2023 수능 수학영역
찍기특강

orbi

악어새 지음

우리가 객관식 문제를 찍을 수 있는 이유는 무엇일까? 물론 일부, 정말 일부의 주관식 문제 또한 잘하면 찍어서 맞을 수 있는 기회가 있다. 하지만 주관식 문제는 그냥 포기하는 것이 더 빠를지도 모른다. 하지만 객관식에서는 충분히 기회가 있다. 그 이유는 선지를 만드는 방식에 있다.

선지를 만드는 가장 대표적인 방식은 등차수열이다. 꼭 선지의 전체가 등차수열일 필요는 없다. 분모가 고정된 채 분자만 등차수열일 수도 있고, 분자가 고정된 채 분모만 등차수열일 수도 있다. 이는 본문에 전부 수록해놓았다.

등차수열인 것이 왜 찍는 것에 도움이 되는가? 출제자는 정답인 선지를 먼저 세팅한 후, 적당한 공차를 이용해 선지를 만든다. 즉, 답이 아닌 선지는 어쩔 수 없이 강제로 답이 될 수 없는 상황에 처하게 되는 것이다. 이 책을 읽은 학생들도 평소에 문제를 풀면서 의문점이 있었을지도 모른다. '④번 선지는 대체 어떤 실수를 해야 마킹할 수 있는 답이지?' 바로 이런 허점을 노리는 것이다.

답을 구성하는 방식에는 정말 많이 있지만 '등비수열'의 경우에는 못 찍는다고 보면 된다. 그 이유는 본문을 읽다보면 알게 될 것이다.

01. 정석으로는 못 풀었지만 최선을 다해 답 구하기

사실 이 파트는 찍는 것이 아닐지도 모른다. 하지만 정석으로 푸는 것도 아니다. 이 단원에서는 정석으로는 답을 구하기 못했지만, 객관식의 허점을 통해 답을 구하는 방법을 알아볼 것이다. 모든 문제에 적용 가능한 것은 아니며 예시들을 보다보면 어느 상황에서 쓸 수 있는 것인지 알게 될 것이다.

소단원은 다음과 같다.

- 답의 꼴 먼저 유도하기
- 길이 및 각도 찍기
- 인수
- 문제에 있는 숫자 이용하기

답의 꼴 먼저 유도하기

나는 이 파트가 가장 정성적으로 찍는 방법을 알려준다고 생각을 한다. 잘 모르겠으면, 일단 주어진 조건을 통해서 먼저 답의 형태를 결정하는 것이다. 최선을 다해서 답의 꼴을 만들어 놓으면 답이 보일지도 모른다.

크게 두 가지 유형이 있는 듯하다.
① 함수의 결정
② 도형의 결정

긴 말 필요없이 바로 어떻게 적용하는지 문제로 살펴보자.

01

좌표평면에서 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 P라 할 때, 원점에서 점 P까지의 거리를 $g(t)$라 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=2$
> (나) 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 21 ② 24 ③ 27
④ 30 ⑤ 33

선지 분석

공차가 3인 등차수열이다.

문항 해설

$f(x)$는 x를 인수로 가지고 있으므로 $f(3)$의 값은 3의 배수가 되어야 한다.
그런데 모든 선지가 3의 배수이다.(;;) 그렇다면 우리는 한 술 더 떠야한다. 조건 (가)를 통해 $a+b=1$을 얻는다.
$f(3)=27+9a+3b$이므로 a로 정리하면 $f(3)=30+6a$가 된다.
우리는 항상 모르는 미지수는 **정수**로 찍는다. 따라서 답이 될 수 있는 선지는 ② 또는 ④이다. 근데 설마 a가 0일까?
그래서 나는 ②를 찍을 것이다.

찍을만한 선지

②, ④

찍지 말아야할 선지

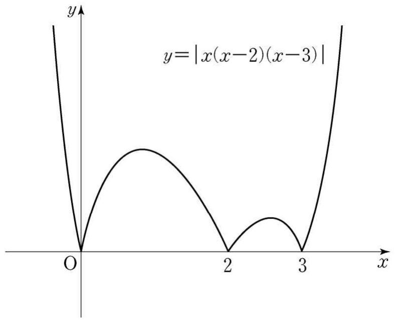
①, ③, ⑤

실제 답

④ (아쉽다. 최선의 선택을 한 것이다.)

02

다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은?



(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 $0,\ 2,\ 3$뿐이다. (나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $\lvert x(x-2)(x-3)\rvert$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

선지 분석

분모를 6으로 통분해주면 분자가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

조건 (가)에 의해 $f(x)$의 모든 인수를 알고 있다. $f(x)$의 최고차항의 계수를 k라 한다면 $f(x)$의 식은 셋 중 하나이다.

① $f(x)=kx^2(x-2)(x-3)$

② $f(x)=kx(x-2)^2(x-3)$

③ $f(x)=kx(x-2)(x-3)^2$

이때 $f(1)$의 값을 구하라고 했으므로 3개의 $f(x)$ 식에 모두 1을 넣는다. $2k,\ -2k,\ -4k$.

k가 음수이므로 $-2k,\ -4k$ 중에서 답이 나올 것이다. 즉, 뭐가 됐든 답의 꼴은 짝수일 확률이 높다.

따라서 답은 ②가 가장 유력하다.

또한 ①, ④, ⑤는 답에 소수가 있다. 삼차함수는 예쁘게 인수분해가 되어있는데 값으로 소수가 나오기란 매우 힘들다. (인수에 대한 내용은 뒤에서 자세히 설명하겠다.)

찍을만한 선지

②

찍지 말아야할 선지

①, ④, ⑤

실제 답

②

03

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=f(3)=0$
> (나) 집합 $\{x|x \geq 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오.

문항 해설

조건 (가)를 통해 $f(x)=k(x-1)(x-3)(x-b)$이다.

답의 꼴인 $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$에 직접 대입해보자.

$$\frac{|f(4a)\times(f(-3a)|}{f(0)\times f(4a)}=\left|\frac{f(-3a)}{f(0)}\right|$$

$$=\frac{k(-3a-1)(-3a-3)(-3a-b)}{k(-1)(-3)(-b)}=\frac{(a+1)(3a+1)(3a+b)}{b}$$

우리는 항상 모르는 미지수를 찍을 때는 그 미지수가 **정수**일 것이라고 기대하고 찍어야 한다. 일단 여기까지 해서 적당한 정수를 직접 넣어서 결과가 자연수가 나오도록 조절해주면 된다.

한 술 더 떠보자. 만약 조건 (나)를 통해 $b<1$을 얻었다고 해보자. 그러면 b는 0보다 작거나 같은 정수일 것이다. 하지만 $b=0$이면 분모가 0이므로 $b\neq 0$이다. 따라서 우리는 $b=-1$으로 찍을 수 있다.

$b=-1$이면 주어진 식은 $(a+1)(9a^2-1)$이다. b가 이미 음수였으므로 a는 양수로 찍어보자.

$a=1$: $2\times(9-1)=16$

$a=2$: $3\times(36-1)=105$

$a=3$: $4\times(81-1)=320$

$a=4$: $5\times(144-1)=715$

주관식 답으로 세자리 수도 잘 안나오는 마당에 320 이상은 너무 크다.

근데 나라면 16이 아닌 105를 찍을 것이다. 왜일까? 다음 세 문제를 보고, a가 어떤 수가 될지 생각해보자.

답으로 선택할만한 수

105

실제 답

105

03-1

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선과 점 $(2, f(2))$에서의 접선이 점 $(k, 0)$에서 만난다. $f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

03-2

양수 a와 실수 b에 대하여 함수 $f(x)=ae^{3x}+be^{x}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?

(가) $x_1 < \ln\frac{2}{3} < x_2$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이다.
(나) 구간 $[k, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, $f(2m)=-\frac{80}{9}$이다.

① -15 ② -12 ③ -9
④ -6 ⑤ -3

03-3

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$가 있다. 양의 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $x\|g(x)\|=\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt$이다.
(나) 방정식 $g(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$\int_{-2a}^{2a}f(x)dx$의 값을 구하시오.

이 세 문제의 공통점이 무엇일까?

03-1에서의 $2k$, 03-2에서의 $2m$, 03-3에서의 $2a$가 그 주인공이다.

만약 어떤 미지수를 구해야하는 상황에서 출제자가 k가 아닌 k의 실수배를 주었다면, k의 실수배가 정수일 확률이 매우 높다.

03-1에서 $2k$를 준 이유는 k가 $\frac{\text{정수}}{2}$이기 때문일 것이다.

03-2에서 $2m$을 준 이유는 m이 $\frac{\text{정수}}{2}$이기 때문일 것이다.

03-3에서 $2a$를 준 이유는 a가 $\frac{\text{정수}}{2}$이기 때문일 것이다.

실제로 $k=\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$, $a=\frac{1}{2}$이다.

물론 m이 $\frac{\text{정수}}{2}$꼴이 딱 떨어지지는 않았다. 하지만 결국 $\frac{1}{2}$꼴이 맞춰지기는 한다.

이 말은 결국 출제자 입장에서 '너희들이 분수로 계산하면 값을 구하는 과정이 상당히 복잡하고 귀찮을테니까,
내가 정수로 만들어줄게. 그러면 나도 문제 만들기 편하고 너도 문제 풀기 쉽잖아?'라고 생각을 하게 되는 것이다.

자, 그러면 다시 03번 문제로 와서, 왜 $f(2a-x)$가 아닌 $f(a-x)$로 해줬을까? $f(2a-x)$였다면 $x=a$ 대칭이므로 a는 모든 정수가 될 수 있다. 하지만 $f(a-x)$로 주었기 때문에 $x=\frac{a}{2}$ 대칭이어서, $\frac{a}{2}$가 정수여야하므로 a는 짝수일 것이라는 합리적 의심을 하게 된다. 그래서 나는 $a=2$일 때를 찍는다고 한 것이다.

04

함수 $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$의 극댓값이 4이고 $f(-2)>0$일 때, $f(-1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

선지 분석

공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

$f(-1)=-1-3a-3a^2+3=-3a^2-3a+2$이다. a가 항상 정수일 것이라고 기대한다. 만약 $a=0$이면 $f(-1)=0$일 것이고, $a=1$이면 $f(-1)=-4$일 것이다.

아! $f(-1)$은 최고차항의 계수가 음수인 이차함수이기 때문에 a에 양수를 대입한다면 $f(-1)$의 값은 계속 음수일 것이므로 선지에 답이 없다. 따라서 a에 음의 정수를 대입해야 한다.

한 술 더 떠보자.

$f(-2)=-8-12a-6a^2+6=-6a^2-12a-2>0$이다.

$a=-1$: $f(-2)=-6+12-2>0$

$a=-2$: $f(-2)=-24+24-2<0$

$a=-3$: $f(-2)<0$

아! $f(-2)$ 또한 최고차항의 계수가 음수인 이차함수이므로 $a<-1$인 모든 음의 정수 a에 대해서 $f(-2)$는 음수일 것이다. 따라서 가능한 a의 값은 -1밖에 없다.

찍을만한 선지

②

실제 답

②

05

두 상수 $a, b\,(1<a<b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다.

함수 $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$에 대하여 $f(1)=40$일 때, $f(2)$의 값은?

① 760 ② 800 ③ 840
④ 880 ⑤ 920

선지 분석

공차가 40인 등차수열이다.

문항 해설

$f(1)=a^b+b^a=40$, $f(2)=a^{2b}+b^{2a}$이다. a^b와 b^a를 각각 제곱해서 더했다. 왠지 산술기하평균이 떠오르기도 하고, $t+\frac{1}{t}$를 제곱하여 $t^2+\frac{1}{t^2}$을 만드는 방법도 떠오른다. $a^b=b^a$일 때, 이벤트가 일어날 것 같아 $f(2)=800$이라고 선택하는게 타당해 보인다.

찍을만한 선지

②

실제 답

②

06

공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값을 구하시오.

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

선지 분석

공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

공차가 2이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 $2(n-p)$라고 해보자.
$a_{2k}=2(2k-p)=4k-2p$이다. 여기까지만
하면 답이 짝수인 것으로 보인다. 여기까지 밖에 못했으면 어쩔 수 없이 ①, ③, ⑤ 중에서 찍어야 한다. 하지만 우리는 아무렇게나 찍을 게 아니므로 주어진 조건을 좀 더 이용해보자.
$S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$로 $a_{k+1}+a_{k+2}=4$을 얻었다고 하자.
$2(k+1-p)+2(k+2-p)=4$이므로 $2k-2p=1$이다. 자, 그럼 $4k-2p$를 k로 나타낼지, p로 나타낼지 또한 개인의 역량이다.
우리는 당연히 k로 나타내어야 한다. k는 자연수라는 조건이 있지만 p는 별다른 조건이 없기 때문이다. $4k-2p=2k+1$이므로
a_{2k}는 홀수가 되어야 한다.

찍을만한 선지

②, ④

실제 답

②

07

2가 아닌 양수 a에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)^2 & (x\le a)\\ (x-2)(x-a) & (x>a)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3a)$의 값은?

