학생 3명을 배열하고 이 묶음과 남학생 4명을 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$3!\times(5-1)!=3!\times4!$

그러므로 $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{3!\times4!}{6!}=\dfrac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$

10. **정답** ③

풀이

집합 X에서 집합 Y로의 모든 함수 f의 개수는

${}_6\Pi_4=6^4$

1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 치역의 원소가 될 세 수를 선택하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_3=20$

선택된 세 수 중에서 $f(1)$, $f(2)$를 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2=3$

치역의 원소인 세 수 중에서 $f(3)$, $f(4)$를 정하는 경우의 수는

${}_3\Pi_2$이고, $f(1)$, $f(2)$ 중에서 $f(3)$, $f(4)$를 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_2$이므로 $f(3)$, $f(4)$를 정하는 경우의 수는

${}_3\Pi_2-{}_2\Pi_2=3^2-2^2=5$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{20\times3\times5}{6^4}=\dfrac{25}{108}$

11. **정답** ②

풀이

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.

3번째 시행 후에 처음으로 4개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 사건을 A, 모두 뒷면이 보이도록 놓여 있는 사건을 B라 하자.

3번째 시행 후에 처음으로 4개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 경우는

HHHT → HHTT → HTTT → HHHH

뿐이다.

1번째 시행에서 H, H, T를 뒤집고, 2번째 시행에서 H, H, T를 뒤집고, 3번째 시행에서 T, T, T를 뒤집으면 되므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_3}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_3}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_4\mathrm{C}_3}$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$$

3번째 시행 후에 처음으로 4개의 동전이 모두 뒷면이 보이는 경우는

HHHT → HHTT → HHHT → TTTT

뿐이다.

1번째 시행에서 H, H, T를 뒤집고, 2번째 시행에서 H, T, T를 뒤집고, 3번째 시행에서 H, H, H를 뒤집으면 되므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_3}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_3}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_4\mathrm{C}_3}$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$$

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{32}+\dfrac{3}{32}=\dfrac{3}{16}$

12. **정답** 13

풀이

흰 공 4개와 검은 공 6개를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{10!}{4!\times6!}=210$

mn의 값이 0 또는 짝수인 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 m, n이 모두 홀수인 사건이다.

첫 번째 흰 공 왼쪽에 나열된 검은 공의 개수를 x, 두 번째 흰 공과 세 번째 흰 공 사이에 나열된 검은 공의 개수를 y, 네 번째 흰 공 오른쪽에 나열된 검은 공의 개수를 z라 하면

(ⅰ) $m=1$, $n=1$인 경우

방정식 $x+y+z=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$

(ⅱ) $m=1$, $n=3$ 또는 $m=3$, $n=1$인 경우

방정식 $x+y+z=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

(ⅲ) $m=1$, $n=5$ 또는 $m=3$, $n=3$ 또는 $m=5$, $n=1$인 경우

방정식 $x+y+z=0$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수와 같으므로

1

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{15+2\times6+3\times1}{210}=\dfrac{1}{7}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{7}=\dfrac{6}{7}$

이므로 $p+q=7+6=13$

13. **정답** ④

길잡이

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cup B)}{\mathrm{P}(A)}$ $(\mathrm{P}(A)>0)$임을 이용한다.

풀이

한 개의 주사위를 4번 던질 때 나오는 경우의 수는 6^4

$b_1\times b_2\times b_3\times b_4=6^6$인 사건을 A, 5의 눈이 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

$b_1\times b_2\times b_3\times b_4=2^6\times3^6$이므로 a_1, a_2, a_3, a_4의 값 중 홀수인 것의

합이 6이고 짝수인 것의 합이 6이다. 이 때 홀수인 것의 개수는 1 이상 3 이하이어야 한다.

$6=5+1=3+3$이므로 다음의 두 가지가 있다.

(ⅰ) 5의 눈이 한 번, 1의 눈이 한 번 나오는 경우

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$의 값 중 짝수인 것이 2개이어야 하므로

$6=4+2$에서 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$의 값은 5, 1, 4, 2를 배열한 것과 같다. 이때의 경우의 수는 $4!=24$

(ⅱ) 3의 눈이 두 번 나오는 경우

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$의 값 중 짝수인 것이 2개이어야 하므로

$6=4+2$에서 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$의 값은 3, 3, 4, 2를 배열한 것과 같다. 이때의 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{24+12}{6^4}=\frac{1}{36}$

사건 $A\cap B$는 $b_1\times b_2\times b_3\times b_4=6^6$이고 5의 눈이 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{24}{6^4}=\frac{1}{54}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{54}}{\frac{1}{36}}=\frac{2}{3}$$

14. **정답** ③

풀이

한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 5 이상일 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

이 시행을 3번 반복한 후 두 카드가 모두 뒷면이 보이도록 놓여 있는 경우는 A, B를 모두 1번 뒤집고 A를 2번 뒤집거나 A, B를 모두 3번 뒤집으면 되므로 구하는 확률은

$${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2}{9}+\frac{8}{27}=\frac{14}{27}$$

15. **정답** ④

풀이

상자 A에서 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 1인 사건을 A, 상자 B에서 꺼낸 공에 홀수가 적혀 있는 사건을 B라 하자. 이때 A의 여사건 A^C은 상자 A에서 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 2인 사건이다.

상자 A에 숫자 1, 1, 1, 2가 하나씩 적혀 있는 공이 들어 있으므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$

사건 A가 일어났을 때, 상자 B에 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 4가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있으므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

그러므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

또한 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

사건 A^C이 일어났을 때, 상자 B에 숫자 1, 2, 2, 2, 2, 4가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있으므로

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{6}$

그러므로 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{24}=\frac{7}{24}$

16. **정답** 3

풀이

1부터 7까지의 자연수를 이 7개의 원에 하나씩 모두 적는 경우의 수는 $(7-1)!=6!$

3으로 나눈 나머지가 같은 수들을 아래와 같이 각각 A, B, C로 나타내기로 하자.

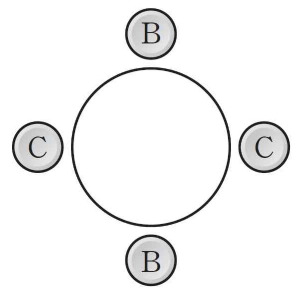
A : 1, 4, 7

B : 2, 5

C : 3, 6

1부터 7까지의 자연수를 이 7개의 원에 이웃하는 두 원에 적은 두 수를 각각 3으로 나는 나머지가 서로 다르도록 하나씩 모두 적는 사건을 T, 어떤 원과 이웃한 두 원에 3과 6이 적혀 있는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(E|T)$이다. B, C를 원 모양으로 배열하는 경우는 다음의 두 가지가 있다.

(ⅰ) 2, 3, 5, 6를 그림과 같이 배열하는 경우의 수는 $2!=2$



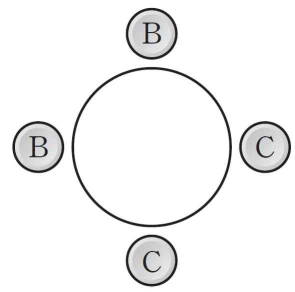
조건을 만족시키는 경우는 네 수의 사이사이 중에서 세 곳에 1, 4, 7을 배열하는 경우와 같으므로 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_3=24$

이때 경우의 수는

$2\times24=48$

(ⅱ) 2, 3, 5, 6을 그림과 같이 배열하는 경우의 수는 $2!\times2!=4$



조건을 만족시키는 경우는 2, 5 사이에 A 중 1개를, 3, 6 사이에 A 중 1개를, B와 C 사이 중에서 한 곳에 나머지 A를 배열하는 경우와 같으므로

$3\times2\times2=12$

이때의 경우의 수는

$4\times12=48$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\mathrm{P}(T)=\frac{48+48}{6!}=\frac{2}{15}$

(ii)에서

$\mathrm{P}(E\cap T)=\dfrac{48}{6!}=\dfrac{1}{15}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(E|T)=\dfrac{\mathrm{P}(E\cap T)}{\mathrm{P}(T)}=\dfrac{\dfrac{1}{15}}{\dfrac{2}{15}}=\dfrac{1}{2}$$

이므로 $p+q=2+1=3$

17. **정답** ④

풀이

함수 $f\circ f$의 치역의 원소 중 홀수의 개수가 3인 사건을 A, 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B \mid A)$이다.

집합 X에서 집합 X로의 함수의 개수는

${}_5\Pi_5=5^5$

이고, 사건 A는 다음의 세 가지가 있다.

(i) 함수 f의 치역의 원소의 개수가 5인 경우

함수 f는 일대일대응이므로 함수 $f\circ f$의 치역의 원소 중 홀수의 개수는 3

이때의 함수 f의 개수는

$5!=120$

(ii) 함수 f의 치역의 원소의 개수가 4인 경우

함수 f의 치역은 1, 3, 5를 포함해야 하므로 나머지 치역의 원소 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

• 함수 $f\circ f$의 치역의 원소의 개수가 4인 경우

함수 f의 치역에 포함되지 않는 집합 X의 원소의 함숫값을 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

함수 $f\circ f$의 치역의 원소의 개수가 4이므로 함수 f의 치역의 원소의 함숫값을 정하는 경우의 수는

$4!=24$

• 함수 $f\circ f$의 치역의 원소의 개수가 3인 경우

함수 $f\circ f$의 치역이 $\{1,\ 3,\ 5\}$이므로 함수 f의 치역에 포함되지 않는 집합 X의 원소의 함숫값을 정하는 경우의 수는

1

함수 $f\circ f$의 치역의 원소의 개수가 3이므로 함수 f의 치역의 원소 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

선택된 원소 2개를 1, 3, 5 중 하나에 대응시키는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

함수 f의 치역의 나머지 원소 2개의 함숫값을 정하는 경우의 수는 $2!=2$

이때의 함수 f의 개수는

$2\times(4\times24+1\times6\times3\times2)=264$

(iii) 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3인 경우

함수 f의 치역이 $\{1,\ 3,\ 5\}$이어야 하므로

$f(1),\ f(3),\ f(5)$를 1, 3, 5에 대응시키는 경우의 수는

$3!=6$

이고 집합 X의 나머지 두 원소를 1, 3, 5에 대응시키는 경우의 수는

${}_3\Pi_2=3^2=9$

이때의 함수 f의 개수는

$6\times9=54$

(i), (ii), (iii)에서

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{120+264+54}{5^5}=\dfrac{438}{5^5}$

사건 $A\cap B$는 함수 $f\circ f$의 치역의 원소 중 홀수의 개수가 3이고 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3인 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{54}{5^5}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\dfrac{54}{5^5}}{\dfrac{438}{5^5}}=\dfrac{9}{73}$$

18. **정답** ③

풀이

$\sin\dfrac{m\pi}{6}\times\cos\dfrac{n\pi}{3}$의 값이 정수인 사건을 A, mn의 값이 18의 배수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B \mid A)$이다. 2개의 공에 적혀 있는 두 수 중에서 큰 수를 기록하므로 m, n은 2 이상 8 이하의 자연수이다.

