약점보완 테스트 5회

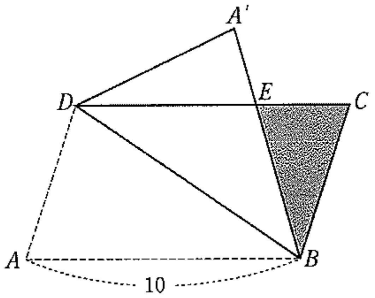
학 교 : ________________ 학 년 : ________ 이 름 : ________________

1. 실수 x의 값에 관계없이 $\dfrac{x^2+2ax+1}{bx^2-4x-1}$의 값이 일정할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

2. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=10$인 평행사변형 ABCD가 있다. 이 도형을 대각선 BD를 따라 접어서 생기는 삼각형 EBC의 넓이가 평행사변형 ABCD의 넓이의 $\dfrac{1}{5}$이고, $\overline{\mathrm{CE}}$, $\overline{\mathrm{EB}}$, $\overline{\mathrm{BD}}$의 길이가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 평행사변형 ABCD의 넓이는 $\dfrac{q}{p}\sqrt{7}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 두 자연수이다.)



3. 실수 p에 대하여 삼차방정식 $x^3-3x-p=0$의 실근 중에서 최대인 것과 최소인 것의 곱을 $f(p)$라 하고, 실근이 한 개 일때는 그 근의 제곱을 $f(p)$라 하자. 이때 $f(p)$의 최솟값을 구하시오.

4. 양수 t 에 대하여 $\log t$ 의 정수부분과 소수부분을 각각 $f(t)$, $g(t)$ 라 하자. 자연수 n 에 대하여

$$f(t) = 9n\left\{g(t) - \frac{1}{3}\right\}^2 - n$$

를 만족시키는 서로 다른 모든 $f(t)$ 의 합을 a_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$ 의 값은?

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 2

5. 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC의 변 BC 위에 임의의 점 D를 잡고 두 삼각형 ABD, ADC의 내접원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하자. 이때 두 반지름의 길이의 곱 r_1r_2의 최댓값은?

① $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{2-\sqrt{3}}{8}$ ④ $\frac{2+\sqrt{3}}{8}$ ⑤ $\frac{2-\sqrt{3}}{12}$

정답 및 해설 [수학 Ⅱ]

1) [정답] ④

$\dfrac{x^2+2ax+1}{bx^2-4x-1}=k(k\neq 0$인 상수$)$라 하면

$x^2+2ax+1=kbx^2-4kx-k$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$1=kb,\ 2a=-4k,\ 1=-k$

$\therefore\ k=-1,\ a=2,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=2+(-1)=1$

[다른풀이]

$\dfrac{x^2+2ax+1}{bx^2-4x-1}$ …… ㉠

실수 x의 값에 관계없이 ㉠의 값이 일정하므로 ㉠에 $x=0$을 대입한 값인 -1로 일정하다.

㉠에 $x=1$을 대입하면

$\dfrac{2a+2}{b-5}=-1 \quad \therefore\ 2a+b=3$ …… ㉡

㉠에 $x=-1$을 대입하면

$\dfrac{2-2a}{b+3}=-1 \quad \therefore\ 2a-b=5$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=2+(-1)=1$

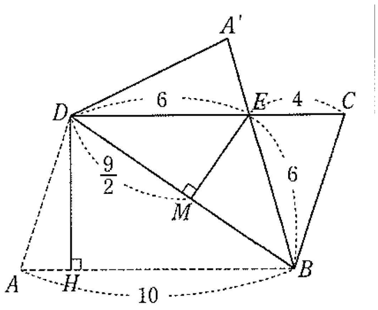
2) **정답** 47

For.2017 수학적 접근-수학Ⅰ[고쟁이]

$\overline{CE}=a,\ \overline{EB}=ar,\ \overline{BD}=ar^2$이라 하자.