(가) $f(c)=0$인 c가 0과 $1+\frac{a}{2}$ 사이에 적어도 하나 존재한다.
(나) 세 점 $(2, f(2))$, $(a, f(a))$, $\left(1+\frac{a}{2}, f\left(1+\frac{a}{2}\right)\right)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{8}$이다.

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

선지 분석

공비가 2인 등비수열이다. 등비수열일 경우 등차수열처럼 마냥 찍기가 거의 불가능하다.

문항 해설

a가 양수이므로 $a<3a$이다. 따라서 $f(3a)=(3a-2)2a$일 것이다.
a는 2가 아니므로 우리가 찍을 정수 a는 $a=1,\ 3,\ 4,\ \cdots$이다.
- $a=1$: $f(3a)=2$
- $a=3$: $f(3a)=42$

$\vdots \qquad \vdots$

따라서 $f(3a)$로 가능한 값은 2뿐이다.

찍을만한 선지

①

실제 답

①

08

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x>0$일 때, $f(x)=axe^{2x}+bx^2$ (나) $x_1<x_2<0$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2)-f(x_1)=3x_2-3x_1$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2e$일 때, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $2e$　② $4e$　③ $6e$　④ $8e$　⑤ $10e$

선지 분석

공차가 $2e$인 등차수열이다.

문항 해설

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{2}e+\frac{b}{4}=2e$이다. 만약 b가 유리수라면 절대 $2e$가 나올 수 없다. 따라서 $b=ke$이다. $e\left(\frac{a}{2}+\frac{k}{4}\right)=2e$이므로 $2a+k=8$이다.

$f'(x)=ae^{2x}+2axe^{2x}+2bx$이므로

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=ae+ae+b=e(2a+k)=8e$이다.

찍을만한 선지

④

실제 답

④

09

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3(t-2)(t-a)\ \ (a>2\text{인 상수})$$

이다. 점 P에서의 시각 $t=0$에서의 위치는 0이고, $t>0$에서 점 P의 위치가 0이 되는 순간은 한 번뿐이다. $v(8)$의 값은?

① 27　② 36　③ 45　④ 54　⑤ 63

선지 분석

공차가 9인 등차수열이다.

문항 해설

$v(8)=3\times 6\times(8-a)=18(8-a)$이다. 따라서 답은 18의 배수여야 한다.

찍을만한 선지

②, ④

실제 답

②

10

사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$에 대하여 $x \geq 0$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 $g(x)=c_1$ (c_1은 상수)

(나) $1<x<5$에서 $g(x)$는 감소한다.

(다) $x>5$에서 $g(x)=c_2$ (c_2는 상수)

$f(\sqrt{2})$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 40 ② 42 ③ 44

④ 46 ⑤ 48

선지 분석

공차가 2인 등차수열이다.

문항 해설

$f(\sqrt{2})=4+2a+b$이다. 여기에 a와 b에 적절한 정수를 대입하여 값을 추정할 수도 있다.

하지만 $f(x)$가 우함수인 것을 발견하고, 서로 다른 네 실근을 가질 것이라는 판단이 섰다면

$f(x)=(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)$이라고도 둘 수 있다.

이때 $f(2)=(2-\alpha^2)(2-\beta^2)$이다. 문제에 있는 숫자를

이용해보자. $x=1$과 $x=5$일 때, 이벤트가 일어날 것이라고 생각할 수 있다. $\alpha=5$라 한다면

$f(2)=-23(2-\beta^2)$이며, 23의 배수여야 한다. 따라서 답은 ④이다.

찍을만한 선지

④

실제 답

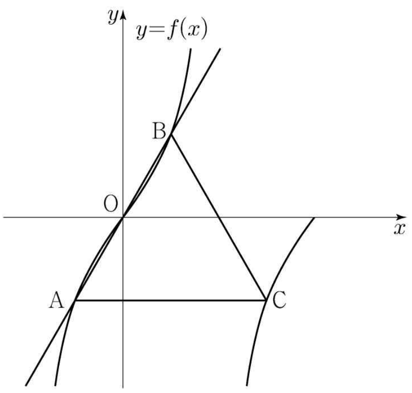
④

11

양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \middle| -\frac{a}{2} < x \le a,\ x \ne \frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

선지 분석

분모를 12로 통분했을 때, 분자는 공차가 -1인 등차수열이다.

문항 해설

삼각형의 넓이는 전부 곱의 꼴로만 이루어진다. 특히 이 문제의 삼각형의 경우 정삼각형이므로 한 변의 길이를 a라 하면 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이다. 즉, 답은 최대한 합성수여야 한다. 일단 소수인 선지인 ②, ④, ⑤는 과감히 던지자.

답의 꼴이 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이므로 각 선지에 $\frac{4}{\sqrt{3}}$을 곱해 a^2만 남도록 정리해주자.

① 6

② $\frac{17}{3}$

③ $\frac{16}{3}$

④ 5

⑤ $\frac{14}{3}$

이 선지들 중에서 제곱꼴인 선지는 ③ 밖에 없다.

찍을만한 선지

③

실제 답

③

12

$0<t<1$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 함수 $f(x)=\sin x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$의 그래프가 만나는 점을 P라 할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서 그은 접선의 x절편을 $g(t)$라 하자. $g'\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$의 값은?

① -28 ② -24 ③ -20
④ -16 ⑤ -12

선지 분석

공차가 4인 등차수열이다.

문항 해설

$g'(t)$에 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$을 대입했는데 선지에는 $\sqrt{\ }$가 없다. 그렇다면 우리는 $g(t)$를 어떻게 예상할 수 있을까.

아마 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이 제곱되면 $\sqrt{\ }$가 사라질 것 같다. 제곱 후 $\dfrac{8}{9}$이 남으므로 답은 8의 배수여야 한다.

(물론 실제로 풀어보면 제곱과는 관련이 없다. 하지만 항상 기준이 있어야 한다는 점을 잊지 말자.)

찍을만한 선지

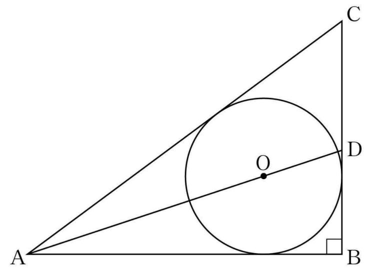
②, ④

실제 답

②

13

그림과 같이 $\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC에 내접하고 반지름의 길이가 3인 원의 중심을 O라 하자. 직선 AO가 선분 BC와 만나는 점을 D라 할 때, $\overline{DB}=4$이다. 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는?



① $\dfrac{125}{2}\pi$ ② 63π ③ $\dfrac{127}{2}\pi$
④ 64π ⑤ $\dfrac{129}{2}\pi$

선지 분석

π는 공통이니까 제외하면 공차가 $\dfrac{1}{2}$인 등차수열이다.

문항 해설

외접원의 넓이를 구하기 위해서는 결국 반지름의 길이가 필요하며, 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는 방법은 사인법칙이다.
삼각형 ADC에서 한 각을 잡고, 마주보는 변을 세팅하면 된다.
$\overline{DB}=4$이므로 $\overline{CD}$의 길이를 구하기 편하다고 생각했으면 각 CAB를 θ라 두자. 그럼 $\dfrac{\overline{CD}}{\sin\theta}=2r$에서 $r=\dfrac{\overline{CD}}{2\sin\theta}$이다.

$S=\dfrac{\overline{CD}^2}{4\sin^2\theta}$이므로 S는 어떤 수의 제곱꼴이어야 한다. 따라서 답이 될 수 있는 선지는 ①, ④이며, 만약 $\overline{DB}=4$를 통해 $\overline{CD}=5$임을 대략적으로 추정할 수 있다면 답은 ①이다.

찍을만한 선지

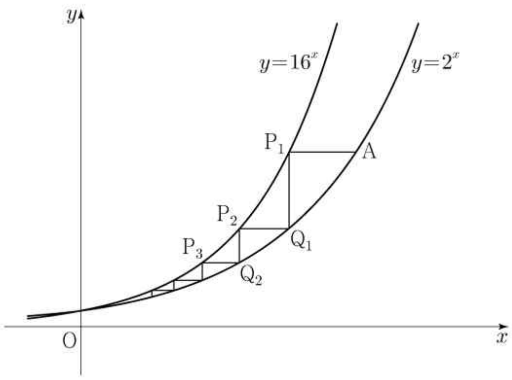
①

실제 답

①

14

두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64,\ 2^{64})$이 있다. 점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자. 점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n < \frac{1}{k}$를 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는?



① 48 ② 51 ③ 54
④ 57 ⑤ 60

선지 분석

공차가 3인 등차수열이다.

문항 해설

분명히 2의 거듭제곱꼴과 관련된 답이 나와야 한다. 선지에서 단순 2^n꼴이 없고 문제에서도 $x_n < \frac{1}{k}$를 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록이라고 하였으므로 6이 기준이다.

① $48=64-16$ ② $51=64-13$
③ $54=64-10$ ④ $57=64-7$
⑤ $60=64-4$

따라서 ①, ⑤ 중에서 찍어야 한다.

찍을만한 선지

①, ⑤

실제 답

①

15

두 양수 $a, b\,(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x-a)(x-b)$라 하자.

$$\int_0^a f(x)dx=\frac{11}{6},\ \int_0^b f(x)dx=-\frac{8}{3}$$

일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5
④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

선지 분석

공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다.

문항 해설

이차함수 $f(x)=(x-a)(x-b)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{6}(b-a)^3$이다. 즉, 선지들의 분모를 6으로 만들었을 때, 분자는 세제곱꼴이어야 한다.

찍을만한 선지

② $\left(\frac{27}{6}\right)$

실제 답

②

16

실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-3)+4$이다.
(나) $\int_{0}^{6} f(x)dx=0$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=6$, $x=9$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 9　② 12　③ 15　④ 18　⑤ 21

선지 분석

공차가 3인 등차수열이다.

문항 해설

증가하는 모든 연속함수 $f(x)$가 조건들을 만족한다. 또한 그 모든 연속함수에 대해서 $\int_{6}^{9}|f(x)|dx$의 값이 같다는 의미이므로 우리가 $f(x)$의 식을 직접 찾아버리면 된다. 조건이 두 개이므로 미지수가 두 개인 식을 찾으면 된다. 일차함수 $y=ax+b$가 가장 보편적일 것 같다.

조건 (가)에 대입하면 $ax+b=ax-3a+b+4$이므로 $a=\frac{4}{3}$이다.

조건 (나)에 의해 $\int_{0}^{6}\left(\frac{4}{3}x+b\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^2+bx\right]_{0}^{6}=24+6b=0$

따라서 $b=-4$이므로 $f(x)=\frac{4}{3}x-4$이다.

$\therefore \int_{6}^{9}|f(x)|dx=18$

찍을만한 선지

④

실제 답

④

17

함수 $f(x)=x^2-2x$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x-1)-1$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{5}{12}$　⑤ $\frac{1}{2}$

선지 분석

분모를 12로 통분하면 분자가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

우리는 어차피 $\int f(x)dx$를 해야한다. $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 적분하면 $F(x)=\frac{1}{3}x^3$~이므로 분모에 3 또는 3의 배수가 와야 한다.

찍을만한 선지

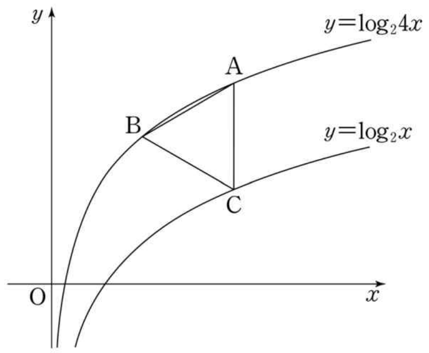
③

실제 답

③

18

함수 $y=\log_2 4x$의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수 $\log_2 x$의 그래프 위의 점 C에 대하여 선분 AC가 y축에 평행하고 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 B의 좌표는 (p, q)이다. $p^2 \times 2^q$의 값은?



① $6\sqrt{3}$ ② $9\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$
④ $15\sqrt{3}$ ⑤ $18\sqrt{3}$

선지 분석

공차가 $3\sqrt{3}$인 등차수열이다.

문항 해설

일단 선지의 $\sqrt{3}$이 어디에서 나타났는지부터 생각해야 한다. 아마 정삼각형에서 나왔을 것이다.

왜 p에 제곱을 하라고 했을까? 아마 루트가 있기 때문일 것이다.

왜 q에는 2^q를 구하라고 했을까? 아마 q가 밑이 2인 로그이기 때문일 것이다.

점 B의 좌표가 (p, q)이므로 둘 중 하나만 알면 나머지는 알아서 구해진다. p를 $\sqrt{3}$을 넣어서 찍어보자. 곡선 $y=\log_2 x$의 x절편이 1이다. 그림 상으로 p는 $\sqrt{3}$으로 생각이 든다. ($\sqrt{3} \approx 1.7$)

$p=\sqrt{3}$이면 $q=\log_2 4\sqrt{3}$이다.