$\left|\sin\dfrac{m\pi}{6}\right|\le 1$, $\left|\cos\dfrac{n\pi}{3}\right|\le 1$이므로 $\sin\dfrac{m\pi}{6}\times\cos\dfrac{n\pi}{3}$의 값이 정수이려면 $\sin\dfrac{m\pi}{6}$, $\cos\dfrac{n\pi}{3}$ 중 적어도 하나가 0이거나 $\sin\dfrac{m\pi}{6}$, $\cos\dfrac{n\pi}{3}$가 모두 정수이어야 한다.

$\sin\dfrac{m\pi}{6}$의 값이 정수이려면 $m=3$ 또는 $m=6$

$\cos\dfrac{n\pi}{3}$의 값이 정수이려면 $n=3$ 또는 $n=6$

$\sin\dfrac{3\pi}{6}=1$, $\sin\dfrac{6\pi}{6}=0$, $\cos\dfrac{3\pi}{3}=-1$, $\cos\dfrac{6\pi}{3}=1$이므로

$\sin\dfrac{m\pi}{6}\times\cos\dfrac{n\pi}{3}$의 값이 정수이려면 $m=6$일 때 n은 2 이상 8 이하의 자연수이고, $m=3$일 때 $n=3$ 또는 $n=6$이다.

(i) $m=6$이고 n이 2 이상 8 이하의 자연수인 경우

첫 번째 시행에서 5 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 6이 적혀 있는 공 1개를 꺼내고, 두 번째 시행에서 어느 공을 꺼내도 상관없으므로 그 확률은

$\dfrac{{}_5C_1\times{}_1C_1}{{}_8C_2}\times\dfrac{{}_8C_2}{{}_8C_2}=\dfrac{5}{28}$

(ii) $m=3$이고 $n=3$ 또는 $n=6$인 경우

첫 번째 시행에서 2 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 3이 적혀 있는 공 1개를 꺼내고, 두 번째 시행에서 2 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 3이 적혀 있는 공 1개를 꺼내거나 5 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 6이 적혀 있는 공 1개를 꺼내면 되므로 그 확률은

$$\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_8C_2}\times\left(\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_8C_2}+\frac{{}_5C_1\times{}_1C_1}{{}_8C_2}\right)$$
$$=\frac{2}{28}\times\left(\frac{2}{28}+\frac{5}{28}\right)=\frac{1}{56}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $P(A)=\frac{5}{28}+\frac{1}{56}=\frac{11}{56}$

사건 $A\cap B$는 $\sin\frac{m\pi}{6}\times\cos\frac{n\pi}{3}$의 값이 정수이고 mn의 값이 18의 배수인 사건이므로

(ⅲ) $m=6,\ n=3$ 또는 $m=6,\ n=6$인 경우

첫 번째 시행에서 5 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 6이 적혀 있는 공 1개를 꺼내고, 두 번째 시행에서 2 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 3이 적혀 있는 공 1개를 꺼내거나 5 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 6이 적혀 있는 공 1개를 꺼내면 되므로 그 확률은

$$\frac{{}_5C_1\times{}_1C_1}{{}_8C_2}\times\left(\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_8C_2}+\frac{{}_5C_1\times{}_1C_1}{{}_8C_2}\right)$$
$$=\frac{5}{28}\times\left(\frac{2}{28}+\frac{5}{28}\right)=\frac{35}{28\times28}$$

(ⅳ) $m=3,\ n=6$인 경우

첫 번째 시행에서 2 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 3이 적혀 있는 공 1개를 꺼내고, 두 번째 시행에서 5 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 6이 적혀 있는 공 1개를 꺼내면 되므로 그 확률은

$$\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_8C_2}\times\frac{{}_5C_1\times{}_1C_1}{{}_8C_2}$$
$$=\frac{2}{28}\times\frac{5}{28}=\frac{10}{28\times28}$$

(ⅲ), (ⅳ)에서

$$P(A\cap B)=\frac{35}{28\times28}+\frac{10}{28\times28}=\frac{45}{28\times28}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{45}{28\times28}}{\frac{11}{56}}=\frac{45}{154}$$

19. **정답** ④

원순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.

7개의 정사각형으로 이루어진 도형의 내부를 서로 다른 7가지 색으로 칠하는 모든 경우의 수는 $\frac{7!}{2}$

이웃하는 두 영역을 택하는 경우의 수는 3이고 두 영역에 빨간색과 보라색을 칠하는 경우의 수는 각각 2이다.

나머지 다섯 영역을 색칠하는 경우의 수는 5!이므로 구하는 경우의 수는 $3\times2\times5!=6\times5!=6!$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{6!}{\frac{7!}{2}}=\frac{2}{7}$$

20. **정답** ②

X에서 X로의 모든 함수 f의 개수는 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 5개를 택하여 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_5=5^5$

주어진 조건을 만족시키려면

$f(1)\le f(3)\le f(5)$ 이고 $f(2)\le f(4)$

이어야 한다.

(ⅰ) $f(1)\le f(3)\le f(5)$ 인 경우

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 원소 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하면 위의 대소 관계에 의하여 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값이 정해지므로

${}_5H_3={}_7C_3=35$

(ⅱ) $f(2)\le f(4)$인 경우

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 원소 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하면 위의 대소 관계에 의하여 $f(2)$, $f(4)$의 값이 정해지므로

${}_5H_2={}_6C_2=15$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 함수의 개수는

35×15

따라서 구하는 확률은

$$\frac{35\times15}{5^5}=\frac{21}{125}$$

21. **정답** ⑤

서로 다른 5개의 휴대폰을 5명의 학생에게 나누어 주는 모든 경우의 수는

$5!=120$

(ⅰ) 자신의 휴대폰을 받는 학생이 두 명인 경우

자신의 휴대폰을 받는 학생 두 명을 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

5명의 학생 A, B, C, D, E의 휴대폰을 각각 a, b, c, d, e라 하자. 예를 들어 A, B가 자신의 휴대폰을 받고, 나머지 학생 C, D, E가 모두 다른 학생의 휴대폰을 받는 경우의 수는 표와 같이 2이다.

A	B	C	D	E
a	b	d	e	c
a	b	e	c	d

따라서 이때의 경우의 수는 $10\times2=20$

(ⅱ) 자신의 휴대폰을 받는 학생이 세 명인 경우

자신의 휴대폰을 받는 학생 세 명을 택하는 경우의 수는

${}_5C_3=10$

예를 들어 A, B, C가 자신의 휴대폰을 받고, 나머지 학생 D, E가 모두 다른 학생의 휴대폰을 받는 경우의 수는 1이다.

따라서 이때의 경우의 수는 $10\times1=10$

(ⅲ) 자신의 휴대폰을 받는 학생이 네 명 이상인 경우

모두 자신의 휴대폰을 받는 경우이므로 경우의 수는 1이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$$1-\frac{20+10+1}{120}=\frac{89}{120}$$

22. **정답** ⑤

1부터 13까지의 자연수를 3으로 나눈 나머지로 분류하면

$A=\{1, 4, 7, 10, 13\}$은 나머지가 1이고

$B=\{2, 5, 8, 11\}$은 나머지가 2이고

$C=\{3, 6, 9, 12\}$는 나머지가 0이다.
세 수의 합이 3의 배수가 되는 경우의 수는 다음과 같다.
(ⅰ) 집합 A에서 3개의 원소를 선택하는 경우의 수는
$_5C_3=10$
(ⅱ) 집합 B에서 3개의 원소를 선택하는 경우의 수는
$_4C_3=4$
(ⅲ) 집합 C에서 3개의 원소를 선택하는 경우의 수는
$_4C_3=4$
(ⅳ) 세 집합 A, B, C에서 각각 1개씩 원소를 선택하는 경우의 수는
$_5C_1\times{}_4C_1\times{}_4C_1=80$
(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 세 수의 합이 3의 배수가 되는 경우의 수는
$10+4+4+80=98$
이 중에서 세 수의 곱이 3의 배수가 되는 경우는 (ⅲ)과 (ⅳ)이므로 세 수의 곱이 3의 배수가 되는 경우의 수는
$4+80=84$
따라서 구하는 확률은
$\frac{84}{98}=\frac{6}{7}$

23. 정답 ④
세 수 a, b, c가 모두 3 이상일 확률에서 모두 4 이상일 확률을 빼면 최솟값이 3일 확률이다.
따라서 구하는 확률은
$${}_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0-{}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{8}{27}-\frac{1}{8}=\frac{37}{216}$$

24. 정답 ②
$f(3)=0$인 사건을 A, $f(6)=0$인 사건을 B라 하면 $f(3)\neq 0$이고 $f(6)=0$일 확률은
$P(A^C\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$
(ⅰ) $f(6)=0$인 경우
6번의 시행에서 3의 배수의 눈이 x번 나온다면 점 P의 위치는
$2x-(6-x)=3x-6$
$3x-6=0$에서
$x=2$
즉, $f(6)=0$이려면 6번의 시행에서 3의 배수의 눈이 2번, 3의 배수가 아닌 눈이 4번 나와야 하므로
$$P(B)={}_6C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{3^5}$$
(ⅱ) $f(3)=0$이고 $f(6)=0$인 경우
3번의 시행에서 3의 배수의 눈이 x번 나온다면 점 P의 위치는
$2x-(3-x)=3x-3$
$3x-3=0$에서
$x=1$
$f(3)=0$이고 $f(6)=0$이려면 처음 3번의 시행에서 3의 배수의 눈이 1번 나오고 그 다음 3번의 시행에서 3의 배수의 눈이 1번 나와야 하므로
$$P(A\cap B)={}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2\times{}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{3\times4}{3^3}\times\frac{3\times4}{3^3}=\frac{16}{3^4}$$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은
$$P(B)-P(A\cap B)=\frac{80}{3^5}-\frac{16}{3^4}=\frac{32}{3^5}=\frac{32}{243}$$

