깨단수학 실력진단 테스트

약점보완 테스트 11회

학 교 : ________________ 학 년 : ________ 이 름 : ________________

1. 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-x+12 & (x\text{는 정수가 아닐 때}) \\ -|ax+b|+c & (x\text{는 정수일 때}) \end{cases}$$

로 정의하자. 열린구간 $(-4,\ 3)$에서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 $a,\ b,\ c$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

2. 함수 $f(x)=\dfrac{\cos x-4}{\sin x+5}$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$이라고 할 때, $M+m$의 값을 $-\dfrac{a}{b}$라 할 때, ab값을 구하시오.
(단, a, b는 서로소인 자연수이다.)

3. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1=b_1=6$
(나) 수열 $\{a_n\}$은 공차가 p인 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 공비가 p인 등비수열이다.

수열 $\{b_n\}$의 모든 항이 수열 $\{a_n\}$의 항이 되도록 하는 1보다 큰 모든 자연수 p의 합을 구하시오.

4. 양수 a와 두 실수 b, c에 대하여 함수

$$f(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^x$$

은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$에서 극값을 갖는다.
> (나) $0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
> $f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1 \ge 0$이다.

세 수 a, b, c의 곱 abc의 최댓값을 $\frac{k}{e^3}$라 할 때, $60k$의 값을 구하시오.

5. 최고차항의 계수의 부호가 서로 다른 두 삼차다항식 $f(x)$, $g(x)$가

$$|f(x)|=\begin{cases} g(x)-4x-26 & (x \le a) \\ g(x)+2x^3-14x^2+12x+6 & (x > a) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, 방정식 $f(x)+a(x-k)^2=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

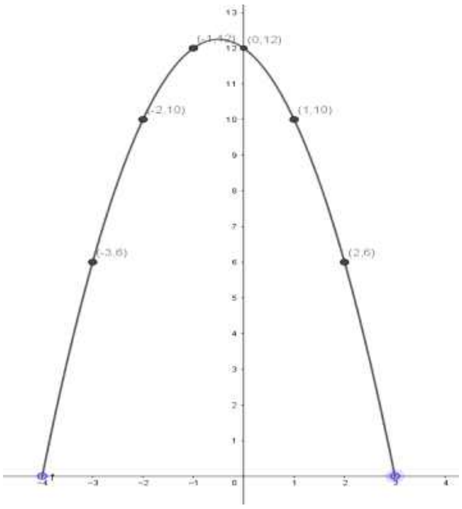
정답 및 해설 [수학 Ⅱ]

1) [정답] ②

$-|ax+b|+c$의 그래프는 $x=-\frac{b}{a}$에서 대칭성을 갖는다.

$-\frac{b}{a}=-\frac{1}{2}$ …… ㉠

$f(x)$가 불연속인 x의 값이 두 개가 되려면 $(-3,\ 6)$, $(-2,\ 10)$, $(-1,\ 12)$중 2개의 점을 지나면 된 …… ㉡



각각의 경우를 나누어 연립방정식을 풀면

① $(-3,\ 6)$, $(-2,\ 10)$을 지날 때, $a=4,\ b=12,\ c=6$

② $(-3,\ 6)$, $(-1,\ 12)$을 지날 때, $a=3,\ b=9,\ c=6$

③ $(-2,\ 10)$, $(-1,\ 12)$을 지날 때, $a=2,\ b=4,\ c=10$

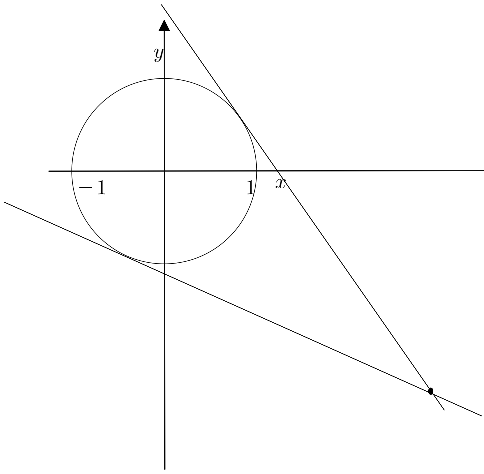
이렇게 총 3쌍이 된다.