따라서 $p^2 \times 2^q = (\sqrt{3})^2 \times 2^{\log_2 4\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$

찍을만한 선지

③

실제 답

③

이번에는 지수/로그함수에서 밑이나 지수에 있는 미지수를 찍는 방법을 한 번 알아보도록 하자. [19 ~ 22]

지수/로그함수에 포함된 미지수를 구하기 위해서는 무조건 지나는 한 점을 찾아 대입해야 한다. 이때 그 점의 x좌표와 y좌표 중 적어도 하나가 **정수**여야 한다. (최소한 찍을 때)

물론 정수가 아니어도 좋다. 하지만 수능 수학이라는 틀 안에서 답으로 쓰기에는 적어도 하나의 좌표가 정수여야 답을 수월하게 도출할 수 있다. 예를 들어 살펴보자.

함수 $y=\log_a x$ 위에 한 점을 넣어 a값을 구해보자.

$a=x^{\frac{1}{y}}$이므로

① x와 y 모두 정수일 때 : $a=3^{\frac{1}{2}}$ → 무난하다.

② x만 정수일 때 : $a=3^{\frac{4}{7}}$ → 무난하다.

③ y만 정수일 때 : $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{-\frac{1}{2}}$ → 무난하다.

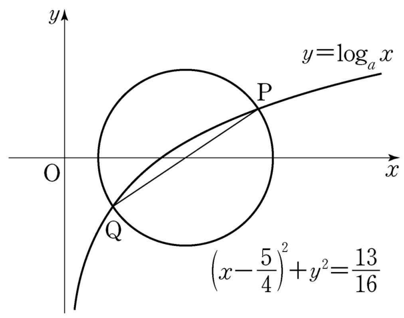
④ x와 y 둘 다 정수가 아닐 때 : $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{7}}$ → 골때린다.

물론 어찌저찌해서 모두 a가 예쁘게 만들어질 수는 있다. 하지만 우리가 푸는 수능판에서는 둘 중 하나가 정수여야 객관식 답을 예쁘게 만들 수 있다. (나 한 번 믿어봐. 아무 선지나 찍는 것보단 낫잖아.)

문제를 통해 무슨 소리인지 판단해보자.

19

$a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와 원 $C:\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q라 하자. 선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a의 값은?



① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5

선지 분석

공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다.

문항 해설

원의 중심의 좌표가 $\left(\frac{5}{4},0\right)$이다. a의 값을 찾기 위해 점 P의 좌표를 찾아보자. 좌표 중 적어도 하나는 정수라고 생각하고 찍자.

<u>항상 길이를 찍기 위해서는 기준이 될 길이가 필요하다.</u>

로그함수의 x절편이 1이므로 1을 기준 삼아 길이를 찍자. 점 P의 y좌표는 1보다 작아보인다. 따라서 정수가 될 수 없다. 그러면 x좌표를 정수로 맞춰줘야 하는데 $x=2$면 될 것 같다. 그 말은 점 P의 x좌표와 원의 중심의 x좌표의 차이가 $\frac{3}{4}$라는 말이고, 원의 반지름을 알고 있기에 점 P의 y좌표를 구해주면 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 $\frac{1}{2}=\log_a 2$이므로 $a=4$이다.

찍을만한 선지

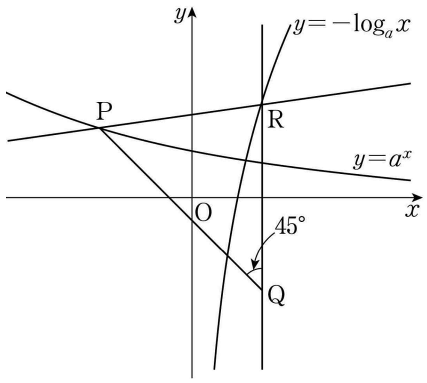
④

실제 답

④

20

그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=a^x\,(0<a<1)$ 위의 점 P가 제2사분면에 있다. 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 Q와 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점 R에 대하여 $\angle \mathrm{PQR}=45^\circ$이다. $\overline{\mathrm{PR}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$이고 직선 PR의 기울기가 $\dfrac{1}{7}$일 때, 상수 a의 값은?



① $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{2}{3}$

④ $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

선지 분석

선지들을 $\dfrac{\sqrt{\ }}{3}$꼴로 맞춰넣으면 $\sqrt{\ }$ 안의 수들이 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

$\overline{\mathrm{PR}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$이고 직선 PR의 기울기가 $\dfrac{1}{7}$인 것을 통해 $\Delta x=\dfrac{7}{2}$, $\Delta y=\dfrac{1}{2}$이라는 것 쯤은 할 수 있어야 다음 단계로 넘어갈 수 있다.

점 R의 좌표를 구해 a값을 구해보자. 직선 RQ는 왠지 y축과 평행해 보인다. 점 P에서 직선 RQ에 내린 수선의 발을 S라 한다면 점 S는 x좌표와 y좌표가 같아 보인다. 그럼 S의 좌표가 필요한 셈인데 선분 PR가 y축에 의해 몇 대 몇 내분을 당하고 있는지 유추해보자. 전체의 길이가 $7k$인 셈이니 그림을 자세히 관찰해본다면 $3:4$인 것 같다. (전체의 길이를 통해 내분점을 예측할 수 있어야 한다! 정말 극한의 예외상황이 아니고서는 $2.9:4.1$ 같은 상황으로 나뉘지 않는다. <u>최대한 정수비로 구하자</u>.)

그럼 점 S의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$, 점 R의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{2},2\right)$이다.

y좌표가 정수가 나와주었으므로 상당히 끌린다. 이때의 a를 구하면 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$이다.

찍을만한 선지

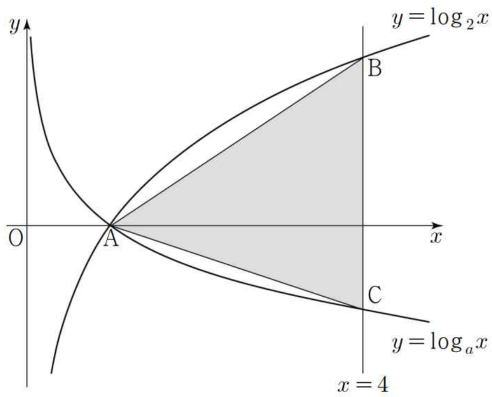
⑤

실제 답

⑤

21

두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_a x$ $(0<a<1)$이 x축 위의 점 A에서 만난다. 직선 $x=4$가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 B, 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 $\dfrac{9}{2}$일 때, 상수 a의 값은?



① $\dfrac{1}{16}$ ② $\dfrac{1}{8}$ ③ $\dfrac{3}{16}$
④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{5}{16}$

선지 분석

분모를 16으로 통분해주면 분자가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

점 C의 좌표를 알아야 a의 값을 구할 수 있다. x좌표는 $x=4$로 정해져 있으므로 y좌표만 찍어보자. 마찬가지로 기준이 되는 길이를 로그함수의 x절편인 1로 하자. 그럼 점 C의 y좌표가 마치 -1로 보인다. 따라서 점 C의 좌표는 $(4,\ -1)$일 것이며, $a=\dfrac{1}{4}$이다.

찍을만한 선지

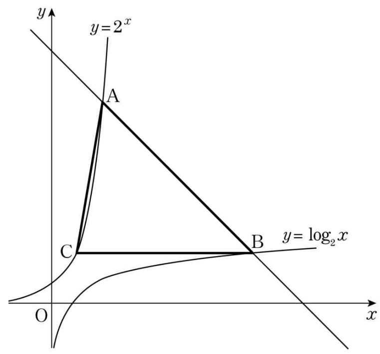
④

실제 답

④

22

그림과 같이 기울기가 -1인 직선이 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$와 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$와 만나는 점을 C라 하자. 선분 AB의 길이가 $12\sqrt{2}$, 삼각형 ABC의 넓이가 84이다. 점 A의 x좌표를 a라 할 때, $a-\log_2 a$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

선지 분석

공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

$a-\log_2 a$에는 log가 있는데, 선지에는 log가 없다. 즉, a는 2의 거듭제곱이어야 한다.

- $a=1$: $1-0=1$
- $a=2$: $2-1=1$
- $a=4$: $4-2=2$
- $a=8$: $8-3=5$

따라서 적어도 ③, ④는 고르면 안된다. 그리고 $a=8$이면 그림상으로 말이 안되는 것 같다. 만약 점 A에서 선분 BC에 수선의 발(H)을 내려 $\overline{HB}=12$라는 것을 판단했다면 12와 길이를 비교해야 하는데, 1, 2, 4 중 그 어떤 것도 12와 비교했을 때, 맞아 떨어지지 않는다. 그 말은 그림이 실제 상황이 아니라는 말이다. (그럼 그림과 같이라는 말을 빼던가)

찍을만한 선지

①, ②

실제 답

②

인수 논리

다항함수는 기본적으로 인수분해가 된다. 물론 허근을 가지더라도 두 허근이 켤레로 묶여 하나의 인수를 만들게 된다. 즉, 앞으로 우리는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)$라는 함숫값에서 소수는 최대한 배제할 것이다. 물론 소수가 나올 수도 있다. $f(x)=x^2+2x+3$에서 $f(2)=11$이지 않는가? 하지만 다 필요 없다. 찍기 위해서는 항상 기준이 필요하다. 따라서 정말 웬만한 경우가 아니고서는 다항함수의 함숫값은 합성수일 것으로 **기대**하고, 찍는다.

그 중 삼차함수는 더 특이한 놈이다. 이차함수와 사차함수는 어느 하나의 실근도 가지지 않은 채 x축 위에 떠있을 수 있다. 하지만 삼차함수의 개형을 그려보면, 무조건 하나의 실근이 생기게 된다. 그 말은 삼차함수는 어떻게든 인수분해가 된다는 것이다. 즉, 삼차함수에 대한 함숫값은 우리가 조금 더 자신감을 가지고 합성수로 찍을 수 있는 기회가 생긴다. 삼차함수의 함숫값이 소수가 나올 수 있는 경우는 언제일까? $f(x)=(x-3)g(x)$일 때, $f(4)$의 값을 구하라 한다면 $1\times g(4)$이므로 이차함수인 $g(x)$의 값이 소수이면 충분히 $f(x)$의 함숫값도 소수가 될 수 있다. 하지만 이렇게 너무 많은 경우를 생각하면 절대 찍을 수 없다. 나는 그냥 소수는 최대한 배제하는 편이니 자신만의 기준이 없다면 그냥 한 번 해보자.

이번 단원에서는 무작정 찍는 단원이 아니므로, 다항함수가 인수분해됨을 이용한 문제들을 살펴볼 것이다. 다음과 같은 개념들은 모두들 알고 있을 것이라고 생각된다.

다항함수 $f(x)$에 대하여

- $f(a)=0$: $f(x)=(x-a)g(x)$
- $f(a)=0,\ f'(a)=0$: $f(x)=(x-a)^2h(x)$
- $f(0)=$ 상수항
- $f'(0)=$ 일차항의 계수
- $\vdots$ $\qquad\qquad\vdots$

이 중 가장 처음에 있는 '$\boldsymbol{f(a)=0}$ **:** $\boldsymbol{f(x)=(x-a)g(x)}$'를 이용할 것이다. 만약 $f(x)$가 $(x-3)$을 인수로 가지고 있다면,
$f(x)=(x-3)g(x)$일 것이고, $f(7)$의 값은 $4g(7)$이므로
4의 배수가 답이 되어야 할 것이다.

인수 논리를 이용하여 문제를 찍겠다는 말은 거꾸로 답의 꼴이 합이나 차인 경우에는 소수의 경우가 충분히 나올 수 있다는 것을 말한다. 예를 들어 $\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$이므로 함부로 인수 논리를 이용해 문제를 풀 수 없다.

23

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_2의 값은?

(가) $a_6+a_8=0$
(나) $\lvert a_6\rvert=\lvert a_7\rvert+3$

① -15 ② -13 ③ -11
④ -9 ⑤ -7

선지 분석

공차가 2인 등차수열이다.

문항 해설

조건 (가)로 의해 $a_7=0$이다. 따라서 $a_n=k(n-7)$이다. $a_2=-5k$ 이므로 답은 5의 배수여야 한다. (사실 이 문제는 너무나 쉬워서 이렇게 안 풀어도 된다. 하지만 그럼에도 불구하고 넣은 이유는 조건 (나)를 읽지 않고 과감하게 먼저 ①을 선택한 후에, 뒤 문제를 풀 시간을 아끼는 것에 있다. 나중에 검토하면 된다.)

찍을만한 선지

①

실제 답

①

24

최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1)=0$
(나) $\lim_{x\to n}\dfrac{f(x)}{g(x)}=(n-1)(n-2)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$g(5)$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

선지 분석

공차가 2인 등차수열이다.