25. 정답 118
한 개의 주사위를 다섯 번 던질 때 일어나는 모든 경우의 수는 6^5이다.
$a<b<c$이고 $c>d>e$인 사건을 A, 집합 $\{a,\ b\}\cup\{d,\ e\}$의 원소의 개수가 3인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.
(ⅰ) $c=3$인 경우
$a=1,\ b=2,\ d=2,\ e=1$이고
$\{a,\ b\}\cup\{d,\ e\}=\{1,\ 2\}$이므로 $a<b<c$이고 $c<d<e$일 확률은 $\frac{1}{6^5}$
$a<b<c,\ c<d<e$이고 집합 $\{a,\ b\}\cup\{d,\ e\}$의 원소의 개수가 3일 확률은 $\frac{0}{6^5}$
(ⅱ) $c=4$인 경우
$a<b<c$가 되도록 a, b를 정하는 경우의 수와
$c<d<e$가 되도록 d, e를 정하는 경우의 수는
각각 $_3C_2=3$이므로
$a<b<c$이고 $c<d<e$일 확률은
$\frac{3\times3}{6^5}=\frac{9}{6^5}$
집합 $\{a,\ b\}\cap\{d,\ e\}$의 원소의 개수는 1 또는 2이고, 이 중에서 집합 $\{a,\ b\}\cup\{d,\ e\}$의 원소의 개수가 3인 경우는 집합 $\{a,\ b\}\cap\{d,\ e\}$의 원소의 개수가 1일 때이다.
집합 $\{a,\ b\}\cap\{d,\ e\}$의 원소의 개수가 2인 경우의 수는 세 개의 수 1, 2, 3 중 두 개를 택하는 경우의 수와 같으므로
$_3C_2=3$
그러므로 $a<b<c,\ c<d<e$이고 집합 $\{a,\ b\}\cup\{d,\ e\}$의 원소의 개수가 3일 확률은
$\frac{9-3}{6^5}=\frac{6}{6^5}$
(ⅲ) $c=5$인 경우
$a<b<c$가 되도록 a, b를 정하는 경우의 수와
$c<d<e$가 되도록 d, e를 정하는 경우의 수는
각각 $_4C_2=6$이므로
$a<b<c$이고 $c<d<e$일 확률은
$\frac{6\times6}{6^5}=\frac{36}{6^5}$
집합 $\{a,\ b\}\cap\{d,\ e\}$의 원소의 개수는 0 또는 1 또는 2이고, 이 중에서 집합 $\{a,\ b\}\cup\{d,\ e\}$의 원소의 개수가 3인 경우는 집합 $\{a,\ b\}\cap\{d,\ e\}$의 원소의 개수가 1일 때이다.
집합 $\{a,\ b\}\cap\{d,\ e\}$의 원소의 개수가 0인 경우의 수는 네 개의 수 1, 2, 3, 4 중 두 개를 택하는 경우의 수와 같으므로
$_4C_2=6$
집합 $\{a,\ b\}\cap\{d,\ e\}$의 원소의 개수가 2인 경우의 수는 네 개의

수 1, 2, 3, 4 중 두 개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{C}_2=6$

그러므로 $a<b<c$, $c<d<e$이고 집합 $\{a,\ b\}\cup\{d,\ e\}$의 원소의 개수가 3일 확률은

$\dfrac{36-6-6}{6^5}=\dfrac{24}{6^5}$

(iv) $c=6$인 경우

$a<b<c$가 되도록 a, b를 정하는 경우의 수와 $c<d<e$가 되도록 d, e를 정하는 경우의 수는 각각 ${}_5\mathrm{C}_2=10$이므로

$a<b<c$이고 $c<d<e$일 확률은

$\dfrac{10\times10}{6^5}=\dfrac{100}{6^5}$

집합 $\{a,\ b\}\cap\{d,\ e\}$의 원소의 개수는 0 또는 1 또는 2이고, 이 중에서 집합 $\{a,\ b\}\cup\{d,\ e\}$의 원소의 개수가 3인 경우는 집합 $\{a,\ b\}\cap\{d,\ e\}$의 원소의 개수가 1일 때이다.

집합 $\{a,\ b\}\cap\{d,\ e\}$의 원소의 개수가 0인 경우의 수는 다섯 개의 수 1, 2, 3, 4, 5 중 두 개를 택하는 경우의 수와 다섯 개의 수 1, 2, 3, 4, 5 중 앞에서 선택된 두 개의 수를 제외한 세 개의 수 중 두 개를 택하는 경우의 수의 곱과 같으므로

${}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2=10\times3=30$

집합 $\{a,\ b\}\cap\{d,\ e\}$의 원소의 개수가 2인 경우의 수는 다섯 개의 수 1, 2, 3, 4, 5 중 두 개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{C}_2=10$

그러므로 $a<b<c$, $c<d<e$이고 집합 $\{a,\ b\}\cup\{d,\ e\}$의 원소의 개수가 3일 확률은

$\dfrac{100-30-10}{6^5}=\dfrac{60}{6^5}$

(i)~(iv)에서

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{6^5}+\dfrac{9}{6^5}+\dfrac{36}{6^5}+\dfrac{100}{6^5}=\dfrac{146}{6^5}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{0}{6^5}+\dfrac{6}{6^5}+\dfrac{24}{6^5}+\dfrac{60}{6^5}=\dfrac{90}{6^5}$

이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{90}{6^5}}{\frac{146}{6^5}}=\frac{45}{73}$$

따라서 $p=73$, $q=45$이므로 $p+q=73+45=118$

26. 정답 ②

상자 A에 검은 공이 6개 들어 있으므로 시행 후 두 상자 A와 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 서로 같으려면 두 상자 A와 B에 검은 공이 각각 3개씩 들어 있어야 한다.

(i) 흰 공 3개를 꺼내는 경우

상자 B에는 검은 공이 최대 2개 들어갈 수 있으므로 두 상자 A와 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 서로 같을 수 없다.

(ii) 흰 공 2개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우

상자 B에 검은 공이 3개 들어가려면 나중에 꺼내는 2개의 공이 모두 검은 공이어야 하므로 이 경우의 확률은

$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}\times\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{7}$

(iii) 흰 공 1개, 검은 공 2개를 꺼내는 경우

상자 B에 검은 공이 3개 들어가려면 나중에 꺼내는 2개의 공 중 검은 공이 1개이어야 하므로 이 경우의 확률은

$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{7}$

(iv) 검은 공 3개를 꺼내는 경우

상자 B에 검은 공이 3개 들어 있으므로 이 경우의 확률은

$\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{6}$

(i)~(iv)에 의하여 구하는 확률은

$\dfrac{1}{7}+\dfrac{2}{7}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{25}{42}$

27. 정답 ⑤

한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 홀수일 확률과 짝수일 확률은 각각 $\dfrac{1}{2}$이다.

(i) 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 홀수인 경우

주머니 A에서 흰 공 1개를 꺼내어 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 흰 공 3개와 검은 공 4개가 들어 있게 되는데, 주머니 B에서 흰 공 1개를 꺼낼 확률은

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_1}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_1}=\dfrac{3}{35}$

주머니 A에서 검은 공 1개를 꺼내어 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 흰 공 2개와 검은 공 5개가 들어 있게 되는데, 주머니 B에서 흰 공 1개를 꺼낼 확률은

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_1}\times\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_1}=\dfrac{3}{35}$

따라서 이 경우에 주머니 B에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$\dfrac{3}{35}+\dfrac{3}{35}=\dfrac{6}{35}$

(ii) 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 짝수인 경우

주머니 A에서 흰 공 2개를 동시에 꺼내어 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 흰 공 4개와 검은 공 4개가 들어 있게 되는데, 주머니 B에서 흰 공 1개를 꺼낼 확률은

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_1}=\dfrac{1}{40}$

주머니 A에서 흰 공 1개와 검은 공 1개를 동시에 꺼내어 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 흰 공 3개와 검은 공 5개가 들어 있게 되는데, 주머니 B에서 흰 공 1개를 꺼낼 확률은

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_1}=\dfrac{9}{80}$

주머니 A에서 검은 공 2개를 동시에 꺼내어 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 흰 공 2개와 검은 공 6개가 들어 있게 되는데, 주머니 B에서 흰 공 1개를 꺼낼 확률은

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_1}=\dfrac{3}{80}$

따라서 이 경우에 주머니 B에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$\dfrac{1}{40}+\dfrac{9}{80}+\dfrac{3}{80}=\dfrac{7}{40}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{6}{35}+\frac{7}{40}=\frac{97}{280}$

28. **정답** 7

8개의 장난감 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_8C_2=28$

럭키박스에 넣은 2개의 장난감이 서로 다른 종류인 사건을 A라 하면 그 여사건 A^C은 럭키박스에 넣은 2개의 장난감이 서로 같은 종류인 사건이다.

같은 종류의 인형 3개 중 2개를 택하거나 같은 종류의 피규어 3개 중 2개를 택하거나 같은 종류의 자석블록 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2+{}_3C_2+{}_2C_2=3+3+1=7$

이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$

그러므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

따라서 $p=4$, $q=3$이므로

$p+q=4+3=7$

29. **정답** 17

두 주머니에서 서로 다른 색의 공을 꺼내는 사건을 E, 받은 점수가 6의 배수인 사건을 F라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(E\mid F)$이다.

(ⅰ) 두 주머니에서 서로 다른 색의 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(E)=\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

주사위를 1번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 6이고, 나온 눈의 수에 3을 곱한 값이 6의 배수가 되는 경우는

3×2, 3×4, 3×6

이므로 이 경우의 수는 3이다.