그리고 a, b는 절댓값 안에 있으므로 음수가 되어도 된다. 따라서 총 6쌍이 가능하다.

2) [정답] 15

$\frac{\cos x-4}{\sin x+5}$를 $(\cos x,\ \sin x)$와 $(4,\ -5)$의 기울기의 역수라고 하면

$(\cos x,\ \sin x)$는 단위원 위의 점 이므로 $\frac{\cos x-4}{\sin x+5}$가 최대, 최소를 만족하는 경우는 그림과 같이 접하는 경우이다.



$\frac{\cos x-4}{\sin x+5}=\frac{1}{m}$이라 하면

접선의 방정식은 $y=m(x-4)-5$

단위원이므로 원점과 접선 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|4m+5|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

조건을 만족하는 $m=\frac{-20\pm2\sqrt{10}}{15}$이고, 역수의 합을 계산하면 $-\frac{5}{3}$

3) [정답] 11

[출제의도] 두 수열의 일반항 사이의 관계를 추측하여 주어진 조건에 맞는 값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=6+(n-1)p$

수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n=6p^{n-1}$

수열 $\{b_n\}$의 모든 항이 수열 $\{a_n\}$의 항이 되려면 모든 자연수 n에 대하여 $6p^{n-1}=6+p(m-1)$인 자연수 m이 존재한다.

$p(m-1)=6p^{n-1}-6$

$m-1=\frac{6p^{n-1}-6}{p}=6p^{n-2}-\frac{6}{p}$

$\frac{6}{p}=6p^{n-2}-m+1$

$p^{n-2}(n\geq2)$과 m은 모두 자연수이므로 $\frac{6}{p}$도 자연수이다. 따라서 p는 6의 약수이다.

$\therefore\ p=2,\ 3,\ 6\ (\because\ p>1)$

그러므로 모든 자연수 p의 합은 $2+3+6=11$이다.

[다른 풀이]

$a_m=b_2$인 자연수 m이 존재하므로

$6+(m-1)p=6p$에서

$m-1=\frac{6(p-1)}{p}=6-\frac{6}{p}$

$\frac{6}{p}$이 자연수이어야 하므로 p는 6의 약수이다.

(ⅰ) $p=2$일 때

$a_m=4+2m$, $b_n=6\cdot 2^{n-1}$

(ⅱ) $p=3$일 때

$a_m=3+3m$, $b_n=6\cdot 3^{n-1}$

(ⅲ) $p=6$일 때

$a_m=6m$, $b_n=6^n$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)의 모든 경우 임의의 자연수 n에 대하여 $b_n=a_m$을 만족시키는 m이 존재하므로 수열 $\{b_n\}$의 모든 항은 수열 $\{a_n\}$의 항이 된다.

∴ $p=2, 3, 6$이고 모든 자연수 p의 합은 11이다.

4) 정답 15

$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$에서

$f'(x)=\{ax^2+(2a+b)x+b+c\}e^x$ $e^x>0$이므로

조건 (가)에 의하여

$x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$은 방정식 $ax^2+(2a+b)x+b+c=0$의 근이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-\dfrac{2a+b}{a}=0$, $\dfrac{b+c}{a}=-3$에서 $b=-2a, c=-a$이므로

$f(x)=a(x^2-2x-1)e^x$, $f'(x)=a(x^2-3)e^x$

$f''(x)=a(x-1)(x+3)e^x$이다. ……㉠

한편 조건 (나)에서 $0\le x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)+x_1\le f(x_2)+x_2$이므로

구간 $(0,\infty)$에서 미분가능한 함수 $f(x)+x$는 증가한다.