문항 해설

함수 $g(x)$는 삼차함수이다. 이 $g(x)$가 $g(1)=0$이므로
함수 $g(x)$는 $(x-1)$을 인수로 가진다. $g(x)=(x-1)Q(x)$
구하고자 하는 값은 $g(5)$이며, $g(5)=4Q(5)$이므로
4의 배수여야 한다.

찍을만한 선지

①, ③, ⑤

찍지 않아야할 선지

②, ④

실제 답

⑤

25

다항함수 $f(x)$는 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-3x-5}=2$를 만족시키고, 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x-3)} & (x\neq 3)\\ 1 & (x=3)\end{cases}$$

이다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(1)$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

선지 분석

공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 불연속이므로 $f(3)=0$이어야 함수 $f(x)g(x)$가 연속이 될 수 있다. 따라서 $f(x)$는 $(x-3)$을 인수로 가지며 $f(1)$의 값은 2의 배수여야 한다.
한 술 더 뜨면 $(x-3)$ 한 개만으로는 $f(x)g(x)$는 연속이 되지 못한다. 그래서 적어도 $(x-3)^2$을 인수로 가져야겠다고 생각했다면 $f(1)$의 값은 이제 4의 배수가 되어야 한다.

찍을만한 선지

①, ⑤

찍지 않아야할 선지

②, ④ (④는 소수이기 때문이라도 찍기 싫었어야 한다.)

실제 답

①

26

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f'(x)|$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=g(0)=0$
(나) 방정식 $f(x)=0$은 양의 실근을 갖는다.
(다) 방정식 $\lvert f(x)\rvert=4$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$g(3)$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

선지 분석

공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

$f(0)=0$이므로 $f(x)$는 x로 인수를 가진다. $g(0)=0=|f'(0)|$이므로 $f'(x)$도 x를 인수로 갖는다.
따라서 $g(x)=f(x)+|f'(x)|$도 x를 인수로 가져야 한다.
$g(3)$은 3의 배수여야 한다.

찍을만한 선지

②, ⑤

찍지 않아야할 선지

①, ③, ④

실제 답

②

27

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. Mm의 값은?

> (가) 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.
> (나) 방정식 $f(x)=0$은 닫힌구간 $[3, 5]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① $\dfrac{1}{15}$ ② $\dfrac{1}{10}$ ③ $\dfrac{2}{15}$

④ $\dfrac{1}{6}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

선지 분석

분모를 30으로 통분하면 분자가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

조건 (가)로 인해 $f(x)$는 일단 $(x+1)$을 인수로 하나 가져야 한다. 그래서 $f(0)$을 넣어봤더니 1의 배수이므로 전혀 의미가 없다. 조건 (나)를 보면 닫힌구간 $[3, 5]$에서 하나의 실근을 갖는다고 했다. $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최대, 최소를 구하라고 하였으므로 아마 경계의 끝인 3과 5에서 이벤트가 일어날 것이라고 예측할 수 있다.

3 : $f(x)=k(x+1)(x-3)(x-a)$

5 : $f(x)=k(x+1)(x-5)(x-a)$

따라서 $f(0)$의 값은 각각 3의 배수와, 5의 배수여야 한다. 이 둘을 곱해야하므로 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최대, 최소의 곱은 분모가 15가 있어야함을 알 수 있다.

찍을만한 선지

①, ③

실제 답

⑤ ($\dfrac{1}{5}$는 $\dfrac{3}{15}$였다..!)

28

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은?

> (가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
> (나) $f(0)=f'(0)$
> (다) $x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$이다.

① 28 ② 33 ③ 38

④ 43 ⑤ 48

선지 분석

공차가 5인 등차수열이다.

문항 해설

만약 조건 (나)를 보고 $f(0)=f'(0)=0$이면 좋을텐데 라는 생각이 들었어야한다. 또는 조건 (다)까지 이용하여 $f(0)=f'(0)=0$을 얻었다고 치자. 그러면 $f(x)=kx^2(x-a)$이다.

따라서 $f(2)=4k(2-a)$로서 4의 배수여야 한다.

찍을만한 선지

①, ⑤ (솔직히 숫자 28보다 48이 더 답같아 보여야한다.)

찍지 않아야할 선지

②, ③, ④ (인수가 적은 33, 38, 43은 그냥 찍기 싫다.)

실제 답

⑤

29

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, $f(3)$의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

선지 분석

공차가 2인 등차수열이다.

문항 해설

$f(x)$는 기함수이므로 x를 무조건 인수로 갖는다. 따라서 $f(3)$은 3의 배수여야한다.

찍을만한 선지

①, ④

찍지 않아야할 선지

②, ③, ⑤

실제 답

④

30

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=1$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

문항 해설

$f(0)=0$이므로 $f(x)$는 x를 인수로 갖는다. 따라서 $f(3)$의 값은 3의 배수여야 한다.

답으로 선택할만한 수

3의 배수

실제 답

51

31

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=-f(x),\ g(-x)=g(x)$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx=10$$

일 때, $h(3)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

선지 분석

공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

$f(x)$는 기함수, $g(x)$는 우함수이므로 $h(x)$는 기함수이다. 따라서 $h(x)$는 x를 인수로 가지며 $h(3)$의 값은 3의 배수여야 한다.

찍을만한 선지

③

실제 답

① (최고차항의 계수가 정해져있지 않아서 이런 문제가 생겼다.)

32

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt+f(x)$$

라 할 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다. (나) 함수 $g(x)$의 도함수 $y=g'(x)$의 그래프는 원점에 대해 대칭이다.

$f(2)$의 값은?

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

선지 분석

공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

$g(0)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 x를 인수로 갖는다. 따라서 $f(2)$는 2의 배수여야 한다.

찍을만한 선지

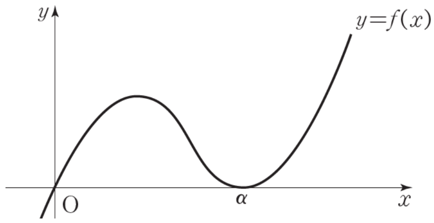
②, ④

실제 답

②

33

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$이고 함수 $g(x)$가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $g\left(\frac{\alpha}{3}\right)$의 값은? (단, α는 양수이다.)



(가) $g'(x)=f(x)+xf'(x)$
(나) $g(x)$의 극댓값이 81이고 극솟값이 0이다.

① 56 ② 58 ③ 60 ④ 62 ⑤ 64

선지 분석

공차가 2인 등차수열이다.

문항 해설

조건 (가)를 통해 $g(x)=xf(x)$임을 알았다면 $g(x)=x^2(x-\alpha)^2$이다. 즉, $g\left(\frac{\alpha}{3}\right)$의 값은 제곱×제곱꼴이어야 한다. 이는 64밖에 되지 않는다.

찍을만한 선지

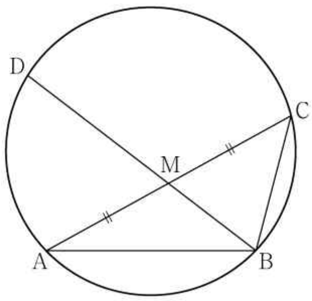
⑤

실제 답

⑤

34

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는?



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ ④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

선지 분석

분모를 10으로 통분하면 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

어떻게든 $\overline{AM}=2$인 것을 구했을 것이라고 생각한다. 만약 할선정리를 떠올려서 사용한다고 해보자. $\overline{MD}\times\overline{MB}=4$이므로 $\overline{MD}=\frac{4}{\overline{MB}}$이다. 따라서 $\overline{MD}$는 4의 배수여야 한다.

찍을만한 선지

③

실제 답

③ (근데 이렇게 하는게 찍는 거인지는 잘 모르겠네)

길이 또는 각 찍기

길이 또는 각을 찍는 것은 의외로 단순하다. 답을 찾겠다는 노력만 있으면 된다.

1) 각을 찍는 방법

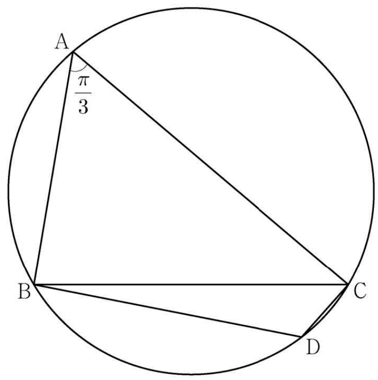
각을 찍기 위해서는 무조건 그 각을 포함한 직각삼각형이 필요하다. 세 변의 길이의 비율을 대략적으로 예측하여 삼각비를 추정해야 한다.

2) 길이를 찍는 방법

길이를 찍기 위해서는 기준이 되는 길이가 필요하다. 짧은 선분이 기준으로 유리하며, 최대한 등분을 열심히 해서 몇 대 몇 비율일지 측정하는 것이 중요하다.

35

반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A = \frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$의 값은?



① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$

④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$

선지 분석

공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다.

문항 해설

$\overline{BD}+\overline{CD}$의 길이를 구하라고 하였으므로 우리는 $\overline{BD}$와 $\overline{CD}$의 길이를 찾으면 된다. 길이를 못 구하겠으면 적어도 서로 어떤 실수배 관계에 있는지 최대한 찾아보도록 하자. $\overline{CD}$의 길이를 k라 한다면 (항상 짧은 것을 기준으로 잡아야 한다.) $\overline{BD}$의 길이는 몇 k같아 보이는가? 열심히 샤프로 k를 잡고 계산해보면 $4k$라고 할 수 있을 것 같다. 즉, $\overline{BD}+\overline{CD}=5k$이다. 따라서 답은 5의 배수여야 한다. 답이 될 수 있는 것은 ② 밖에 없다.

찍을만한 선지

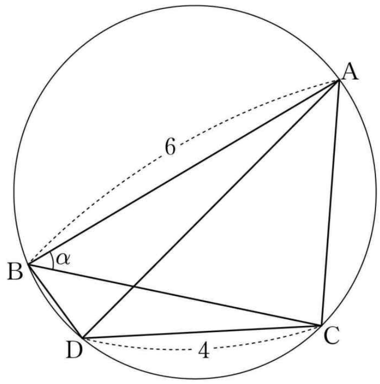
②

실제 답

②

36

그림과 같이 예각삼각형 ABC가 한 원에 내접하고 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=6$이고 $\angle \mathrm{ABC}=\alpha$라 할 때, $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$이다. 점 A를 지나지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{\mathrm{CD}}=4$이다. 두 삼각형 ABD, CBD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1 : S_2 = 9 : 5$이다. 삼각형 ADC의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오.



문항 해설

삼각형 ADC의 넓이를 일단 표현해보자. $S=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times 4\times\sin\alpha$

$\therefore S=\dfrac{\sqrt{7}}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}$

여기서 멈추면 안되고 답의 꼴은 S^2이기에 S^2까지 나타내야 한다.

$S^2=\dfrac{7}{4}\times\overline{\mathrm{AD}}^2$

일단 답은 무조건 7의 배수로 찍어야 한다. 마킹가능하기 위해서는 분모의 4가 약분되어야 하기 때문이다. 또한 $\overline{\mathrm{AD}}$의 길이를 찍어야 하는데 제곱해서 4의 배수가 되어야하므로 짝수로 찍어야 한다.

기준이 되는 $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{CD}}=4$로 비교해서 $\overline{\mathrm{AD}}$를 추정해보자면 $\overline{\mathrm{AD}}=6$이다. 따라서 답은 $\dfrac{7}{4}\times 36=63$이다.

답으로 선택할만한 수

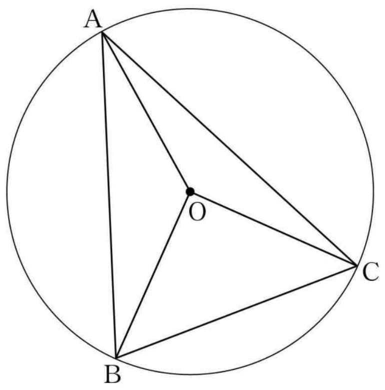
63

실제 답

63

37

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC에 대하여 두 삼각형 OAB, OCA의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $3S_1 = 4S_2$이고, $\overline{BC} = 2\sqrt{5}$일 때, 선분 AB의 길이는?



① $2\sqrt{7}$　② $\sqrt{30}$　③ $4\sqrt{2}$
④ $\sqrt{34}$　⑤ 6

선지 분석

$\sqrt{\ }$ 안의 숫자들이 공차가 2인 등차수열이다.