그러므로 $\mathrm{P}(E\mid F)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(ⅱ) 두 주머니에서 서로 같은 색의 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(E^C)=1-\mathrm{P}(E)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

주사위를 2번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 6^2이고, 나온 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때 ab가 6의 배수가 되는 순서쌍 (a, b)는

① 주사위에서 나온 눈의 수에 6이 있는 경우

$(6, 1)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$, $(6, 4)$, $(6, 5)$, $(6, 6)$, $(1, 6)$, $(2, 6)$, $(3, 6)$, $(4, 6)$, $(5, 6)$

의 11가지이다.

② 주사위에서 나온 눈의 수에 6이 없는 경우

$(2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$

의 4가지이다.

①, ②에서

$\mathrm{P}(F\mid E^C)=\frac{11+4}{6^2}=\frac{15}{6^2}=\frac{5}{12}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\mathrm{P}(E\cap F)=\mathrm{P}(E)\mathrm{P}(F\mid E)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(F)=\mathrm{P}(E\cap F)+\mathrm{P}(E^C\cap F)$

$=\mathrm{P}(E)\mathrm{P}(F\mid E)+\mathrm{P}(E^C)\mathrm{P}(F\mid E^C)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{12}=\frac{11}{24}$

이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E\mid F)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(F)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{11}{24}}=\frac{6}{11}$

따라서 $p=11$, $q=6$이므로 $p+q=11+6=17$

30. **정답** ①

세 주머니 A, B, C에서 각각 임의로 1개의 공을 꺼내는 시행을 할 때, 꺼낸 3개의 공에 적힌 수를 각각 a, b, c라 하고, 이 시행에서 꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 최댓값과 최솟값의 차가 3인 사건을 M, 꺼낸 3개의 공에 적힌 수를 모두 곱한 값이 8인 사건을 N이라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(M\cup N)$이다.

(ⅰ) 세 수 a, b, c의 최댓값과 최솟값의 차가 3인 경우는

① $(a, b, c)=(1, 2, 4)$일 때

이 경우의 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{9}$

② $(a, b, c)=(1, 1, 4)$일 때

이 경우의 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{18}$

③ $(a, b, c)=(2, 1, 4)$일 때

이 경우의 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{36}$

그러므로 $\mathrm{P}(M)=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=\frac{7}{36}$

(ⅱ) 세 수 a, b, c의 최댓값과 최솟값의 차가 3이면서 세 수 a, b, c의 곱이 8인 경우는

① $(a, b, c)=(1, 2, 4)$일 때

이 경우의 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{9}$

② $(a, b, c)=(2, 1, 4)$일 때

이 경우의 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{36}$

그러므로 $\mathrm{P}(M\cap N)=\frac{1}{9}+\frac{1}{36}=\frac{5}{36}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(M\cup N)=\mathrm{P}(M)+\mathrm{P}(N)-\mathrm{P}(M\cap N)$

$=\frac{7}{36}+\frac{1}{4}-\frac{5}{36}=\frac{11}{36}$

31. **정답** 19

주머니 A에 들어 있는 카드에 적혀 있는 모든 수의 합은

$1+2+6+8=17$

주머니 B에 들어 있는 카드에 적혀 있는 모든 수의 합은

$3+4+5+7=19$

두 번의 시행은 다음 세 가지 경우로 나눌 수 있다. 이때 두 번의 시행을 한 후 두 주머니 A, B에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수의 합을 각각 S_1, S_2라 하자.

(ⅰ) 한 개의 주사위를 두 번 던져 나온 눈의 수가 모두 6의 약수인

경우

두 번의 시행에서 주머니 A에 들어 있는 카드 2장을 꺼내어 주머니 B에 넣으므로

$S_1 \le 17-1-2=14$, $S_2 \ge 19+1+2=22$

그러므로 $S_1 < S_2$이다.

(ⅱ) 한 개의 주사위를 두 번 던져 6의 약수가 한 번, 6의 약수가 아닌 수가 한 번 나온 경우

첫 번째 시행에서 6의 약수가 나오고 두 번째 시행에서 6의 약수가 아닌 수가 나왔을 때, 주머니 A에서 꺼내어 주머니 B에 넣은 카드에 적혀 있는 숫자를 a, 주머니 B에서 꺼내어 주머니 A에 넣은 카드에 적혀 있는 숫자를 b라 하고 $S_1 > S_2$인 경우를 두 수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

$(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$, $(1,\ 5)$, $(1,\ 7)$, $(2,\ 4)$, $(2,\ 5)$, $(2,\ 7)$

이므로 $S_1 > S_2$인 경우의 수는 7이다.

마찬가지 방법으로 첫 번째 시행에서 6의 약수가 아닌 수가 나오고 두 번째 시행에서 6의 약수가 나왔을 때, $S_1 > S_2$인 경우의 수는 7이다.

(ⅲ) 한 개의 주사위를 두 번 던져 나온 눈의 수가 모두 6의 약수가 아닌 경우

두 번째의 시행에서 주머니 B에 들어 있는 카드 2장을 꺼내어 주머니 A에 넣으므로

$S_1 \ge 17+3+4=24$, $S_2 \le 19-3-4=12$

그러므로 $S_1 > S_2$이다.

한편, 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 6의 약수일 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이고, 6의 약수가 아닐 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다.

그러므로 두 번의 시행 후 주머니 A에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수의 합이 주머니 B에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수의 합보다 큰 사건을 S, 두 주머니 A, B에 들어 있는 카드의 개수가 같은 사건을 T라 하면 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$$\mathrm{P}(S)=2\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{7}{4\times5}\right)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{45}+\frac{1}{9}=\frac{4}{15},$$

$$\mathrm{P}(S\cap T)=2\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{7}{4\times5}\right)=\frac{7}{45}$$

이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(T\mid S)=\frac{\mathrm{P}(S\cap T)}{\mathrm{P}(S)}=\frac{\frac{7}{45}}{\frac{4}{15}}=\frac{7}{12}$$

따라서 $p=12$, $q=7$이므로

$p+q=12+7=19$

③ 통계

TH①. 2024년 수능특강

2024년 수능특강 유제

3점(27번) 연계 가능

1. 노란 공 2개, 빨간 공 3개, 파란 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 색을 확인하고 주머니에 다시 넣는 시행에서 꺼낸 공의 색이 모두 서로 다른 사건을 A라 하자. 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 색을 확인하고 주머니에 다시 넣는 독립시행을 490번 반복할 때, 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\sigma(5X-1)$의 값을 구하시오.

2024년 수능특강 Lv2

3점(27번) 연계 가능

2. 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 적혀 있는 수를 확인하고 주머니에 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 세 수 중 1, 3, 5 또는 2, 4, 7과 같이 세 수 중 어느 두 수도 차가 1이 아닌 사건을 A라 하자. 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 적혀 있는 수를 확인하고 주머니에 다시 넣는 독립시행을 49번 반복할 때, 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X^2)$의 값을 구하시오.

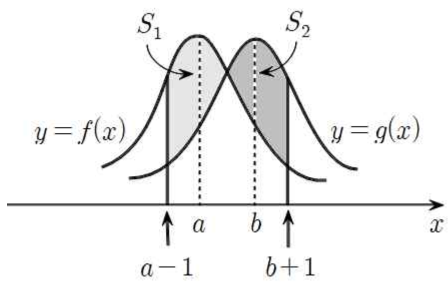
3. 자연수 n에 대하여 이산확률변수 X가 갖는 값은 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,$ $2n$이고 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=k)=c\{(-1)^{k+1}+k\}$$
$$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2n)$$

이다. $\mathrm{E}(X)=\frac{48}{5}$ 일 때, 자연수 n의 값은? (단, c는 상수이다.)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

4. $8\leq a<b\leq 12$인 두 실수 $a,\ b$에 대하여 평균이 a이고 정규분포를 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하고 평균이 b이고 정규분포를 따르는 확률변수 Y의 확률밀도함수를 $g(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x),\ g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.



(가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(x-2)$이다. (나) $f(8)=g(12)$

두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프 및 직선 $x=a-1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프 및 직선 $x=b+1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자.
$\mathrm{P}(6\leq X\leq 8)=0.24,\ \mathrm{P}(8\leq X\leq 10)=0.38$일 때,
S_1+S_2의 값은?

① 0.24 ② 0.26 ③ 0.28
④ 0.3 ⑤ 0.32

$5.$ 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 $x=20$에서 최댓값을 갖는다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(x+k)$이다.

$\mathrm{P}(16 \leq X \leq 24)=0.6826$, $\mathrm{P}(Y \geq 31)=0.0228$일 때, 실수 k의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

2024년 수능특강 Lv2

3점(27번) 연계 가능

$6.$ 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 6의 약수이면 1점, 6의 약수가 아니면 3점을 얻는 게임이 있다. 이 게임을 72번 반복하여 얻은 모든 점수의 합이 104점 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.0896
④ 0.1587 ⑤ 0.1649

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

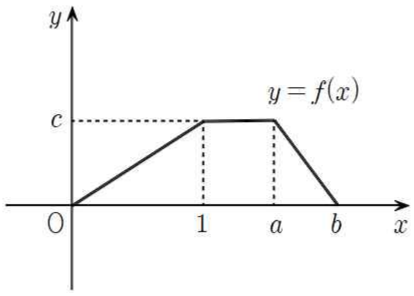
7. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq a$이고, X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

$\mathrm{P}(X \geq 1)-\mathrm{P}(X \leq 1)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}\left(X \geq \frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{16}$

일 때, $a(b-c)$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

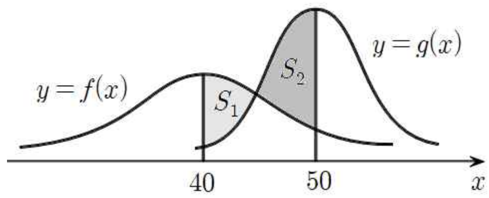
① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{13}{8}$ ③ $\frac{7}{4}$

④ $\frac{15}{8}$ ⑤ 2



2024년 수능특강 Lv3

8. 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 10^2)$을 따르는 확률변수 X와 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. 그림과 같이 $40 \leq X \leq 50$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $x=40$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하고, $40 \leq X \leq 50$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $x=50$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. S_2-S_1의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이 0.1359일 때, σ의 값은?