(삼각형 EBC의 넓이)$=\dfrac{1}{5}$(사각형 ABCD의 넓이)이므로

$a=4$ …… ㉠



$\angle ABD=\angle A'BD,\ \angle ABD=\angle BDC$

$\triangle DEB$는 이등변삼각형이므로 $\overline{DE}=\overline{EB}$

$\therefore\ r=\dfrac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\overline{CE},\ \overline{EB},\ \overline{BD}$의 길이는 각각 4, 6, 9이다.

이때 점 D에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H, 점 E에서 변 BD에 내린 수선의 발을 M이라 하면 삼각형 DEM에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{EM}=\sqrt{\overline{DE}^2-\overline{DM}^2}=\sqrt{6^2-\left(\dfrac{9}{2}\right)^2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{7}$

두 직각삼각형 DEM과 BDH는 서로 닮음이므로

$\overline{DE}:\overline{EM}=\overline{BD}:\overline{DH}$

$6:\dfrac{3}{2}\sqrt{7}=9:\overline{DH}$

가 되어 $\overline{DH}=\dfrac{9}{4}\sqrt{7}$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$\overline{AB}\times\overline{DH}=10\times\dfrac{9}{4}\sqrt{7}=\dfrac{45}{2}\sqrt{7}$

$\therefore\ p+q=2+45=47$

3) **정답** -3

삼차방정식 $x^3-3x-p=0$, 즉 $x^3-3x=p$의 실근을 곡선 $y=x^3-3x$와 직선 $y=p$의 교점의 x좌표이다.

$g(x)=x^3-3x$라 하면

$g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$또는 $x=1$

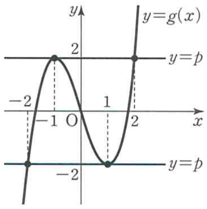
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-1	…	1	…
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	2	↘	-2	↗

함수 $g(x)$는 $x=-1$일 때, 극댓값 2, $x=1$일때 극솟값 -2를 가지므로 $y=2,\ y=-2$를 기준으로 p의 값의 범위를 나누어 생각해 본다.

(i) $p=\pm 2$일 때,

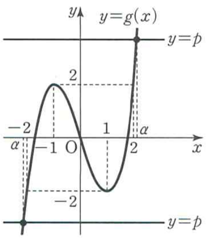
오른쪽 그림과 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=p$는 서로 다른 두 점에서 만나므로 삼차방정식 $x^3-3x=p$는 서로 다른 두 실근을 갖는다. 위의 삼차방정식의 근은 $p=2$일 때, $x=-1$또는 $x=2$이고, $p=-2$일 때 $x=-2$또는 $x=1$이므로 $f(p)=-2$



(ii)$|p|>2$일 때,

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=p$는 한 점에서 만나므로 삼차방정식 $x^3-3x=p$는 하나의 실근 a를 갖고, $|a|>2$이다.

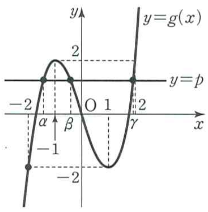
이때, 실근이 한 개이면 그 근의 제곱이 $f(p)$이므로 $f(p)=a^2>4$



(iii) $|p|<2$일 때,

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=p$는 서로 다른 세 점에서 만난다.

따라서 삼차방정식 $x^3-3x=p$는 서로 다른 세 실근 $\alpha,\beta,\gamma\ (\alpha<\beta<\gamma)$를 갖고, 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여



$\alpha+\beta+\gamma=0$ …… ㉠

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$ …… ㉡

이때, 실근 중에서 최대인 것과 최소인 것의 곱이 $f(p)$이므로

$f(p)=\alpha\gamma$

$=-3-\alpha\beta-\beta\gamma\ (\because ㉡)$

$=-3-\beta(\alpha+\gamma)$

$=-3-\beta(-\beta)\ (\because ㉠)$

$=\beta^2-3\geq -3(\because \beta^2\geq 0)$

(i),(ii),(iii)에서 $f(p)$의 최솟값은 -3이다.

4) 답. ①

[해설] $\dfrac{\infty}{\infty}$ 골인 수열의 극한

[1 단계] $0 \le g(t) < 1$ 임을 이용하여 $f(t)$ 의 값의 범위를 구한다.