문항 해설

선분 AB의 길이를 알려면 반지름의 길이 $r = \sqrt{10}$을 알고 있으므로 코사인법칙을 사용하기 위해 각 AOB의 코사인 값만 알면 된다.

$$\overline{AB}^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\cos(\angle AOB)$$
$$= 20 - 20\cos(\angle AOB)$$

① $28 = 20 - 20\times\left(-\dfrac{2}{5}\right)$ $\therefore \cos(\angle AOB) = -\dfrac{2}{5}$

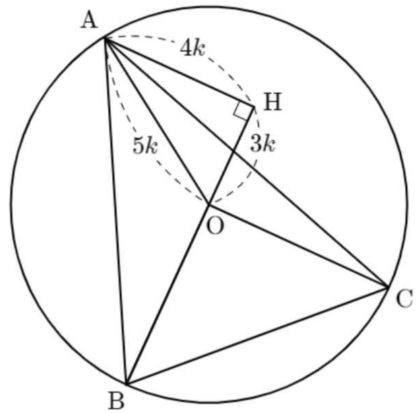
② $30 = 20 - 20\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ $\therefore \cos(\angle AOB) = -\dfrac{1}{2}$

③ $32 = 20 - 20\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)$ $\therefore \cos(\angle AOB) = -\dfrac{3}{5}$

④ $34 = 20 - 20\times\left(-\dfrac{7}{10}\right)$ $\therefore \cos(\angle AOB) = -\dfrac{7}{10}$

⑤ $36 = 20 - 20\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)$ $\therefore \cos(\angle AOB) = -\dfrac{4}{5}$

일단 코사인 값이 말이 안되는 ①과 ④는 지우자. ②, ③, ⑤의 코사인 값은 자주 보던 값이다. 삼각비를 추정하는 가장 좋은 방법은 직각삼각형을 만드는 것이다.



매우 합리적으로 각 AOB의 코사인 값은 $-\dfrac{3}{5}$라고 할 수 있을 것 같다.

찍을만한 선지

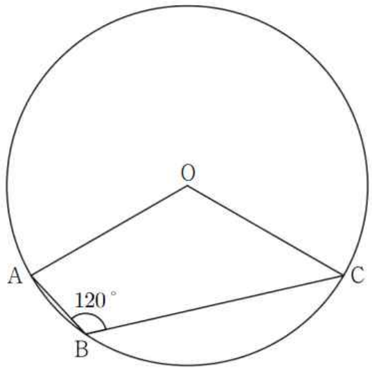
③

실제 답

③

38

그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심이 O인 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여 $\angle ABC = 120^\circ$, $\overline{AB}+\overline{BC} = 2\sqrt{15}$일 때, 사각형 OABC의 넓이는?



① $5\sqrt{3}$ ② $\frac{11\sqrt{3}}{2}$ ③ $6\sqrt{3}$

④ $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

선지 분석

$\sqrt{3}$을 제외하면 공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다.

문항 해설

이 사각형의 넓이의 경우 단순 밑변×높이로 이루어져 있지 않다. 따라서 소수를 함부로 거르면 안 된다. 사각형의 넓이를 한 번에 구하기 어려우므로 당연히 선분 AC를 그어 두 삼각형의 넓이의 합으로 구해야겠다고 생각할 것이다. 두 삼각형은 밑변이 선분 AC로 같으므로 높이의 비만 찾으면 넓이를 찾을 수 있다. 점 O와 점 B에서 선분 AC에 수선의 발을 내려 두 수선의 길이의 비를 열심히 추정해보자. 일단 $1:1$은 아닌 것 같다. 따라서 짝수의 값을 가지는 ③은 답이 아니다. 우리는 항상 비율을 찍을 때에는 정수의 비로 찍어야 한다. 만약 ①이 답이라면 높이의 비율은 $3:2$일 것이고 ⑤가 답이라면 $4:3$의 비율일 것이다. $3:2$이면 정확히 3등분이 되지 않는 듯하다. $4:3$으로 찍자. 따라서 넓이는 7의 배수여야 한다.

찍을만한 선지

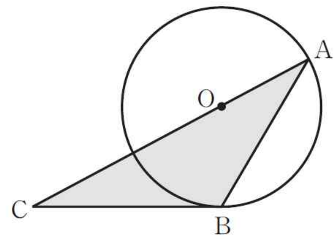
⑤

실제 답

⑤

39

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점 A에 대하여 $\sin(\angle OAB) = \frac{1}{3}$이 되도록 원 위에 점 B를 잡는다. 점 B에서의 접선과 선분 AO의 연장선이 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ACB의 넓이는?



① $\frac{24}{7}\sqrt{2}$ ② $\frac{26}{7}\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$

④ $\frac{30}{7}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{32}{7}\sqrt{2}$

선지 분석

분모를 7로 통분하면 분자가 공차가 2인 등차수열이다.

문항 해설

삼각형의 넓이는 곱으로 이루어져 있으므로 인수가 적은 26은 제외하자. 혼자 분수가 아닌 ③도 제외하자. 여기까지 왔으면 ①, ⑤가 답처럼 보여야 한다. 누구나 선분 OB를 그어 두 삼각형으로 쪼갤 것이다. 그러면 삼각형 AOB의 넓이는 $2\sqrt{2}$로 쉽게 구할 수 있다. 그럼 이제 삼각형 COB의 넓이만 추정하면 된다. 요주의 선지인 ①, ⑤를 $2\sqrt{2}$로 분리해보자.

① : $\frac{24}{7}\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \frac{10}{7}\sqrt{2}$ → 삼각형 $COB = \frac{10}{7}\sqrt{2}$

⑤ : $\frac{32}{7}\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \frac{18}{7}\sqrt{2}$ → 삼각형 $COB = \frac{18}{7}\sqrt{2}$

일단 $\frac{10}{7}\sqrt{2}$는 $2\sqrt{2}$보다도 작다. 그림상으로 아닌 것 같다. 그래서 답은 ⑤이다. 또한 삼각형 COB는 높이가 3이다. 즉, 삼각형 COB의 넓이는 3의 배수여야 한다. 따라서 $\frac{18}{7}\sqrt{2}$가 맞는 듯 하다. 이런 식으로 다른 선지도 $2\sqrt{2}$로 분리해주면 각각 왜 안되는지 알게 될 것이다.

찍을만한 선지

⑤

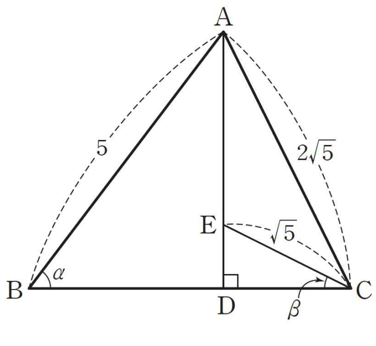
실제 답

⑤

40

그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=2\sqrt{5}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 선분 AD를 3 : 1로 내분하는 점 E에 대하여 $\overline{ED}=\sqrt{5}$이다.

$\angle ABD=\alpha$, $\angle DCE=\beta$라 할 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값은?



① $\frac{\sqrt{5}}{5}$　② $\frac{\sqrt{5}}{4}$　③ $\frac{3\sqrt{5}}{10}$

④ $\frac{7\sqrt{5}}{20}$　⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

선지 분석

분모를 20으로 통분하면 분자가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 값이 구해질 것이기 때문에 함부로 소수를 제외할 수는 없다.

삼각형 ABD의 빗변 5를 보고 당연히 피타고라스 수 3 : 4 : 5가 떠올라야 한다. 그럼 $\overline{AD}=4$, $\overline{AD}=3$로 찍자. 삼각형 ADC에서 빗변의 길이가 $2\sqrt{5}$이다. 그러면 직각삼각형에서 $1:2:\sqrt{5}$가 떠올라야 한다. 그럼 $\overline{DC}=2$이고 $\overline{ED}=1$이다. 삼각형의 비율에 따라 값을 추정했을 뿐인데 정확하게 답이 나왔다. 굳이 주어진 조건을 통해 길이를 찾는 것이 아닌 길이를 먼저 찍고 거꾸로 조건에 부합하는지 보는 것도 좋은 방법이다.

찍을만한 선지

⑤

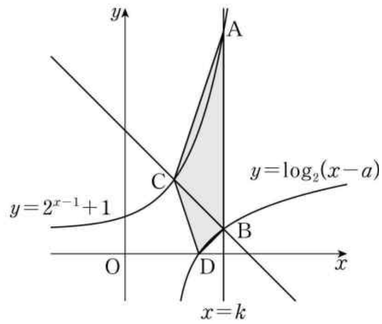
실제 답

⑤

41

그림과 같이 두 상수 a, k에 대하여 직선 $x-=k$가 두 곡선 $y=2^{x-1}+1$, $y=\log_2(x-a)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-1}+1$과 만나는 점을 C라 하자.

$\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=2\sqrt{2}$일 때, 곡선 $y=\log_2(x-a)$가 x축과 만나는 점 D에 대하여 사각형 ACDB의 넓이는? (단, $0<a<k$)



① 14　② 13　③ 12

④ 11　⑤ 10

선지 분석

공차가 -1인 등차수열이다.

문항 해설

$\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=2\sqrt{2}$인 것을 통해 아마 삼각형 ABC의 넓이가 8인 것은 누구나 구할 것이다. 문제는 삼각형 CBD의 넓이인데 이를 잘 찍어보도록 하자.

① $14=8+6$　② $13=8+5$

③ $12=8+4$　④ $11=8+3$

⑤ $10=8+2$

일단 삼각형 ABC의 넓이가 8인 것을 이용해 서로의 비율을 확인해보자. 확실해보이는 것은 삼각형 ABC의 넓이의 절반보다 작아보인다. 따라서 일단 ④, ⑤이다. $\overline{BC}=2\sqrt{2}$를 통해 $\overline{BD}$의 길이를 추정해보자. 딱 절반같아 보이므로 $\sqrt{2}$라고 생각할 수 있을 것이고, 각 CBD 또한 직각으로 보이므로 삼각형 CBD의 넓이는 2일 것이다.

찍을만한 선지

⑤

실제 답

⑤

문제에 있는 수 이용하기

우리가 답을 찍을 때에는 문제의 조건에 있는 숫자를
적극 활용하여야 한다.
그 이유는 조건에 있는 숫자들을 조합하여 답이 나온다고 가정할 수 있기 때문이다.
조건에 있는 주요 키워드 숫자들을 이용하여 답을 추적해보자.

42

닫힌구간 $[-2\pi, 2\pi]$에서 정의된 두 함수

$$f(x) = \sin kx + 2, \quad g(x) = 3\cos 12x$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는?

실수 a가 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 교점의 y좌표이면 $\{x \mid f(x) = a\} \subset \{x \mid g(x) = a\}$이다.

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

선지 분석

공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

k는 $f(x)$의 주기를 결정하는 역할을 한다. k와 관련이 있을 수 있는 수는 $g(x)$의 주기를 결정하는 12와 관련이 되어있을 수밖에 없다. 삼각함수를 출제하는 이유는 **주기성과 대칭성**이기 때문이다. 따라서 k를 찍을거면 12의 약수의 개수인 ④를 찍는 것이 타당하다.

찍을만한 선지

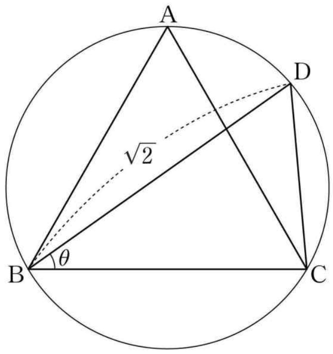
④

실제 답

②

43

정삼각형 ABC가 반지름의 길이가 r인 원에 내접하고 있다. 선분 AC와 선분 BD가 만나고 $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{2}$가 되도록 하는 원 위에서 점 D를 잡는다. $\angle\mathrm{DBC}=\theta$라 할 때, $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다. 반지름의 길이 r의 값은?



① $\dfrac{6-\sqrt{6}}{5}$ ② $\dfrac{6-\sqrt{5}}{5}$ ③ $\dfrac{4}{5}$

④ $\dfrac{6-\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\dfrac{6-\sqrt{2}}{5}$

선지 분석

$\sqrt{\ }$ 안의 숫자가 공차가 -1인 등차수열이다. ③은 $\dfrac{6-\sqrt{4}}{5}$로 해석할 수 있어야 한다.

문항 해설

일단 혼자 유리수인 ③은 거르고 시작하자. 이제 선지를 고르기 위한 조건이 필요한데 바로 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다. 동시에 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$이므로 이도 같이 이용할 수 있어야 한다. 따라서 선지에서 $\sqrt{6}$과 $\sqrt{3}$ 중에 골라야 한다. (①, ④) $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{2}$까지 이용하기로 마음먹었다면 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$이므로 $\sqrt{3}$보다 $\sqrt{6}$에 더 가깝지 않을까라고 생각해도 된다. 하지만 어디까지나 ①, ④ 모두 가능성이 있다.

찍을만한 선지

①, ④

실제 답

①

44

함수 $y=e^x$의 그래프 위의 x좌표가 양수인 점 A와 함수 $y=-\ln x$의 그래프 위의 점 B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{OB}}$

(나) $\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$

직선 OA의 기울기는? (단, O는 원점이다.)

① e ② $\dfrac{3}{\ln 3}$ ③ $\dfrac{2}{\ln 2}$

④ $\dfrac{5}{\ln 5}$ ⑤ $\dfrac{e^2}{2}$

선지 분석

②, ③, ④는 순서대로 $\dfrac{3}{\ln 3}$, $\dfrac{4}{\ln 4}$, $\dfrac{5}{\ln 5}$이고, ①과 ⑤는 연관이 없다.