(단, $0<\sigma<10$)

① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 ⑤ 9

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

9. 양의 실수 t에 대하여 확률변수 X는 평균이 t^2이고 표준편차가 $\frac{1}{t}$인 정규분포를 따른다. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(t)$를 $f(t)=\mathrm{P}(X \le 3)$이라 할 때, 함수 $f(t)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

① 0.8413 ② 0.9104 ③ 0.9332
④ 0.9772 ⑤ 0.9938

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

10. 어느 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 3인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 3 이하의 어떤 자연수 k에 대하여

$$\mathrm{P}(\overline{X}=k)=\mathrm{P}(X=k)$$

를 만족시킨다. $a>b>0$일 때, $\frac{a}{b}$의 값은?

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{7}$	b	1

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

11. 각 면에 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 상자와 각 면에 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나식 적혀 있는 정사면체 모양의 상자를 사용하여 다음의 시행을 한다.

두 개의 상자를 동시에 한 번씩 던져 바닥에 닿은 두 면에 적혀 있는 두 수가 다르면 두 수 중 작은 수를 기록하고, 바닥에 닿은 두 면에 적혀 있는 두 수가 같으면 6을 기록한다.

위의 시행을 2번 반복하여 기록한 두 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}\left(\overline{X}=4\right)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

2024년 수능특강 Lv3

12. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m_1,\ {\sigma_1}^2\right)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m_2,\ {\sigma_2}^2\right)$을 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$와 확률변수 Y의 확률밀도함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(-x)$이다. (나) $g(1)=f(9)$

확률변수 X의 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하고, 확률변수 Y의 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자.;
$\mathrm{P}\left(\overline{X}\leq\ 3\right)=\mathrm{P}\left(\overline{Y}\geq\ -1\right)$일 때, 자연수 n의 값을 구하시오.

3점(27번) 연계 가능

13. 어느 화사에서 근무하는 택배 기사 한 명의 1일 배송 거리는 평균이 m이고 표분편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 근무하는 택배 기사 49명을 임의추출하여 얻은 1일 배송 거리의 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $154.25 \leq m \leq a$이다. 이 회사에서 근무하는 택배 기사 36명을 임의추출하여 얻은 1일 배송 거리의 표본평균이 $\overline{x_2}$일 대, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $b \leq m \leq 182.65$이다. $\overline{x_2} - \overline{x_1} = 21.3$일 때, $a+b$의 값은? (단, 배송 기리의 단위는 km이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \leq 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \leq 2.58) = 0.99$로 계산한다.)

① 331.9 ② 332.9 ③ 333.9
④ 334.9 ⑤ 335.9

TH②. 2024년 수능완성

2024년 수능완성

14. 숫자 1이 적혀 있는 공이 1개, 숫자 2가 적혀 있는 공이 2개, 숫자 3이 적혀 있는 공이 3개, $\cdots$, 숫자 n이 적혀 있는 공이 n개 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 그 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X_n이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \mathrm{E}(9X_n+1)$의 값은? (단, n은 자연수이다.)

① 280 ② 310 ③ 340
④ 370 ⑤ 400

15. 수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 2번 던지는 시행에서 나오는 눈의 수의 차가 4의 약수이면 점 P를 양의 방향으로 3만큼 이동시키고 4의 약수가 아니면 점 P를 음의 방향으로 2만큼 이동시킨다. 이 시행을 36회 반복한 후 점 P의 좌표를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은?

① 30 ② 34 ③ 38
④ 42 ⑤ 46

2024년 수능완성

16. $0 \leq x \leq 6$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x & (0 \leq x < 2) \\ x-2 & (2 \leq x < 4) \\ x-4 & (4 \leq x \leq 6) \end{cases}$$

에 대하여 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq 6$이고 X의 확률밀도함수 $g(x)$가

$$g(x)=k\times|f(x)-1| \quad (k>0)$$

이다. $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \leq X \leq a\right)=\frac{5}{12}$일 때, $k+a$의 값은? (단, k, a는 상수이다.)

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{11}{3}$
④ $\frac{23}{6}$ ⑤ 4

17. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 함수 $f(x)=\mathrm{P}(|X-m| \leq x)$가 두 양수 a, b에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(a)-f(b)=0.0880$
(나) $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}=0.9104$

$\dfrac{a-b}{\sigma}$의 값을 다음 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

① 0.1 ② 0.2 ③ 0.3
④ 0.4 ⑤ 0.5

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

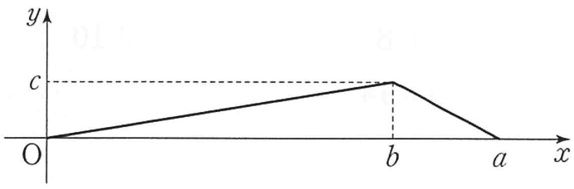
2024년 수능완성

18. 주사위를 288번 던져서 3의 배수의 눈이 나오면 2점을 얻고, 3의 배수의 눈이 나오지 않으면 1점을 얻는다. 얻은 점수의 합이 k점 이하일 확률이 0.9772일 때, 자연수 k의 값을 다음 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

① 392 ② 396 ③ 400
④ 404 ⑤ 408

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

19. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq a$이고, X의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같다.



$4\mathrm{P}\left(0 \leq X \leq \frac{b}{2}\right) = 3\mathrm{P}(b \leq X \leq a)$일 때,

$\mathrm{P}\left(\frac{b}{2} \leq X \leq \frac{a}{2}\right) = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2024년 수능완성

20. 양수 a에 대하여 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $-a \leq X \leq a+1$이고, X의 확률밀도함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} x+a & (-a \leq x < 0) \\ a & (0 \leq x < a) \\ -a(x-a-1) & (a \leq x \leq a+1) \end{cases}$$

$\mathrm{P}(k \leq X \leq a) = \frac{1}{2}$을 만족시키는 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{-2+\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{-2+\sqrt{3}}{5}$ ③ $\frac{-2+\sqrt{3}}{4}$

④ $\frac{-2+\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{-2+\sqrt{3}}{2}$

21. 확률변수 X는 평균이 m_1, 표준편차가 4인 정규분포를 따르고, 확률변수 Y는 평균이 m_2, 표준편차가 4인 정규분포를 따른다고 한다. 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \leq g(20)$이다.
> (나) $f(16) = g(16)$

$\mathrm{P}(X \leq 10) + \mathrm{P}(Y \geq 22)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $m_1 \neq m_2$이고, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점]

① 0.1915 ② 0.3085 ③ 0.4328
④ 0.5328 ⑤ 0.6170

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

2024년 수능완성

22. 3보다 큰 상수 k에 대하여 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq k$이고 X의 확률밀도함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} ax & (0 \leq x \leq 2) \\ 2a & (2 \leq x \leq k) \end{cases}$$

연속확률변수 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \leq Y \leq 6$이고 Y의 확률밀도함수 $g(x)$가

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x \leq 3) \\ f(6-x) & (3 \leq x \leq 6) \end{cases}$$

일 때, $\mathrm{P}\left(1 \leq X \leq \frac{2}{3}k\right)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{11}{24}$ ③ $\frac{23}{48}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{25}{48}$

23. 어느 모집단에서 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따른다. 이 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자.

$$\mathrm{P}(X \le a) = \mathrm{P}(Z \le a-b),\ \mathrm{P}(\overline{X} \ge a) = \mathrm{P}(Z \le b)$$

일 때, $\dfrac{b}{a}$의 값은? (단, m, a, b는 모두 0이 아닌 실수이고, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [3점]

① 1 ② $\dfrac{10}{9}$ ③ $\dfrac{11}{9}$

④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{13}{9}$

1. 정답 50

풀이

주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_{9}C_{3}=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

한 번의 시행에서 꺼낸 공의 색이 모두 서로 다른 경우는 노란 공, 빨간 공, 파란 공을 각각 1개씩 꺼내는 경우이므로 이 경우의 확률은

$$\frac{{}_{2}C_{1}\times{}_{3}C_{1}\times{}_{4}C_{1}}{{}_{9}C_{3}}=\frac{24}{84}=\frac{2}{7}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(490,\ \frac{2}{7}\right)$를 따르므로

$$\sigma(X)=\sqrt{490\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{7}}=10$$

$$\sigma(5X-1)=5\sigma(X)=5\times10=50$$

2. 정답 206

풀이

7개의 공 중 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_{7}C_{3}=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

꺼낸 공에 적혀 있는 세 수가 각각 $a,\ b,\ c\ (a<b<c)$인 경우를 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$로 나타내자.

꺼낸 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 차가 1이 아닌 경우는

$(1,\ 3,\ 5),\ (1,\ 3,\ 6),\ (1,\ 3,\ 7),\ (1,\ 4,\ 6),\ (1,\ 4,\ 7),$
$(1,\ 5,\ 7),\ (2,\ 4,\ 6),\ (2,\ 4,\ 7),\ (2,\ 5,\ 7),\ (3,\ 5,\ 7)$

일 때이므로 이 경우의 수는 10이다.

한 번의 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않을 확률은 $\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(49,\ \frac{2}{7}\right)$를 따른다.

따라서

$$\mathrm{E}(X)=49\times\frac{2}{7}=14$$

$$\mathrm{V}(X)=49\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{7}=10$$

이므로

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=10+14^2=206$$

3. 정답 ③

풀이

확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이고

$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}=0$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n}\mathrm{P}(X=k)&=\sum_{k=1}^{2n}c\{(-1)^{k+1}+k\}\\&=c\left\{\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}+\sum_{k=1}^{2n}k\right\}\\&=c\left\{0+\frac{2n(2n+1)}{2}\right\}\\&=cn(2n+1)=1\end{aligned}$$

에서

$$c=\frac{1}{n(2n+1)}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n}k(-1)^{k+1}&=1+(-2)+3+(-4)+\cdots+(2n-1)+(-2n)\\&=-n\end{aligned}$$

$\mathrm{E}(X)=\frac{48}{5}$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{k=1}^{2n}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}\\&=\sum_{k=1}^{2n}kc\{(-1)^{k+1}+k\}\\&=c\left\{\sum_{k=1}^{2n}k(-1)^{k+1}+\sum_{k=1}^{2n}k^2\right\}\\&=\frac{1}{n(2n+1)}\times\left\{-n+\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}\right\}\\&=-\frac{1}{2n+1}+\frac{4n+1}{3}\\&=\frac{2(4n^2+3n-1)}{3(2n+1)}=\frac{48}{5}\end{aligned}$$

이므로

$$\frac{4n^2+3n-1}{2n+1}=\frac{72}{5}$$

$20n^2+15n-5=144n+72$

$20n^2-129n-77=0$

$(20n+11)(n-7)=0$

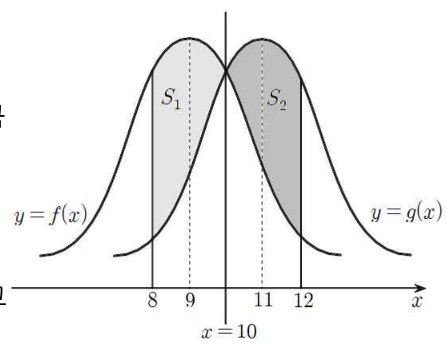
n은 자연수이므로 $n=7$

4. 정답 ③

길잡이

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, 이 그래프와 x축 사이의 넓이는 1이다.