즉, 구간 $(0,\infty)$에서 $f'(x)+1\ge 0$이다.

이때 ㉠에서 $a>0$이므로 구간 $(0,\infty)$에서 함수 $f'(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	+
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f'(x)$의 최솟값은 $f'(1)$이므로 ㉡을 만족시키려면 $f'(x)+1\ge 0$이어야 한다.

따라서 $-2ae+1\ge 0$에서 $a\le \dfrac{1}{2e}$이므로

$abc=a(-2a)(-a)=2a^3\le \dfrac{1}{4e^3}$이다.

∴ $60k=60\times\dfrac{1}{4}=15$

TIP

이 문제에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서의 접선의 기울기가 -1임을 알아야 한다.

만약 변곡점에서의 접선의 기울기가 -1이 아닐 때를 생각해 보면 다음과 같다.

(ⅰ) 변곡점에서의 접선의 기울기가 -1보다 클 때

예를 들어 변곡점에서의 접선의 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$이라 하면 $-2ae=-\dfrac{1}{2}$에서 $a=\dfrac{1}{4e}$이므로 조건(나)를 만족시키지만, 변곡점에서의 접선의 기울기가 -1일 때 보다 a의 값이 작으므로 abc의 값이 최대가 아닌다.

(ⅱ) 변곡점에서의 접선의 기울기가 -1보다 작을 때

예를 들어 변곡점에서의 접선의 기울기가 -2라 하면

$-2ae=-2$에서 $a=\dfrac{1}{e}$이므로

$f(x)=(x^2-2x-1)e^{x-1}$

이때, 두 점 $(1, f(1))$과 $\left(\dfrac{3}{2}, f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)$을 이은 직선의

기울기는 $\dfrac{-\dfrac{7}{4}\sqrt{e}-(-2)}{\dfrac{3}{2}-1}<-1$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 a의 값이 최대가 될 때에는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서의 접선의 기울기가 -1일 때를 의미한다.

5) [정답] 11

두 다항식 $P_1(x)$, $P_2(x)$를

$P_1(x)=g(x)-4x-26$,

$P_2(x)=g(x)+2x^3-14x^2+12x+6$이라 하면

$P_1(x)=-P_2(x)$ 즉, $P_1(x)+P_2(x)=0$

따라서 $g(x)=-x^3+7x^2-4x+10$,

$|f(x)|=\begin{cases}-(x^3-7x^2+8x+16) & (x\le a)\\ x^3-7x^2+8x+16 & (x>a)\end{cases}$

$g(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로

$f(x)=x^3-7x^2+8x+16=(x+1)(x-4)^2$이고

$a=-1$이다.

함수 $h(x)=f(x)-(x-k)^2$라 하면

함수 $h(x)$의 극값이 존재해야 하므로

방정식 $h'(x)=3x^2-16x+(8+2k)=0$에서

판별식을 D라 하면 $D/4=64-3(8+2k)>0$

$k<\dfrac{20}{3}$ 이므로 k는 6이하의 자연수이다.

ⅰ) $k=1, 2, 3, 5$일 때

$h(-1)=-(k+1)^2<0$

$h(1)=18-(1-k)^2>0$

$h(4)=-(4-k)^2<0$

$h(6)=28-(6-k)^2>0$

사이값 정리에 의하여 삼차방정식 $h(x)=0$의 실근이 열린 구간 $(-1,\ 1)$, $(1,\ 4)$, $(4,\ 6)$에 각각 하나씩 존재한다.

ⅱ) $k=4$일 때,

$h(x)=(x+1)(x-4)^2-(x-4)^2=x(x-4)^2$

이므로 함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

ⅲ) $k=6$일 때,

극댓값 $h(2)=-4<0$이므로 함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 만난다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여 함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 자연수 k의 값은 1, 2, 3, 5이다.

따라서 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은 11