문항 해설

조건 (가)의 숫자 2가 힌트이다. 2를 이용해 무언가 조건을 조합할 거면 선지를 고를 때에도 2가 있는 걸 골라보자.

찍을만한 선지

③

실제 답

③

45

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x^4-1$이다.
(나) $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2 g'(x)dx=120$

$\int_{-1}^{1}x^3 f(x)dx$의 값은?

① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

선지 분석

공차가 3인 등차수열이다.

문항 해설

우리는 어차피 120이라는 숫자을 활용하여 답을 내야 한다. 만약 구해야 하는 $\int_{-1}^{1}x^3 f(x)dx$에서 x^3을 구하기 위해 조건 (가)를 미분했다면 $4x^3$이 나온다. 그렇다면 x^3을 만들기 위해 4로 나눠야겠다는 판단이 들었으면 $120 \div 4 = 30$을 구할 수 있다. 30과 가장 연관 있는 수는 15이다.

찍을만한 선지

②

실제 답

②

46

함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0, 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은?

함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 $$\int_{-1}^{1}h(x)dx=2,\ \int_{-1}^{1}xh(x)dx=-\frac{1}{32}$$ 이다.

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

선지 분석

공차가 2인 등차수열이다.

문항 해설

문제에 있는 수 $-\frac{1}{32}$를 보고 2의 거듭제곱으로 찍어야겠다는 생각을 해야한다.

찍을만한 선지

①, ⑤

실제 답

⑤

02. 어쩔 수 없다. 단순 찍기

02단원은 정말 말 그대로 찍기이다. 01단원을 보고 오면 알겠지만
'생각보다 아무 생각없이 확률로 문제를 찍는 것이 아니네?'
라는 생각을 했을 것이다.

하지만 02단원은 그와 다르다. 정말 동물적인 감각으로 찍는데에 초점을 맞춘다. 즉, 여기는 순전히 운의 영역이다.

하나 더 강조해야할 것이 있다. 만약 01단원을 통해 찍고 싶은 답과 02단원을 통해 찍고 싶은 답이 충돌한다고 치자. 그러면 무조건 01단원이 먼저이다.

선지의 공차가 $\frac{1}{2}$일 때

선지의 공차가 $\frac{1}{2}$인 상황을 왜 찍을 수 있을까? 이 질문에 답을 하기 전에 일반적 분수꼴 선지부터 알아야 한다. 예전에 내가 한 번 해본 생각이 있다. '만약 출제자가 등차수열로 답을 구성한다면, 공차를 웬만해서 정수로 주지 않을까?'

무슨 말이냐면 예를 들어 실제 답이 $\frac{13}{6}$이라고 해보자.

그렇다면 상식적으로 선지의 구성을

① $\frac{13}{6}$

② $\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$

③ $\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$

④ $\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$

⑤ $\frac{17}{6}$

으로 주는 것이 타당했다고 생각했다. 굳이 이상한 공차 $\frac{1}{3}$을 들고 와서 선지를 구성할 이유가 없다고 생각하여 최대한 약분이 덜 된 선지를 고르자는 것이 나의 기준이었다. 하지만 수많은 임상실험을 거친 결과 타당성이 50% 정도로 떨어진다는 것을 알고 깊게 쓰지는 않는다. 하지만 만약 약분이 덜 된 선지가 괴상한 숫자라든지 전혀 답이 될 것 같지 않는 숫자가 아니고서는 나는 최대한 약분이 덜 된 선지를 고르곤 한다.

그 중 공차가 $\frac{1}{2}$인 선지는 좀 더 효용성이 있다고 생각이 들었다. 나의 기준은 이렇다.

- 분수와 정수 중 빈도가 더 높은 쪽을 고르자

  공차가 $\frac{1}{2}$이므로 다섯 개 중 $3:2$로 나뉘게 될 것이다. 이 중 3인 쪽을 고르면 된다. 물론 01단원에서 배운 것처럼 2인 쪽에 인수 논리로 답이 될 수 있는 것이 있다? 그럼 당연히 01단원이 먼저이다.

단, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, $\frac{5}{2}\pi$ 같은 선지 또한 공차가 $\frac{1}{2}$이라 한다.

분석한 기출문제 71문항 중 49문항에 성립

근데 이 파트는 신뢰를 많이 하지는 말고 소신대로 해라

47

수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}-2a_n-2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right)\\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right)\\ -2a_n+2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5+a_6=0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$
④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

선지 분석

공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다.

문항 해설

정수 개수보다 분수 개수가 더 많으므로 ①, ③, ⑤ 중에 찍자.

찍을만한 선지

①, ③, ⑤

실제 답

①

48

양수 t에 대하여 $\log t$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여

$$f(t)=9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-n$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 $f(t)$의 합을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은?

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5
④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

선지 분석

공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다.

문항 해설

분수 개수보다 정수 개수가 더 많으므로 ①, ③, ⑤ 중에 찍자.

찍을만한 선지

①, ③, ⑤

실제 답

①

49

공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

> (가) $a_5 \times a_7 < 0$
>
> (나) $\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$　② 11　③ $\frac{23}{2}$

④ 12　⑤ $\frac{25}{2}$

선지 분석

공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다.

문항 해설

정수 개수보다 분수 개수가 더 많으므로 ①, ③, ⑤ 중에 찍자.

찍을만한 선지

①, ③, ⑤

실제 답

①

50

최고차항의 계수가 1이고 $f(0) = \frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < -2) \\ f(x) + 8 & (x \geq -2) \end{cases}$$

라 하자. 방정식 $g(x) = f(-2)$의 실근이 2뿐일 때, 함수 $g(x)$의 극댓값은?

① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4

④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5

선지 분석

공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다.

문항 해설

분수 개수보다 정수 개수가 더 많으므로 ①, ③, ⑤ 중에 찍자.
또한 삼차함수는 항상 하나의 근을 가지므로 삼차함수의 함수값은 소인수분해가 된다고 기대할 수 있다. 만약 $g(x)$의 극댓값이 $f(x)$에 나온다면 선지 중 소수가 있는 ②, ⑤는 걸러야 한다. 만약 $g(x)$의 극댓값이 $f(x)+8$에서 나온다면 선지에서 모두 8을 뺀 후 관찰해야 한다.

① -5　② $-\frac{9}{2}$　③ -4　④ $-\frac{7}{2}$　⑤ -3

여기서도 소수인 ①, ④가 걸러진다.

찍을만한 선지

③ (물론 $f(x)$일 때와 $f(x)+8$일 때의 교집합이 아니므로 ①, ⑤가 둘 다 아니라고 할 수는 없지만 느낌상..)

실제 답

③

(소)인수분해

인수분해 혹은 소인수분해란 어떠한 식이나 수를 곱으로 표현하는 것을 의미한다. 예를 들어, $12=2^2\times3$이다.

이처럼 소수의 곱으로 표현되는 수는 합성수이며 이는 소인수분해가 된다. 즉, 답의 꼴이 곱이라면 최대한 소수는 배제하고 합성수를 고르는 것이 답과 가까워지는 길이다.

01단원의 인수논리와 비슷하다고 생각하면 된다.

단, 소수 중 2와 3는 제외한다. 자주 나오기에.

51

원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=\frac{1}{2}t^2-3t,\ v_2(t)=-\frac{1}{2}t^2+t$$

이다. 다음은 두 점 P, Q가 출발 후 처음으로 만날 때까지 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값을 구하는 과정이다.

> 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면
>
> $$x_1(t)=\frac{1}{6}t^3-\frac{3}{2}t^2$$
>
> $$x_2(t)=\boxed{\text{(가)}}$$
>
> 출발 후 처음으로 두 점 P, Q가 만나는 시각은 $t=6$이다.
> $0<t\le6$에서 두 점 P, Q 사이의 거리를 $l(t)$라 하면
> $l(t)$는 $t=\boxed{\text{(나)}}$ 일 때, 극대이면서 최대이므로 $l(t)$의
> 최댓값은 $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(t)$라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b라 할 때, $\dfrac{a\times b}{f(2)}$의 값은?

① 60 ② 62 ③ 64
④ 66 ⑤ 68

선지 분석

공차가 2인 등차수열이다.

문항 해설

답의 꼴이 전부 곱과 몫으로 이루어져 있다. 즉, 답은 최대한 합성수가 되어야한다.

찍을만한 선지

①, ③

실제 답

③

52

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} \ln|f(x)| & (f(x)\neq 0) \\ 1 & (f(x)=0) \end{cases}$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은?

> (가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고,
> 　　함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소이다.
> (다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① $\ln\frac{13}{27}$　② $\ln\frac{16}{27}$　③ $\ln\frac{19}{27}$　④ $\ln\frac{22}{27}$　⑤ $\ln\frac{25}{27}$

〈확통이, 기하도 필독! - 미적분이라고 빼지 말기〉

선지 분석

분자가 공차가 3인 등차수열이다.

문항 해설

$g(x)$의 극솟값이라 해봤자 $\ln f(a)$일 것이기 때문에 결국 $\ln$을 지우면 선지들의 분수는 $f(x)$의 함숫값이다. $f(x)$는 삼차함수이므로 무조건 인수로 하나는 가진다. 즉, $f(x)$의 함숫값은 소수가 아닌 소인수가 많은 합성수로 찍어야 답이 될 확률이 높다.

13과 19는 일단 거르자. 22도 소수는 아니지만 11이 거슬리므로 거르자. 즉, 우리가 선택해야 하는 수는 16 또는 25이다.

(참고 : ln은 로그이다.)

찍을만한 선지

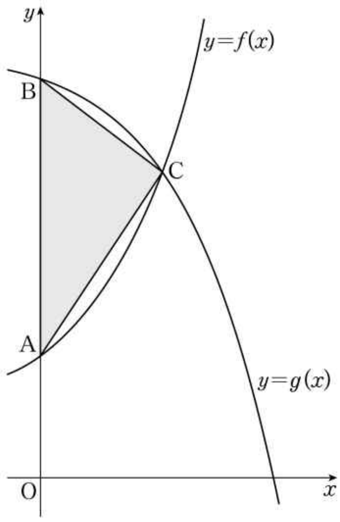
②, ⑤

실제 답

⑤

53

그림과 같이 두 함수 $f(x)=2^x+1$, $g(x)=-2^{x-1}+7$의 그래프가 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?



① $\frac{5}{2}$　② 3　③ $\frac{7}{2}$　④ 4　⑤ $\frac{9}{2}$

선지 분석

공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다.

문항 해설

삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times$밑변$\times$높이든, $\frac{1}{2}ab\sin\theta$이든 결국 꼴은 곱이다. 따라서 삼각형의 넓이는 최대한 합성수여야 하므로 ①, ③이 지워진다. 또한 공차가 $\frac{1}{2}$일 때, 분수가 정수보다 개수가 많으므로 분수 중에 찍어야 한다.

찍을만한 선지

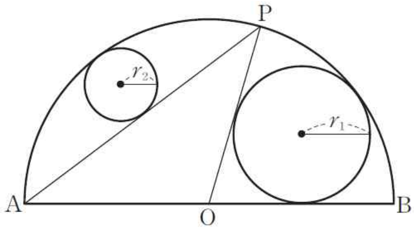
⑤

실제 답

⑤

54

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 반원이 있다. 호 AB 위에 점 P를 $\cos(\angle \mathrm{BAP})=\frac{4}{5}$가 되도록 잡는다. 부채꼴 OBP에 내접하는 원의 반지름의 길이가 r_1, 호 AP를 이등분하는 점과 선분 AP의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이가 r_2일 때, r_1r_2의 값은?



① $\frac{3}{40}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{1}{8}$

④ $\frac{3}{20}$ ⑤ $\frac{7}{40}$

선지 분석

분모를 40으로 통분하면 분자가 공차가 1인 등차수열이다..

문항 해설

두 반지름의 곱을 물어봤으므로 답은 최대한 합성수여야 한다. 따라서 ⑤는 선택하면 안된다. $\frac{1}{8}$은 약분이 너무 많이 됐었다. 약분이 덜 된 것 중에 찍고 싶으면 ①을 찍어야 한다. (물론 약분 유무로 선택하는건 소신대로 하기)

찍을만한 선지

①

찍지 않아야할 선지

⑤

실제 답

①

55

직선 $x=k$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2(8-x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은? (단, $0<k<8$)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

선지 분석

공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다.

문항 해설

k의 곱을 물어봤으므로 우리는 소수인 선지를 최대한 배제해야한다. 따라서 일단 ⑤는 안된다.

만약 이 문제를 못 풀었다면 아마 절댓값을 씌우지 않았기 때문일 것이다. $\log_2 k-\log_2(k-8)=2$에서 k^2-8k+4만을 이용하여 $k_1k_2=4$만 얻었다고 해보자. 4라는 답이 선지에 없으므로 k의 값이 더 있다는 의미가 된다. 남은 k의 값의 곱을 K라 한다면 답은 $4K$꼴이므로 짝수꼴이어야 한다. 따라서 나라면 유일한 짝수 값인 ④를 찍지 않았을까 싶다.