풀이



조건 (가)에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 두 확률변수 $X,\ Y$의 표준편차가 같고 $b=a+2$이다.

조건 (나)에서 $f(8)=g(12)$이고 $8\le a<b\le 12$이므로 그림과 같이 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=10$에 대하여 대칭이어야 한다.

따라서 $\frac{a+(a+2)}{2}=10$에서 $a=9,\ b=11$이고 $S_1=S_2$이다.

이때 $S_1=\mathrm{P}(8\le X\le 10)-\mathrm{P}(8\le Y\le 10)$이고

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(8\le Y\le 10)&=\mathrm{P}(10\le X\le 12)\\&=\mathrm{P}(9+1\le X\le 9+3)\\&=\mathrm{P}(9-3\le X\le 9-1)\\&=\mathrm{P}(6\le X\le 8)\end{aligned}$$

$=0.24$
이므로 $S_1+S_2=2S_1=2\times(0.38-0.24)=0.28$

5. 정답 ①

풀이

조건 (가)에 의하여 확률변수 X의 평균은 20이고, 조건 (나)에 의하여 확률변수 Y의 평균은 $20-k$이다.
또한 조건 (나)에 의하여 두 확률변수 X, Y의 표준편차는 같으므로 표준편차를 σ라 하자.
확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-20}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
$\mathrm{P}(16\le X\le 24)=0.6826$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(16\le X\le 24)&=\mathrm{P}\left(\frac{16-20}{\sigma}\le Z\le \frac{24-20}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{4}{\sigma}\le Z\le \frac{4}{\sigma}\right)\\&=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{4}{\sigma}\right)\\&=0.6826\end{aligned}$$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{4}{\sigma}\right)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\dfrac{4}{\sigma}=1,\ \sigma=4$

한편 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(20-k,\ 4^2)$을 따르므로
$Z=\dfrac{Y-(20-k)}{4}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
$\mathrm{P}(Y\ge 31)=0.0228$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\ge 31)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{31-(20-k)}{4}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{11+k}{4}\right)\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(Y\ge 31)=0.0228<0.5$에서 $\dfrac{11+k}{4}>0$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{11+k}{4}\right)&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{11+k}{4}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{11+k}{4}\right)\\&=0.0228\end{aligned}$$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{11+k}{4}\right)=0.5-0.0228=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\dfrac{11+k}{4}=2,\ k=-3$

6. 정답 ①

풀이

한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 6의 약수일 확률은
$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$이므로 주사위를 72번 던져서 나온 눈의 수가 6의 약수인 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(72,\ \dfrac{2}{3}\right)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=72\times\dfrac{2}{3}=48$

$\mathrm{V}(X)=72\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=16$

이때 72는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(48,\ 4^2)$을 따르고 $Z=\dfrac{X-48}{4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
게임을 72번 반복하여 얻은 모든 점수의 합을 확률변수 Y라 하면
$Y=1\times X+3\times(72-X)=-2X+216$
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\le 104)&=\mathrm{P}(-2X+216\le 104)\\&=\mathrm{P}(X\ge 56)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{56-48}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

7. 정답 ②

풀이

$\mathrm{P}(X\le 1)+\mathrm{P}(X\ge 1)=1$이고

$\mathrm{P}(X\ge 1)-\mathrm{P}(X\le 1)=\dfrac{1}{4}$이므로

$2\mathrm{P}(X\le 1)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

즉, $\mathrm{P}(X\le 1)=\dfrac{3}{8}$ …… ㉠

$\mathrm{P}(X\le 1)=\dfrac{1}{2}\times 1\times c=\dfrac{c}{2}$

㉠에서 $\dfrac{c}{2}=\dfrac{3}{8}$, $c=\dfrac{3}{4}$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge b)&=\frac{1}{2}\times(a-b)\times c\\&=\frac{1}{2}\times(a-b)\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}(a-b)\end{aligned}$$

$\mathrm{P}\left(X\ge \dfrac{a+b}{2}\right)=\dfrac{1}{16}$

이때 $\mathrm{P}(X\ge b)$의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=b$로 둘러싸인 도형 중 삼각형의 넓이이고 $\mathrm{P}\left(X\ge \dfrac{a+b}{2}\right)$의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=\dfrac{a+b}{2}$로 둘러싸인 도형 중 삼각형의 넓이이다.
따라서 삼가형의 닮음비를 이용하면

$\mathrm{P}(X\ge b)\ :\ \mathrm{P}\left(X\ge \dfrac{a+b}{2}\right)=(a-b)^2\ :\ \left(a-\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

이므로

$\dfrac{3}{8}(a-b)\ :\ \dfrac{1}{16}=(a-b)^2\ :\ \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$

$3(a-b) : \frac{1}{2} = 1 : \frac{1}{4}$

즉, $a-b=\frac{2}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉡

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times\{a+(b-1)\}\times\frac{3}{4}=1$

$a+b-1=\frac{8}{3}$, $a+b=\frac{11}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

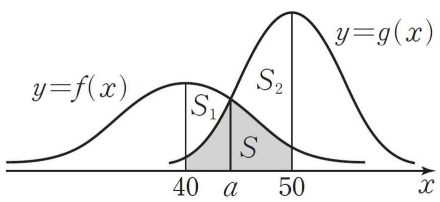
$a=\frac{13}{6}$, $b=\frac{3}{2}$

따라서

$a(b-c)=\frac{13}{6}\times\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)=\frac{13}{8}$

8. **정답** ①

풀이



$40<x<50$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표를 a라 하자.

곡선 $y=g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=40$, $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이와 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=50$으로 둘러싸인 부분의 넓이의 합을 S라 하면

$S_1=\mathrm{P}(40\le X\le 50)-S$

$S_2=\mathrm{P}(40\le Y\le 50)-S$

$S_2-S_1=\mathrm{P}(40\le Y\le 50)-\mathrm{P}(40\le X\le 50)$

$=0.1359$

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-40}{10}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{Y-50}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(40\le Y\le 50)=\mathrm{P}\left(\frac{40-50}{\sigma}\le Z\le\frac{50-50}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{10}{\sigma}\le Z\le 0\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(40\le X\le 50)=\mathrm{P}\left(\frac{40-40}{10}\le Z\le\frac{50-40}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

따라서

$S_2-S_1=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma}\right)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma}\right)-0.3413$

$=0.1359$

이므로

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma}\right)=0.1359+0.3413=0.4772$

이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\frac{10}{\sigma}=2$, $\sigma=5$

9. **정답** ④

풀이

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}\left(t^2,\ \left(\frac{1}{t}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z=\frac{X-t^2}{\frac{1}{t}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$f(t)=\mathrm{P}(X\le 3)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{3-t^2}{\frac{1}{t}}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le 3t-t^3)$

$g(t)=3t-t^3$이라 하자.

함수 $f(t)$가 최댓값을 갖기 위해서는 $g(t)=3t-t^3$ $(t>0)$이 최댓값을 가져야 한다.

$g'(t)=3-3t^2=3(1+t)(1-t)$

$g'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=1$

$t>0$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$
$g(t)$		↗	극대	↘

$t=1$에서 함수 $g(t)$는 극대이면서 최대이고 최댓값은 $g(1)=3\times1-1^3=2$이다.

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 최대이고 최댓값은

$f(1)=\mathrm{P}(X\le 3)$

$=\mathrm{P}(Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5+0.4772$

$=0.9772$

10. **정답** ②

풀이

이 모집단에서 임의추출한 크기가 3인 표본을 $(X_1,\ X_2,\ X_3)$라 하자.

(i) $k=1$인 경우

$\overline{X}=1$인 경우 $X_1=X_2=X_3$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=a^3$

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\mathrm{P}(X=1)$에서

$a^3=a$

이때 $0<a<\frac{6}{7}$이므로 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $k=2$인 경우

$\overline{X}=2$인 경우 $(X_1,\ X_2,\ X_3)$은 $(1,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 3,\ 2)$, $(2,\ 1,\ 3)$,

$(2,\ 2,\ 2),\ (2,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1)$

$$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=6\times a\times\frac{1}{7}+b+\left(\frac{1}{7}\right)^2$$

$$=\frac{6}{7}ab+\frac{1}{343}$$

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\mathrm{P}(X=2)$에서

$$\frac{6}{7}ab+\frac{1}{343}=\frac{1}{7}$$

$$ab=\frac{8}{49}$$

이때 $ab=\frac{6}{7}$이고 $a>b>0$이므로

$$a=\frac{4}{7},\ b=\frac{2}{7}$$

(iii) $k=3$인 경우

$\overline{X}=3$인 경우 $X_1=X_2=X_3=3$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=3)=b^3$

$\mathrm{P}(\overline{X}=3)=\mathrm{P}(X=3)$에서

$b^3=b$

이때 $0<b<\frac{6}{7}$이므로 만족시키는 b의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$$a=\frac{4}{7},\ b=\frac{2}{7}$$

따라서 $\frac{a}{b}=2$

11. 정답 287

풀이

주어진 시행을 2번 반복하여 기록한 수를 차례로 $X_1,\ X_2$라 하면

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$$

이므로 $\frac{X_1+X_2}{2}=4$에서

$X_1+X_2=8$

한 번의 시행에서 기록할 수 있는 수는 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6$이므로

$X_1=2,\ X_2=6$ 또는 $X_1=4,\ X_2=4$ 또는 $X_1=6,\ X_2=2$

각 면에 $1,\ 2,\ 3,\ 4$의 숫자가 하나씩 적혀 이 있는 정사면체 모양의 상자를 A, 각 면에 $2,\ 3,\ 4,\ 5$의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 상자를 B 라 하자.