$g(t)$는 $\log t$의 소수부분이므로

$0 \le g(t) < 1$

$-\dfrac{1}{3} \le g(t) - \dfrac{1}{3} < \dfrac{2}{3}$

$0 \le \left\{g(t) - \dfrac{1}{3}\right\}^2 < \dfrac{4}{9}$

$0 \le 9n\left\{g(t) - \dfrac{1}{3}\right\}^2 < 4n$

$-n \le 9n\left\{g(t) - \dfrac{1}{3}\right\}^2 - n < 3n$

$\therefore\ -n \le f(t) < 3n$ …… ㉠

[2 단계] $f(t)$ 는 $\log t$ 의 정수부분임을 이용하여 $f(t)$ 가 될 수 있는 값을 찾아 a_n 을 구한다.

$f(t)$ 는 $\log t$ 의 정수부분이므로 $f(t)$ 가 될 수 있는 값은 정수이다. 즉, ㉠에서 정수는

$-n,\ -n+1, \cdots, 0,\ 1,\ 2, \cdots,\ n-1,\ n,\ n+1, \cdots,\ 3n-1$

이므로

$a_n = (-n)+(-n+1)+\cdots+0+1+2+\cdots$

$+(n-1)+n+(n+1)+\cdots+(3n-1)$

$= (n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-1)$

$= \dfrac{(2n-1)\{(n+1)+(3n-1)\}}{2}$

$= 2n(2n-1)$

$= 4n^2 - 2n$

[3 단계] $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}$ 의 값을 구한다.

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-2n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(4n^2 - \dfrac{2}{n}\right) = 4$

개념 보충

상용로그의 정수 부분과 소수 부분

임의의 양수 N에 대하여 상용로그는

$\log N = n + \alpha$ (n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)

와 같이 나타낼 수 있다.

이때 n을 $\log N$의 정수 부분, α를 $\log N$의 소수 부분이라 한다.

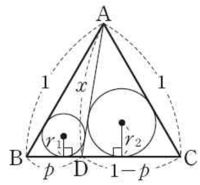
5) 답 ③

[해설] 전략 $\triangle ABC$의 내접원의 반지름의 길이가 r일 때 $\triangle ABC = \dfrac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$임을 이용한다.

오른쪽 그림에서 $\overline{AD}=x,\ \overline{BD}=p$라 하면

$\triangle ABD = \dfrac{1}{2}\cdot 1 \cdot p \cdot \sin\dfrac{\pi}{3}$

$= \dfrac{1}{2}(1+p+x)r_1$



$\therefore\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}p = (1+p+x)r_1$

…… ㉠

$\triangle ADC$에서도 마찬가지로 생각하면

$\triangle ADC = \dfrac{1}{2}\cdot 1 \cdot (1-p) \cdot \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}(1+1-p+x)r_2$

$\therefore\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-p) = (2-p+x)r_2$ …… ㉡

또 $\triangle ABD$에서 제이코사인법칙에 의하여

$x^2 = 1^2 + p^2 - 2\cdot 1 \cdot p \cdot \cos\dfrac{\pi}{3} = p^2 - p + 1$ …… ㉢

㉠,㉡을 변끼리 곱하면

$\dfrac{3}{4}p(1-p) = r_1 r_2(p^2 - p + 1 + 3\sqrt{p^2-p+1} - p^2 + p + 2)$

$p(1-p) = 4r_1 r_2(1 + \sqrt{p^2-p+1})$

$\therefore r_1 r_2 = \dfrac{p(1-p)}{4(1+\sqrt{p^2-p+1})}$

$= \dfrac{p(1-p)(1-\sqrt{p^2-p+1})}{4(1+\sqrt{p^2-p+1})(1-\sqrt{p^2-p+1})}$

$= \dfrac{1-\sqrt{p^2-p+1}}{4}$

이때 $p^2 - p + 1 = \left(p - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$이므로 $0 < p < 1$에서

$p = \dfrac{1}{2}$일 때 $r_1 r_2$의 값은 최대이고 최댓값은

$\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{3}{4}}}{4} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{8}$