찍을만한 선지

④

실제 답

②

함수 $f(x)=\dfrac{3^x}{3^x+3}$에 대하여 점 (p, q)가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이면 실수 p의 값과 관계없이 점 $(2a-p, a-q)$도 항상 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이다. 다음은 상수 a의 값을 구하는 과정이다.

> 점 $(2a-p, a-q)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
>
> $\dfrac{3^{2a-p}}{3^{2a-p}+3}=a-\boxed{\text{(가)}}$ $\cdots$ ㉠
>
> 이다. ㉠은 실수 p의 값에 관계없이 항상 성립하므로
>
> $p=0$일 때, $\dfrac{3^{2a-p}}{3^{2a-p}+3}=a-\dfrac{1}{4}$ $\cdots$ ㉡
>
> 이고,
>
> $p=1$일 때, $\dfrac{3^{2a-p}}{3^{2a-p}+\boxed{\text{(나)}}}=a-\dfrac{1}{2}$ $\cdots$ ㉢
>
> 이다. ㉡, ㉢에서
>
> $(3^{2a}+3)(3^{2a}+\boxed{\text{(나)}})=24\times 3^{2a}$
>
> 이므로 $a=\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=\boxed{\text{(다)}}$
>
> 이다. 이때, ㉢에서 좌변이 양수이므로 $a>\dfrac{1}{2}$이다.
>
> 따라서 $a=\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $g(p)$라 하고 (나)와 (다)에 알맞은 수를 각각 m, n이라 할 때, $(m-n)\times g(2)$의 값은?

① 4　　② $\dfrac{9}{2}$　　③ 5　　④ $\dfrac{11}{2}$　　⑤ 6

선지 분석

공차가 $\dfrac{1}{2}$인 등차수열이다.

문항 해설

답의 꼴이 곱이다. 따라서 답은 합성수일 가능성이 매우 높다.

(③, ④ 탈락) 선지가 공차가 $\dfrac{1}{2}$인 등차수열인데 정수의 개수가 더 많으므로 ①, ③, ⑤ 중에 찍자. 전체적으로 ①, ⑤ 중에 찍으면 될 것 같다.

찍을만한 선지

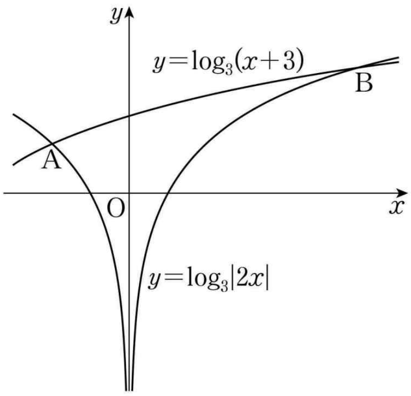
①, ⑤

실제 답

⑤

57

함수 $y=\log_3|2x|$의 그래프와 함수 $y=\log_3(x+3)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 직선 AB와 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.)



① $\frac{13}{2}$　② 7　③ $\frac{15}{2}$

④ 8　⑤ $\frac{17}{2}$

선지 분석

공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다.

문항 해설

삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times$밑변$\times$높이든, $\frac{1}{2}ab\sin\theta$이든 결국 꼴은 곱이다. 따라서 삼각형의 넓이는 최대한 합성수여야 한다. 또한 선지의 공차가 $\frac{1}{2}$일 때, 분수의 개수가 더 많으므로 ①, ③, ⑤ 중에 찍어야 한다. ①, ③, ⑤ 중에 합성수인 것은 ③뿐이다.

찍을만한 선지

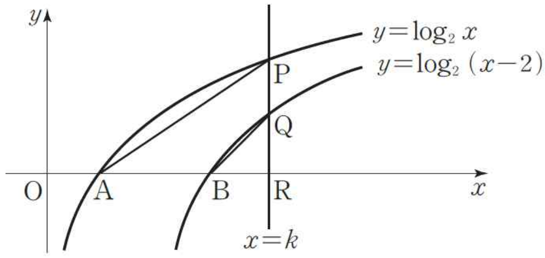
③

실제 답

⑤ (근데 이런걸 아쉬워 하지는 말자)

58

그림과 같이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 직선 $x=k$ $(k>3)$가 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, x축과 만나는 점을 R라 하자. 점 Q가 선분 PR의 중점일 때, 사각형 ABQP의 넓이는?



① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$

④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

선지 분석

공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다.

문항 해설

사각형의 넓이도 대부분 밑변$\times$높이로 이루어져 있지만 위 사각형은 보면 알겠지만 그냥 일반적인 사각형이다. 따라서 이런 상황에서는 사각형의 넓이가 합성수일 것이라고 섣불리 판단하는 것은 힘들다. 하지만 적어도 선지의 공차가 $\frac{1}{2}$인 상황에서 분수의 개수가 더 많으므로 ①, ③, ⑤ 중에 찍어야 한다.

찍을만한 선지

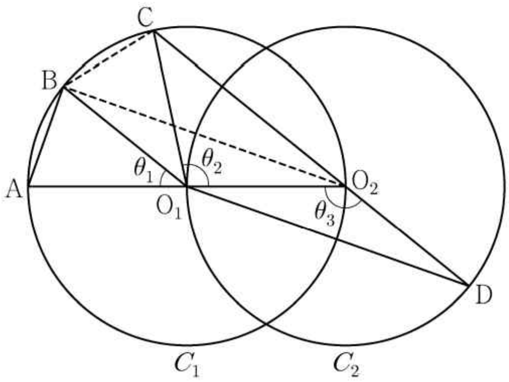
①, ③, ⑤

실제 답

③

59

두 점 $\mathrm{O_1}, \mathrm{O_2}$를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{O_1O_2}}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$와 세 점 C, $\mathrm{O_2}$, D가 각각 한 직선 위에 있다.
이때 $\angle \mathrm{BO_1}A = \theta_1$, $\angle \mathrm{O_2O_1C} = \theta_2$, $\angle \mathrm{O_1O_2D} = \theta_3$라 하자.



다음은 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{O_1D}} = 1 : 2\sqrt{2}$이고 $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$일 때, 선분 AB의 길이와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle \mathrm{CO_2O_1} + \angle \mathrm{O_1O_2D} = \pi$이므로 $\theta_3 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta_3}{2}$이고
>
> $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$에서 $2\theta_1 + \theta_2 = \pi$이므로 $\angle \mathrm{CO_1B} = \theta_1$이다.
>
> 이때 $\angle \mathrm{O_2O_1B} = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$이므로
>
> 삼각형 $\mathrm{O_1O_2B}$와 삼각형 $\mathrm{O_2O_1D}$는 합동이다.
>
> $\overline{\mathrm{AB}} = k$라 할 때 $\overline{\mathrm{BO_2}} = \overline{\mathrm{O_1D}} = 2\sqrt{2}k$이므로
>
> $\overline{\mathrm{AO_2}} = \boxed{\text{(가)}}$ 이고, $\angle \mathrm{BO_2A} = \dfrac{\theta_1}{2}$이므로
>
> $\cos\dfrac{\theta_1}{2} = \boxed{\text{(나)}}$ 이다.
>
> 삼각형 $\mathrm{O_2BC}$에서 $\overline{\mathrm{BC}} = k$, $\overline{\mathrm{BO_2}} = 2\sqrt{2}k$, $\angle \mathrm{CO_2B} = \dfrac{\theta_1}{2}$
>
> 이므로 코사인법칙에 의하여 $\overline{\mathrm{O_2C}} = \boxed{\text{(다)}}$이다.
>
> $\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{O_2D}} + \overline{\mathrm{O_2C}} = \overline{\mathrm{O_1O_2}} + \overline{\mathrm{O_2C}}$이므로
>
> $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{CD}} = k : \left(\dfrac{\boxed{\text{(가)}}}{2} + \boxed{\text{(다)}}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p) \times g(p)$의 값은?

① $\dfrac{169}{27}$ ② $\dfrac{56}{9}$ ③ $\dfrac{167}{27}$

④ $\dfrac{166}{27}$ ⑤ $\dfrac{55}{9}$

선지 분석

분모를 27로 통분하면 분자가 등차수열이다.

문항 해설

답의 꼴이 곱이다. 따라서 답은 합성수일 가능성이 매우 높다.
따라서 ③은 일단 제끼자. 또한 ④도 $166 = 83 \times 2$이지만 83은 소수이므로 과감히 제낀다. 최대한 인수가 많은 선지를 고르는 것이 확률이 높다.
그럼 이제 ①, ②, ⑤ 중에 하나를 골라야 하는데 솔직히 말해서 답은 누가 봐도 ②이다. (사실 누가 봐도 ②는 아니고 문제를 많이 풀어봤다면 보이는 것들이 있다. 55도 11 때문에 거르고 싶어야 하고, 169는 소수인 13의 제곱이므로 별로 고르기 싫다.)

찍을만한 선지

②

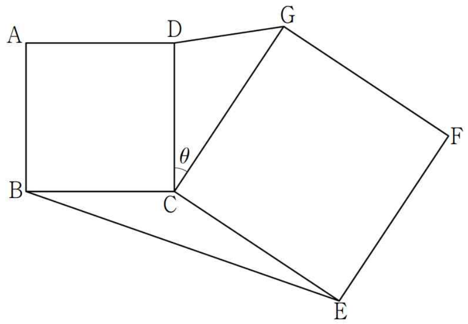
실제 답

②

60

그림과 같이 평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD와 한 변의 길이가 4인 정사각형 CEFG가 있다.

$\angle \mathrm{DCG} = \theta (0 < \theta < \pi)$라 할 때, $\sin\theta = \frac{\sqrt{11}}{6}$이다. $\overline{\mathrm{DG}} \times \overline{\mathrm{BE}}$의 값은?



① 15 ② 17 ③ 19
④ 21 ⑤ 23

선지 분석

공차가 3인 등차수열이다.

문항 해설

구하는 것은 $\overline{\mathrm{DG}} \times \overline{\mathrm{BE}}$. 즉, 곱의 형태이다. 따라서 답의 꼴은 최대한 소인수분해가 되는 합성수여야 한다. $\overline{\mathrm{DG}}$와 $\overline{\mathrm{BE}}$의 길이비를 봐보자. 만약 답이 15라면 3×5로 추정할 수 있고, 21이라면 3×7이라고 할 수 있을 것 같다. $\overline{\mathrm{BE}}$는 $\overline{\mathrm{DG}}$의 두 배가 넘는 것 같다. 따라서 15보다는 21일 확률이 더 높다. 하지만 이렇게 하면 안 되는 이유가 하나 있다. 바로 $\overline{\mathrm{DG}}$의 길이가 3이 아니기 때문이다. 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 3인데, $\overline{\mathrm{DG}}$는 3보다 확실히 작다. 따라서 3×5나 3×7로 추정할 수는 없다. 그래도 합성수를 찍자.

찍을만한 선지

①, ④

찍으면 안되는 선지

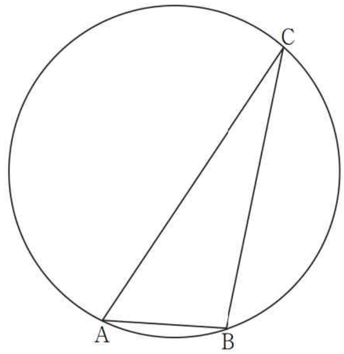
②, ③, ⑤

실제 답

①

61

그림과 같이 원 C에 내접하고 $\overline{\mathrm{AB}} = 3$, $\angle \mathrm{BAC} = \frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$일 때, 원 C 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.)



① $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{34\sqrt{3}}{3}$ ③ $12\sqrt{3}$
④ $\frac{38\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{40\sqrt{3}}{3}$

선지 분석

분모를 3으로 통분하면 분자가 공차가 2인 등차수열이다.

문항 해설

삼각형의 넓이는 곱으로 이루어져 있다. 일단 ③은 혼자 분수가 아니어서 찍기 싫다. ②와 ④는 각각 34와 38이라는 숫자 때문에 찍기 싫다. 34를 만드려면 17이, 38을 만드려면 19가 필요한데 대체 어디에서 17과 19가 나오겠는가. 17하고 19가 자주 나오는 숫자 같나? 남은 건 ① 또는 ⑤인데... 솔직히 40보다는 32라는 숫자가 더 관심이 간다.

찍을만한 선지

①, ⑤

찍으면 안되는 선지

②, ③, ④

실제 답

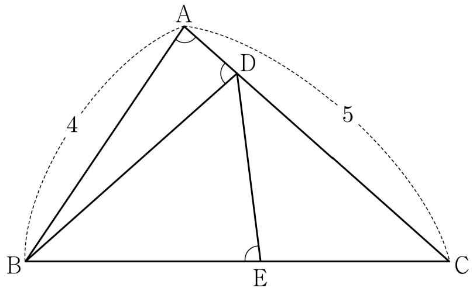
①

62

그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAD=\angle BDA=\angle BED$$

일 때, 선분 DE의 길이는?



