[문제[1]]

주머니 A에는 1부터 3까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 3장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 2부터 8까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 7장의 카드가 들어 있다. 이때 다음과 같은 시행을 한다,

- 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수이면 주머니 A를 선택하고, 아니면 주머니 B를 선택한다.
- 선택한 주머니에서 두 장의 카드를 동시에 꺼낸다.
- 두 장의 카드에 적힌 수 중 작은 수를 $a$, 큰 수를 $b$라고 할 때, $a$와 $b$가 $b^3-6ab^2+11a^2b-6a^3=0$을 만족하면 $\dfrac{b}{a}$점의 점수를 획득하고, 그렇지 않으면 $b-a$점의 점수를 획득한다.

위의 시행을 한 번 할 때, 획득하는 점수의 기댓값을 구하시오. [20점]

[문제[2)]]

다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 수열을 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계식으로 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라고 한다.

- 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이다.

- 탄젠트함수의 덧셈정리는 다음과 같다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\ \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

(1) 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-4 & (a_n>0) \\ a_n & (a_n=0) \\ a_n+d & (a_n<0) \end{cases} \quad \text{(단, } d\text{는 자연수)}$$

이다. 다음 성질을 만족하는 자연수 $d$를 모두 구하시오. [10점]

| |
|---|
| $a_m=0$을 만족하는 $m$의 최솟값은 7이다. |

(2) $n$이 자연수일 때, $y$축 위의 점 $(0,\ n)$에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선을 $l_n$이라 하고, $l_n$이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각도를 $\theta_n$이라 하자. $x$축과 $l_n$, $l_{n+1}$로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 $S_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n\tan(\theta_n-\theta_{n+1})}{n^2}$을 구하시오. [15점]

[문제3)]

다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$에 대하여 함수 $f(x)$가 $\alpha$와 $\beta$를 양끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때, 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

- 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

- 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

(1) 일반항이 $a_n = \int_1^e (x\ln x - x)^n \ln x\, dx$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{2024} a_k a_{k+1}$을 구하시오. [10점]

(2) 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 $y^2-(x^2+x+1)y+x^3+x^2=0$을 만족한다. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(5,\ 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$의 최솟값을 구하시오. [15점]

[문제[4)]]
다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 중심이 $(a,\ b,\ c)$이고 반지름의 길이가 $r$인 구의 방정식은
  $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$이다.

- 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은
  $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이다. (단, $a>c>0$, $b^2=a^2-c^2$)

- 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 $m$인 직선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$이다.

(1) 구 $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=1$을 $S$라 하자. 중심이 구 $S$ 위에 놓여있고 반지름의 길이가 7인 구가 $xy$평면, $yz$평면, $zx$평면과 만나서 이루는 세 원을 각각 $C_1$, $C_2$, $C_3$라 하자. $C_1$, $C_2$, $C_3$의 넓이의 합을 $A$라 할 때, $\dfrac{A}{\pi}$의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오. [15점]

(2) 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$인 타원 $E$가 다음의 두 조건을 만족한다.

(가) 타원 $E$ 위의 두 점과 점 F를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 둘레의 최댓값이 $4\sqrt{10}$이다.
(나) 기울기가 $\sqrt{3}$이고 타원 $E$에 접하는 두 직선 사이의 거리가 6이다.

직선 $y=x+c$가 타원 $E$와 점 P, Q에서 만날 때, 삼각형 PQF의 넓이를 구하시오.
(단, $c>0$) [15점]

1)

2)

3)

4)