깨단수학 실력진단 테스트

약점보완 테스트 9회

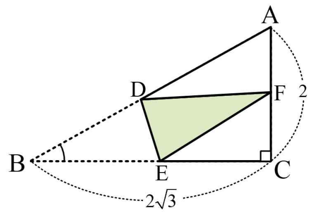
학 교 : ______________ 학 년 : ________ 이 름 : ______________

1. 다음 조건을 만족시키는 20 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

$\log_2(na-a^2)$과 $\log_2(nb-b^2)$은 같은 자연수이고 $0<b-a\le\frac{n}{2}$인 두 실수 a, b가 존재한다.

2. 함수 $f(x)=x^4-8x^3+18x^2-20$과 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-f(n)+c|$ (단, c는 $0<c<10$인 상수)라 하고, 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 실수 x의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 합이 홀수일 때, c의 값을 구하시오.

3. 그림과 같이 $\angle C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC를 꼭짓점 B와 F가 만나도록 접는다. 점 F가 변 AC의 중점이고, $\angle B=\frac{\pi}{6}$, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$, $\overline{CA}=2$라 할 때, 삼각형 DEF의 넓이를 구하시오.



[현대고 기출]

4. 최고차항의 계수가 1이 이차함수 $f(x)$에 대하여 실수전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{1-|x|}^{1+|x|} f(t)dt$$

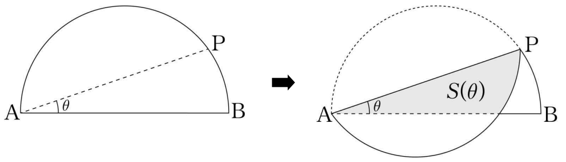
는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다. 실수 x에 대한 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$p: f(x)g(x)=0 \qquad q: x^4-3x^3-6x^2+18x=0$

p가 q이기 위한 필요충분조건이고, $f(0)=0$일 때, $f(a^4)$의 값을 구하시오.

5. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 모양의 색종이가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 두 점 A, P를 연결하는 선을 접는 선으로 하여 색종이를 접는다. $\angle\mathrm{PAB}=\theta$일 때, 포개어지는 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\theta=\alpha$에서 $S(\theta)$가 최댓값을 갖는다고 할 때, $\cos 2\alpha$의 값은?

$\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ [2017년 10월 교육청 가형 21번]



① $\dfrac{-2+\sqrt{17}}{8}$ ② $\dfrac{-1+\sqrt{17}}{8}$ ③ $\dfrac{\sqrt{17}}{8}$

④ $\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$ ⑤ $\dfrac{2+\sqrt{17}}{8}$

정답 및 해설 [수학 Ⅱ]

1) [정답] 78

$\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2)=m$($m$은 자연수)라 하자.

$na-a^2=nb-b^2=2^m$ …… ㉠

$0<b-a\le\frac{n}{2}$ 이므로 $(b-a)(b+a-n)=0$으로부터 $b+a=n$

$\therefore\ 0<2b-n\le\frac{n}{2}$ …… ㉡

㉠으로부터 $nb-b^2=2^m \Leftrightarrow b^2-nb+2^m=0$이므로

$b=n\pm\frac{\sqrt{n^2-2^{m+2}}}{2} \Leftrightarrow 2b-n=\pm\sqrt{n^2-2^{m+2}}$

이를 ㉡에 넣어 정리하면 $0<\sqrt{n^2-2^{m+2}}\le\frac{n}{2}$

각 변을 제곱한 후 이항하면

$2^{m+2}<n^2\le\frac{1}{3}\cdot2^{m+4}$

$m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ 을 대입해보면 위 식을 만족하는 20 이하의 자연수 n은 3, 6, 9, 12, 13, 17, 18이 됨을 알 수 있다.

따라서 $3+6+9+12+13+17+18=78$

2) [정답] 5

$f(x)=x^4-8x^3+18x^2-20$

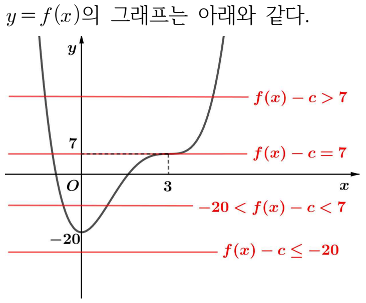
$f'(x)=4x^3-24x^2+36x=4x(x-3)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

$f(0)=-20,\ f(3)=81-8\times27+18\times9-20=7$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	-20(극소)	↗	7	↗

$y=f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



위의 그래프를 이용하면 $g(x)=|f(x)-f(n)+c|$에서

ⅰ) $f(n)-c\le-20$일 때 $a_n=0$

ⅱ) $-20<f(n)-c<7$일 때 $a_n=2$

ⅲ) $f(n)-c=7$일 때 $a_n=1$

ⅳ) $f(n)-c>7$일 때 $a_n=2$

ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)와 $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 합이 홀수라는 조건에서

$f(n)-c=7$을 만족하여야 한다.