(ⅰ) 2를 기록할 확률

A에서 2가 나오고 B에서 3, 4, 5가 나오거나 A에서 3, 4가 나오고 B에서 2가 나오면 되므로

$$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$$

(ⅱ) 4를 기록할 확률

A에서 4가 나오고 B에서 5가 나오면 되므로

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

(ⅲ) 6을 기록할 삭률

A, B에서 같은 수가 나오면 되므로

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times3=\frac{3}{16}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$X_1=2,\ X_2=6$일 확률은

$$\frac{5}{16}\times\frac{3}{16}=\frac{15}{256}$$

$X_1=4,\ X_2=4$일 확률은

$$\frac{1}{16}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{256}$$

$X_1=6,\ X_2=2$일 확률은

$$\frac{3}{16}\times\frac{5}{16}=\frac{15}{256}$$

따라서

$$\mathrm{P}(\overline{X}=4)=\frac{15}{256}+\frac{1}{256}+\frac{15}{256}=\frac{31}{256}$$

이므로 $p+q=256+31=287$

12. 정답 144

풀이

조건 (가)에서 $g(1)=f(-1)$이고 조건 (나)에서 $g(1)=f(9)$이므로

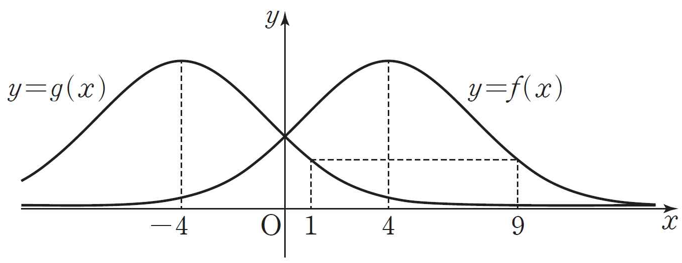
$f(-1)=f(9)$

확률변수 X가 정규분포를 따르므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=m_1$에 대하여 대칭이다.

즉, $m_1=\frac{-1+9}{2}=4$

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(-x)$이므로 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$는 y축에 대하여 대 칭이다.

즉, $m_2=-4,\ \sigma_1=\sigma_2$



확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(4,\ \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고, $Z=\frac{\overline{X}-4}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(-4,\ \left(\frac{\sigma_1}{4}\right)^2\right)$을 따르고 $=\frac{\overline{Y}-4}{\frac{\sigma_1}{4}}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(\overline{X}\le 3)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{3-4}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{\sqrt{n}}{\sigma_1}\right),$$

$$\mathrm{P}(\overline{Y}\ge -1)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{-1+4}{\frac{\sigma_1}{4}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{12}{\sigma_1}\right)$$

에서 $\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{\sqrt{n}}{\sigma_1}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{12}{\sigma_1}\right)$이므로 $\frac{\sqrt{n}}{\sigma_1}=\frac{12}{\sigma_1}$

따라서 $n=144$

13. 정답 ③

풀이

모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}\leq m\leq \overline{x_1}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}$

$x_1-0.28\sigma=154.25,\ \overline{x_1}+2.28\sigma=a$ ⋯⋯ ㉠

모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-2.58\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{36}}\leq m\leq \overline{x_2}+2.58\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{36}}$

$\overline{x_2}-0.43\sigma=b,\ \overline{x_2}+0.43\sigma=182.65$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$\left(\overline{x_2}+0.43\sigma\right)-\left(\overline{x_1}-0.28\sigma\right)=182.65-154.25$

$\overline{x_2}-\overline{x_1}+0.71\sigma=28.4$

$0.71\sigma=28.4-\left(\overline{x_2}-\overline{x_1}\right)=28.4-21.3=7.1$

즉, $\sigma=10$

㉠, ㉡에서

$\left(\overline{x_2}+0.43\times10\right)+\left(\overline{x_1}-0.28\times10\right)=182.65+154.25$

즉, $\overline{x_2}+\overline{x_1}=335.4$

따라서

$a+b=\left(\overline{x_1}+0.28\times10\right)+\left(\overline{x_2}-0.43\times10\right)$

$\quad=335.4+2.8-4.3=333.9$

14. 정답 ④

주머니 안에 들어 있는 모든 공의 개수는

$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

이고, 확률변수 X_n이 갖는 값은 1, 2, 3, ⋯, n이다.

$\mathrm{P}(X_n=1)=\dfrac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{2\times1}{n(n+1)}$

$\mathrm{P}(X_n=2)=\dfrac{2}{\frac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{2\times2}{n(n+1)}$

$\mathrm{P}(X_n=3)=\dfrac{3}{\frac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{2\times3}{n(n+1)}$

⋮

$\mathrm{P}(X_n=n)=\dfrac{n}{\frac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{2\times n}{n(n+1)}$

확률변수 X_n의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	⋯	n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{2\times1}{n(n+1)}$	$\dfrac{2\times2}{n(n+1)}$	$\dfrac{2\times3}{n(n+1)}$	⋯	$\dfrac{2\times n}{n(n+1)}$	1

$\mathrm{E}(X_n)=1\times\dfrac{2\times1}{n(n+1)}+2\times\dfrac{2\times2}{n(n+1)}+3\times\dfrac{2\times3}{n(n+1)}$

$\qquad+\cdots+n\times\dfrac{2\times n}{n(n+1)}$

$\quad=\dfrac{2}{n(n+1)}\times\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)$

$\quad=\dfrac{2}{n(n+1)}\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\quad=\dfrac{2n+1}{3}$

따라서

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\mathrm{E}(9X_n+1)=\sum_{n=1}^{10}\{9\mathrm{E}(X_n)+1\}$

$\displaystyle\quad=\sum_{n=1}^{10}\left(9\times\frac{2n+1}{3}+1\right)$

$\displaystyle\quad=\sum_{n=1}^{10}(6n+4)$

$\quad=6\times\dfrac{10\times11}{2}+4\times10$

$\quad=370$

15. 정답 ③

한 개의 주사위를 2번 던져서 나오는 눈의 수의 차가 4의 약수가 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 4의 약수가 나오지 않는 횟수는 $36-Y$이므로

$X=3Y-2(36-Y)=5Y-72$

한 개의 주사위를 2번 던져서 나오는 눈의 수의 차를 표로 나타내면 다음과 같다.

첫 번째 나온 눈의 수 \ 두 번째 나온 눈의 수	1	2	3	4	5	6
1	0	①	②	3	④	5
2	①	0	①	②	3	④
3	②	①	0	①	②	3
4	3	②	①	0	①	②
5	④	3	②	①	0	①
6	5	④	3	②	①	0

표에서 두 눈의 수의 차가 4의 약수인 경우는 숫자에 동그라미를 친 경우이고, 두 눈의 수의 차가 4의 약수일 확률은 $\dfrac{22}{36}=\dfrac{11}{18}$이므로

확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(36,\ \dfrac{11}{18}\right)$을 따른다.

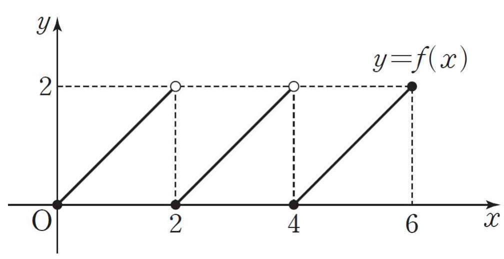
따라서 $\mathrm{E}(Y)=36\times\dfrac{11}{18}=22$이므로

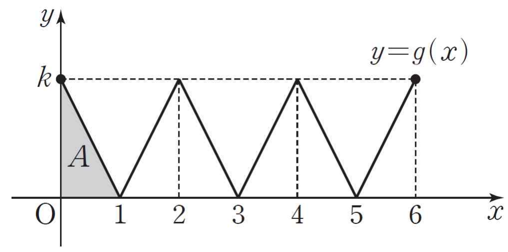
$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(5Y-72)=5\mathrm{E}(Y)-72$

$\quad=5\times22-72=38$

16. 정답 ④

$0\leq x\leq 6$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.





함수 $g(x)$가 확률밀도함수이므로 $0\leq x\leq 6$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=6$으로 둘러싸인 부분이 넓이가 1이다. 이 넓이는 밑변의 길이가 1이고 높이가 k인 직각삼각형 A의 넓이의 6배와 같으므로 직각삼각형 A의 넓이는 $\frac{1}{6}$이다.

즉, $\frac{1}{2}\times 1\times k=\frac{1}{6}$, $k=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\leq X\leq 1\right)$의 값은 직각삼각형 A의 넓이의 $\frac{1}{4}$배와 같고,

$\mathrm{P}(1\leq X\leq 3)$의 값은 직각삼각형 A의 넓이의 2배와 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\leq X\leq 3\right)&=\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\leq X\leq 1\right)+\mathrm{P}(1\leq x\leq 3)\\&=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times 2=\frac{3}{8}<\frac{5}{12}\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\leq X\leq 4\right)&=\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\leq X\leq 3\right)+\mathrm{P}(3\leq x\leq 4)\\&=\frac{3}{8}+\frac{1}{6}=\frac{13}{24}>\frac{5}{12}\end{aligned}$$

이므로 $3<a<4$이다.

이때

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\leq X\leq a\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\leq X\leq 1\right)+\mathrm{P}(1\leq X\leq 3)+\mathrm{P}(3\leq X\leq a)$

$=\frac{1}{24}+\frac{1}{3}+\mathrm{P}(3\leq X\leq a)=\frac{5}{12}$

에서 $\mathrm{P}(3\leq X\leq a)=\frac{1}{24}$이므로 $a=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

따라서 $k+a=\frac{1}{3}+\frac{7}{2}=\frac{23}{6}$

17. **정답** ⑤

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

조건 (가)에서

$f(a)-f(b)$

$=\mathrm{P}(|X-m|\leq a)-\mathrm{P}(|X-m|\leq b)$

$=\mathrm{P}(m-a\leq X\leq m+a)-\mathrm{P}(m-b\leq X\leq m+b)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{a}{\sigma}\leq Z\leq \frac{a}{\sigma}\right)-\mathrm{P}\left(-\frac{b}{\sigma}\leq Z\leq \frac{b}{\sigma}\right)$

$=2\times\left\{\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{a}{\sigma}\right)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{b}{\sigma}\right)\right\}$

$=0.0880$

$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{a}{\sigma}\right)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{b}{\sigma}\right)=0.0440$ …… ㉠

조건 (나)에서

$f(a)+f(b)$

$=\mathrm{P}(|X-m|\leq a)+\mathrm{P}(|X-m|\leq b)$

$=\mathrm{P}(m-a\leq X\leq m+a)+\mathrm{P}(m-b\leq X\leq m+b)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{a}{\sigma}\leq Z\leq \frac{a}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(-\frac{b}{\sigma}\leq Z\leq \frac{b}{\sigma}\right)$

$=2\times\left\{\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{a}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{b}{\sigma}\right)\right\}$

$=1.8208$

$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{a}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{b}{\sigma}\right)=0.9104$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{a}{\sigma}\right)=0.9544$이므로

$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{a}{\sigma}\right)=0.4772$

㉡-㉠을 하면 $2\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{b}{\sigma}\right)=0.8664$이므로

$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{b}{\sigma}\right)=0.4332$

표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)=0.4332$, $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)=0.4772$이므로

$\frac{a}{\sigma}=2$, $\frac{b}{\sigma}=1.5$

즉, $a=2\sigma$, $b=1.5\sigma$

따라서

$\frac{a-b}{\sigma}=\frac{2\sigma-1.5\sigma}{\sigma}=0.5$

18. **정답** ③

주사위를 288번 던져서 3의 배수의 눈이 나온 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(288, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=288\times\frac{1}{3}=96$,

$\mathrm{V}(X)=288\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=64=8^2$

이때 288은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(96, 8^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-96}{8}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

3의 배수의 눈이 나온 횟수를 X라 할 때 3의 배수의 눈이 나오지 않은 횟수는 $288-X$이므로 이때 얻은 점수는

$2X+(288-X)\times 1=X+288$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X+288\leq k)&=\mathrm{P}(X\leq k-288)\\&=\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{k-288-96}{8}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{k-384}{8}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{k-384}{8}\right)&=0.9772\\&=0.5+0.4772\\&=0.5+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)\\&=\mathrm{P}(Z\leq 2)\end{aligned}$$

이므로 $\frac{k-384}{8}=2$

따라서 $k=400$

19. **정답** 55

$\mathrm{P}(0\le X\le a)=1$이므로 연속확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프로부터

$\frac{1}{2}\times a\times c=1$, 즉 $ac=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{P}(0\le X\le b)=\alpha$라 하면 연속확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프로부터

$\frac{1}{2}\times b\times c=\alpha$, 즉 $bc=2\alpha$ $\cdots\cdots$ ㉡

두 점 $(0,\ 0)$, $(b,\ c)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{c}{b}x$

이므로 $\mathrm{P}\left(0\le X\le \frac{b}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{b}{2}\times\frac{c}{2}=\frac{1}{8}bc=\frac{1}{4}\alpha$

$\mathrm{P}(b\le X\le a)=1-\mathrm{P}(0\le X\le b)=1-\alpha$

이므로 $4\mathrm{P}\left(0\le X\le \frac{b}{2}\right)=3\mathrm{P}(b\le X\le a)$에서

$\alpha=3-3\alpha$, $4\alpha=3$

$\alpha=\frac{3}{4}$

$\alpha=\frac{3}{4}$을 ㉡에 대입하면

$bc=\frac{3}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠에서 $a=\frac{2}{c}$, ㉢에서 $b=\frac{3}{2c}$이므로 $\frac{a}{2}<b$

그러므로 ㉠, ㉡, ㉢에 의하여

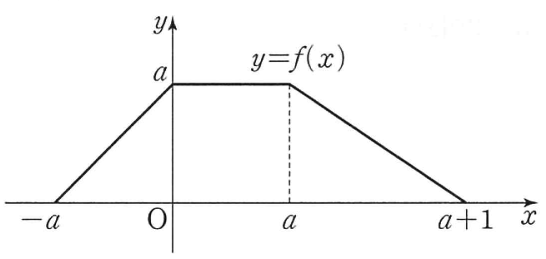
$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\frac{b}{2}\le X\le\frac{a}{2}\right)&=\frac{1}{2}\times\left(\frac{c}{2}+\frac{ac}{2b}\right)\times\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\left(\frac{c}{2}+\frac{2}{3}c\right)\times\left(\frac{1}{c}-\frac{3}{4c}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{7}{6}c\times\frac{1}{4c}\\&=\frac{7}{48}\end{aligned}$$

따라서 $p=48$, $q=7$이므로

$p+q=48+7=55$

20. **정답** ④

확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}a^2+a^2+\frac{1}{2}a=1$에서

$3a^2+a-2=0$

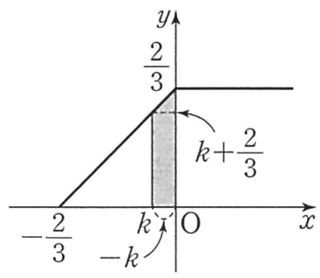
$(3a-2)(a+1)=0$

$a>0$이므로 $a=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$, $\mathrm{P}\left(k\le X\le\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$이므로

$k<0$이고

$\mathrm{P}(k\le X\le 0)=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$



즉, 그림에서 색칠한 부분의 넓이가 $\frac{1}{18}$이므로

$\frac{1}{2}\times\left(k+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\times(-k)=\frac{1}{18}$

$k^2+\frac{4}{3}k+\frac{1}{9}=0$

$9k^2+12k+1=0$

$k=\frac{-6\pm\sqrt{36-9}}{9}=\frac{-2\pm\sqrt{3}}{3}$

$-\frac{2}{3}<k<0$이므로 $k=\frac{-2+\sqrt{3}}{3}$

21. **정답** ⑤

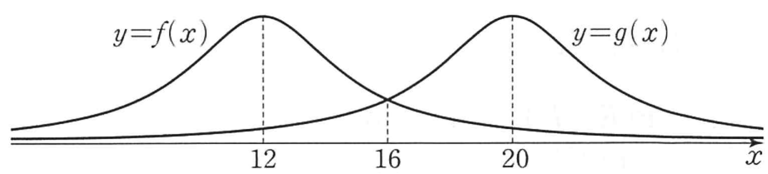
확률밀도함수 $f(x)$는 $x=m_1$일 때 최대이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le f(m_1)$이고, 확률밀도함수 $g(x)$는 $x=m_2$일 때 최대이므로 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le g(m_2)$이다.

또 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 같으므로 $f(m_1)=g(m_2)$이다.

따라서 조건 (가)에 의하여 $m_2=20$이고

조건 (나)에 의하여 $\frac{m_1+m_2}{2}=16$에서 $m_1=12$이다.

두 확률밀도함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프를 그리면 그림과 같다.



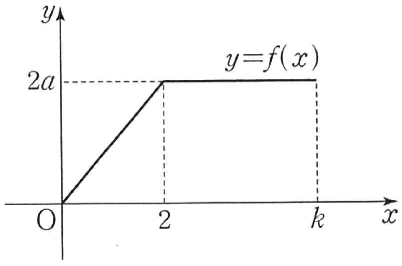
즉, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 4^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따른다.

한편, 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(1,\ 0)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X\le 10)+\mathrm{P}(Y\ge 22)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{10-12}{4}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le\frac{22-20}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -0.5)+\mathrm{P}(Z\ge 0.5)\\&=2\mathrm{P}(Z\ge 0.5)\\&=2\times\{0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\}\\&=2\times(0.5-0.1915)\\&=0.6170\end{aligned}$$

22. 정답 ⑤

확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$가 연속확률변수 X의 확률밀도함수이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le k)=1$에서

$\frac{1}{2}\times 2\times 2a+(k-2)\times 2a=1$

즉, $2a(k-1)=1$ …… ㉠

함수 $y=f(6-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=3$에 대하여 대칭이고, 함수 $g(x)$가 연속확률변수 Y의 확률밀도함수이므로

$\mathrm{P}(0\le Y\le 3)=\frac{1}{2}$

이어야 한다.

$0\le x\le 3$에서 $g(x)=f(x)$이므로

$\mathrm{P}(0\le Y\le 3)=\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\frac{1}{2}\times 2\times 2a+2a\times 1=4a$

즉, $4a=\frac{1}{2}$에서 $a=\frac{1}{8}$이므로 ㉠에서

$\frac{1}{4}(k-1)=1$

$k=5$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}x & (0\le x\le 2)\\ \frac{1}{4} & (2\le x\le 5)\end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(1\le X\le \frac{2}{3}k\right)&=\mathrm{P}\left(1\le X\le \frac{10}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(1\le X\le 2)+\mathrm{P}\left(2\le X\le \frac{10}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)\times 1+\left(\frac{10}{3}-2\right)\times\frac{1}{4}\\&=\frac{25}{48}\end{aligned}$$

23. 정답 ④

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르므로 $Z_1=\frac{X-m}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 $\mathrm{P}(X\le a)=\mathrm{P}\left(Z_1\le \frac{a-m}{2}\right)$이고

두 확률변수 Z_1, Z가 모두 표준정규분포를 따르므로

$\mathrm{P}\left(Z_1\le \frac{a-m}{2}\right)=\mathrm{P}(Z\le a-b)$에서

$\frac{a-m}{2}=a-b$

$m=a-2(a-b)=2b-a$ …… ㉠

크기가 16인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{2}{\sqrt{16}}\right)^2\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z_2=\frac{\overline{X}-m}{\frac{1}{2}}$으로 놓으면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge a)=\mathrm{P}\left(Z_2\ge \frac{a-m}{\frac{1}{2}}\right)=\mathrm{P}(Z_2\ge 2(a-m))$이고 두 확률변수 Z_2, Z가 모두 표준정규분포를 따르므로

$\mathrm{P}(Z_2\ge 2(a-m))=\mathrm{P}(Z\le b)=\mathrm{P}(Z\ge -b)$에서

$2(a-m)=-b$

$m=a+\frac{b}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$2b-a=a+\frac{b}{2}$

$b=\frac{2}{3}\times 2a=\frac{4}{3}a$

따라서 $a\ne 0$이므로 $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$

김지형