$f(n)=c+7,\ 0<c<10$이므로 $7<f(n)<17$

$f(x)=x^4-8x^3+18x^2-20$에서

$f(3)=7,\ f(4)=12,\ f(5)=55$를 만족하므로

$n=4,\ c=5$

3) [정답] $\frac{169\sqrt{3}}{336}$

$\overline{FE}=x$라 하면, $\overline{BE}=x$, $\overline{EC}=2\sqrt{3}-x$이며, 삼각형 EFC는 직각삼각형이므로 $x^2=(2\sqrt{3}-x)^2+1^2$

$\therefore\ x=\frac{13\sqrt{13}}{12}$

또한 $\overline{DF}=y$라 하면, $\overline{BD}=y$, $\overline{AD}=4-y$이므로 삼각형 ADF에서 코사인 법칙에 의하여 $y^2=(4-y)^2+1^2-2\times(4-y)\cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ y=\frac{13}{7}$

삼각형 DEF의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{13\sqrt{3}}{12}\times\frac{13}{7}\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{169\sqrt{3}}{336}$이다.

4) [정답] 4

$f(x)=x^2+kx$라 하면 근은 $x=0,\ x=-k$이고,

$g(x)=\int_{1-|x|}^{1+|x|}(t^2+kt)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}kt^2\right]_{1-|x|}^{1+|x|}$

$=\frac{1}{3}\{(1+|x|)^3-(1-|x|)^3\}+\frac{1}{2}k\{(1+|x|)^2-(1-|x|)^2\}$

$=\frac{1}{3}(2|x|^3+6|x|)+2k|x|$

$=\frac{2}{3}|x|^3+2(k+1)|x|$

$h(x)=\frac{2}{3}x^3+2(k+1)x$라 하면 $g(x)$는 y축에 대하여 대칭이므로

$$g(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x(x^2+3k+3) & (x\ge0)\\ -\frac{2}{3}x(x^2+3k+3) & (x<0)\end{cases}$$

이므로 근은 $x=0,\ x=\sqrt{-3k-3},\ x=-\sqrt{-3k-3}$을 갖는다.

$$g'(x)=\begin{cases}2x^2+2(k+1) & (x\ge0)\\ -2x^2-2(k+1) & (x<0)\end{cases}$$

이므로 $x=-\sqrt{-k-1}$ 또는 $x=\sqrt{-k-1}$에서 극솟값을 가지므로

$a=-\sqrt{-k-1}$ 또는 $a=\sqrt{-k-1}$이다.

이때, $x^4-3x^3-6x^2+18x=x(x-3)(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})=0$

이므로 근은 $x=-\sqrt{6},\ x=0,\ x=3,\ x=\sqrt{6}$이고,

$f(x)g(x)=0$의 근은

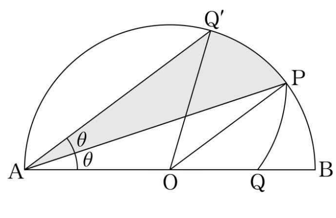
$x=-\sqrt{-3k-3},\ x=0,\ x=-k,\ x=\sqrt{-3k-3}$

이므로 $k=-3$이다. 따라서 $f(x)=x^2-3x$이고,

$a=-\sqrt{2}$ 또는 $a=\sqrt{2}$이므로

따라서 $f(a^4)=f(4)=16-12=4$이다.

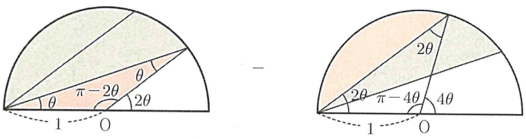
5) 정답 ④



4

색종이를 접었을 때 호 AP와 선분 AB의 교점을 Q, 접힌 색종이를 다시 폈을 때 점 Q가 호 AB 위에 있게 되는 점을 Q′이라 하자.

도형 AQP와 도형 APQ′은 합동이므로 $S(\theta)$는 호 AP와 현 AP로 둘러싸인 도형에서 호 AQ′과 현 AQ′으로 둘러싸인 도형의 넓이를 뺀 것이다.



$$S(\theta)=\frac{1}{2}\{1^2\cdot(\pi-2\theta)-1^2\cdot\sin(\pi-2\theta)\}$$
$$-\frac{1}{2}\{1^2\cdot(\pi-4\theta)-1^2\cdot\sin(\pi-4\theta)\}$$
$$=\frac{1}{2}(2\theta-\sin2\theta+\sin4\theta)$$

$S'(\theta)=2\cos4\theta-\cos2\theta+1$

$=2(\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta)-\cos2\theta+1$

$=2(2\cos^2 2\theta-1)-\cos2\theta+1$

$=4\cos^2 2\theta-\cos2\theta-1$

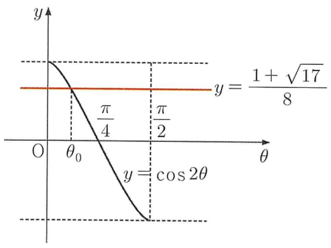
$S'(\theta)=0$에서 $4\left(\cos2\theta-\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)\left(\cos2\theta-\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right)=0$

$\therefore\ \cos2\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$ 또는 $\cos2\theta=\frac{1-\sqrt{17}}{8}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서 $0<\cos2\theta<1$이므로 $\cos2\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$인 θ에서 $S(\theta)=0$이 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서 $\cos2\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$를 만족시키는 θ를 θ_0이라 하면

θ	$\cdots$	θ_0	$\cdots$
$S'(\theta)$	$+$	0	$-$
$S(\theta)$	↗	극대	↘

$\theta<\theta_0$일 때, $S'(\theta)>0$이고 $\theta>\theta_0$일 때, $S'(\theta)<0$이므로 $S(\theta)$는 $\theta=\theta_0$에서 최댓값을 갖는다.



따라서 $\theta_0=\alpha$이므로 $\cos2\alpha=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$