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$

④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

선지 분석

분모를 6으로 통분해주면 분자가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

만약 $\overline{DE}$의 길이를 구하기 위해 D에서 선분 BC에 수선의 발을 내리고 $\overline{DE}=8k$, $\overline{EM}=k$라 했다면 $\overline{DE}=8k$이므로 8의 배수여야 한다. (단, M은 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발이다. 아직 $\overline{DB}=4$인 것을 구하지 못 해서 M이 $\overline{BC}$의 중점인 것을 모르더라도 상관없다.)

찍을만한 선지

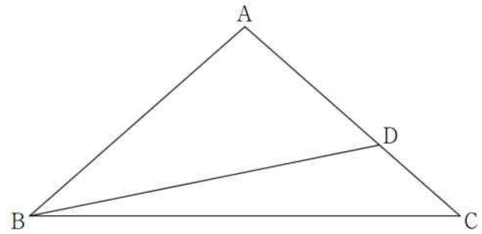
③

실제 답

③

63

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 선분 AC를 5 : 3으로 내분하는 점을 D라 하자. $2\sin(\angle ABD)=5\sin(\angle DBC)$일 때, $\frac{\sin C}{\sin A}$의 값은?



① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{7}{11}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{9}{13}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

선지 분석

① $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ ② $\frac{7}{11}$ ③ $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$ ④ $\frac{9}{13}$ ⑤ $\frac{5}{7}=\frac{10}{14}$

분자와 분모가 모두 공차가 1인 등차수열이다.

즉, 선지만 보고 찍기 매우 어렵다. 규칙따윈 개나 줘버린 구성이다.

문항 해설

구하는 것은 $\frac{\sin C}{\sin A}$인데 몫의 꼴이다. 몫도 결국은 곱으로 표현이 가능하다. 따라서 $\frac{\sin C}{\sin A}$ 또한 소수는 최대한 피하고 합성수로 골라야 한다. 단, 이 문제의 경우 소수라고 5를 제외해서는 안된다. 그 이유는 문제에 5라는 숫자가 있기 때문이다. 하지만 일단 ②, ④, ⑤는 제외하고 찍어야 한다. 솔직히 나는 ③보다는 ①이 끌린다. 문제에 나와있는 숫자를 이용하는 것이 나의 기준이기 때문이다.

찍을만한 선지

①, ③

찍으면 안되는 선지

②, ④, ⑤

실제 답

③

64

공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3+a_5=0,\ \sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=30$$

일 때, a_9의 값을 구하시오.

문항 해설

$a_3+a_5=0$에서 $a_4=0$이다. 따라서 $\{a_n\}=k(n-4)$이다.

$a_9=5k$이므로 답은 5의 배수여야 한다. 물론 주관식을 이렇게 풀어 맞는 것도 하늘의 별따기이다. 하지만 앞에서 이미 강조했듯이 답을 52 따위로 찍어 절대 이루어질 수 없는 찍맞을 기도하지 말자는 것이다.

답이 될 만한 수

5의 배수 (최대한 한 자리 수에서 두 자리 수에서 찍기)

실제 답

25

65

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고,

$$a_{n+1}=\frac{3a_n-1}{4a_n-1}\ (n\ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

모든 자연수 n에 대하여

$$4a_{n+1}-1=4\times\frac{3a_n-1}{4a_n-1}-1=2-\frac{1}{4a_n-1}$$

이다. 수열 $\{b_n\}$을

$$b_1=1,\ b_{n+1}=(4a_n-1)b_n\ (n\ge 1)\ \cdots\cdots(*)$$

이라 하면,

$\vdots$

$b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n$이다.

즉, $\{b_n\}$은 등차수열이므로 $(*)$에 의하여

$b_n=$ $\boxed{(가)}$ 이고, $a_n=$ $\boxed{(나)}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(14)\times g(5)$의 값은?

① 15　② 16　③ 17　④ 18　⑤ 19

선지 분석

공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

답의 꼴이 곱이다. 따라서 답은 합성수일 가능성이 매우 높다.
따라서 ①, ②, ④ 중에서 골라야 한다.

찍을만한 선지

①, ②, ④

실제 답

①

66

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = -\frac{5}{3}$이고

$$a_{n+1} = -\frac{3a_n+2}{a_n} \ (n \ge 1) \ \cdots\cdots (*)$$

다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

$(*)$에서

$$a_{n+1}+2 = -\frac{a_n + \boxed{(가)}}{a_n} \ (n \ge 1)$$

이다. 여기서

$$b_n = \frac{1}{a_n+2} \ (n \ge 1)$$

이라 하면 $b_1 = 3$이고

$$b_{n+1} = 2b_n - \boxed{(나)} \ (n \ge 1)$$

이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$$b_n = \boxed{(나)} \ (n \ge 1)$$

이므로

$$a_n = \frac{1}{\boxed{(다)}} - 2 \ (n \ge 1)$$

이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (다)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p \times q \times f(5)$의 값은?

① 54 ② 58 ③ 62
④ 66 ⑤ 70

선지 분석

공차가 4인 등차수열이다.

문항 해설

답의 꼴이 곱이다. 따라서 답은 합성수일 가능성이 매우 높다.
따라서 소인수의 개수가 많은 ①, ④, ⑤ 중에서 골라야 한다.

찍을만한 선지

①, ④, ⑤

실제 답

④

67

두 함수

$$f(x) = \begin{cases} ax & (x < 1) \\ -3x+4 & (x \ge 1) \end{cases}, \ g(x) = 2^x + 2^{-x}$$

에 대하여 합성함수 $(g \circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

선지 분석

공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

곱의 값을 구하라고 하였으므로 소수는 최대한 피해야 한다.

찍으면 안 되는 선지

①

실제 답

⑤

68

함수 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$와 양의 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $a\times g'(a)$의 값은?

① $-\frac{\sqrt{e}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{e}}{4}$ ③ $-\frac{\sqrt{e}}{5}$
④ $-\frac{\sqrt{e}}{6}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{e}}{7}$

선지 분석

분모가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

곱의 값을 구하라고 하였으므로 소수는 최대한 피해야 한다.

찍으면 안 되는 선지

③, ⑤

실제 답

②

69

그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$$\overline{AB}=\overline{BC}=2,\ \overline{AD}=3,\ \angle BAD=\frac{\pi}{3}$$

이다. 두 직선 AD, BC의 교점을 E라 하자.

(그림 생략)

다음은 $\angle AEB=\theta$일 때, $\sin\theta$의 값을 구하는 과정이다.

> 삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하면
> $\overline{CD}=$ (가)
> 이다. 삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서
> $\angle AEB$는 공통, $\angle EAB=\angle ECD$
> 이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다.
> 이를 이용하면
> $\overline{ED}=$ (나)
> 이다. 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면
> $\sin\theta=$ (다)
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $(p+q)\times r$의 값은?

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{9\sqrt{3}}{14}$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{14}$

선지 분석

분모를 14로 통분하면 분자가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

곱의 값을 구하라고 하였으므로 소수는 최대한 피해야 한다. 분모에 모두 7이 있으므로 7을 제외해서는 안된다.

찍으면 안 되는 선지

④, ⑤

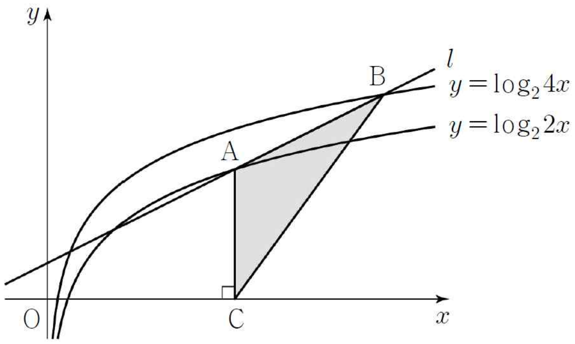
실제 답

④

70

기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선 l이 곡선 $y=\log_2 2x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 A라 하고, 직선 l이 곡선 $y=\log_2 4x$와 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$일 때, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발 C에 대하여 삼각형 ACB의 넓이는?

① 5　② $\frac{21}{4}$　③ $\frac{11}{2}$
④ $\frac{23}{4}$　⑤ 6



선지 분석

분모를 4로 통분하면 분자가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

삼각형의 넓이는 곱으로 이루어진다. 따라서 11과 23은 애초에 고르지 말자!!! $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$를 통해 삼각형의 높이가 4라는 것을 구했다고 치자. 그러면 삼각형 ABC의 넓이는 $S=\frac{1}{2}\times 4\times \overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{AC}}$이다. 따라서 답의 꼴은 짝수여야 한다.

찍을만한 선지

⑤

실제 답

⑤

71

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x+2) & (x<0) \\ \int_0^x tf(t)dt & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 실수 a에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|g(x)-g(a)|$$

라 할 때, 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은?

① $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$　② $-\frac{7\sqrt{3}}{6}$　③ $-\sqrt{3}$
④ $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$　⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

선지 분석

분모를 6로 통분하면 분자가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

곱의 값을 구하라고 하였으므로 소수는 최대한 피해야 한다. 홀로 분수가 아닌 ③을 제외하자. 7과 5 또한 제외하자.

찍을만한 선지

①, ⑤

실제 답

①

자연수 n의 합

~를 만족하는 모든 n의 합을 구하라고 한다면

우리는 n들이 **연속된 자연수**라고 기대하고 답을 찍는다.

또한 n들이 나열되어 있을 때, 어떤 조건을 빠뜨려 답이 나오지 않는다면 구한 n들 중 몇 개를 제외해야 하는데 이때는 두 가지 방법을 이용한다.

1. n에 대한 범위가 있을 것이라고 생각하고 차례로 더한다.
2. n을 일정한 간격을 두고 추출하여 더한다.

글만으로는 이해하기 힘드니 문제에서 다시 설명해주겠다.

● 자연수 n의 합이 소수라면 연속된 두 자연수로만 나타내진다.

만약 연속된 홀수 개의 자연수의 합이라면 '등차중항×항의 개수'이므로 무조건 합성수이다. (항의 개수가 홀수이면 등차중항은 자연수이므로)

만약 연속된 짝수 개의 자연수의 합이라면 등차중항$\left(\frac{\text{자연수}}{2}\right)\times$항의 개수(짝수)이다. 즉, 합성수이다.

따라서 어떤 연속된 자연수의 합이 17이라면 연속된 두 자연수의 합$(8+9)$일 수밖에 없다.

비슷한 원리로 연속된 자연수의 합을 소인수분해 하였을 때, 소인수 중 홀수가 있다면 그 홀수가 항의 개수이고, 남은 소인수가 등차중항이다.

ex) $40=8\times5$: 8을 등차중항으로 하여 총 5개의 자연수

$6+7+8+9+10$

$14=2\times7$: 2를 등차중항으로 하여 총 7개의 자연수(X)

항의 개수가 짝수인 상태임. 연속된 두 자연수를 더해 7이 나오는 상황을 구한 후, $\frac{3+4}{2}\times4$로 봐야함.$(2+3+4+5)$

72

자연수 n에 대하여 $2^{\frac{1}{n}}=a$, $2^{\frac{1}{n+1}}=b$라 하자. $\left\{\frac{3^{\log_2 ab}}{3^{(\log_2 a)(\log_2 b)}}\right\}^5$이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은?

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

선지 분석

공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

가장 눈에 띄는 수는 $15(1+2+3+4+5)$

① $2+3+4+5$

② $1+2+3+4+5$

③ 없음

④ $8+9$

⑤ $5+6+7$

찍지 않아야할 선지

③

실제 답

①

73

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키고,

$$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+1\ \left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\right)$$

이다. 자연수 n에 대하여 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수가 5가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은?

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

선지 분석

공차가 2인 등차수열이다.

문항 해설

① $3+4$

② $2+3+4$

③ $5+6$

④ $6+7$

⑤ $1+2+3+4+5$

솔직히 이 중 $2+3+4$가 적절한 개수의 자연수를 더하는 것 같아서 가장 답스럽다.

찍을만한 선지

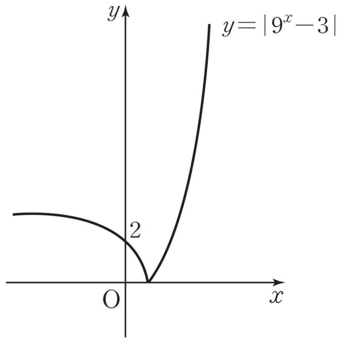
②

실제 답

②

74

좌표평면 위의 두 곡선 $y=\left|9^x-3\right|$과 $y=2^{x+k}$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 x_1, $x_2(x_1<x_2)$라 할 때, $x_1<0$, $0<x_2<2$를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은?



① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

선지 분석

공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

① 없음

② $2+3+4$

③ 없음

④ $5+6$

⑤ 없음

찍을만한 선지

②, ④

실제 답

②

75

2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = e^{x+1}\{x^2 + (n-2)x - n + 3\} + ax$$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 $g(n)$이라 하자.
$1 \le g(n) \le 8$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은?

① 43 ② 46 ③ 49
④ 52 ⑤ 55

선지 분석

공차가 3인 등차수열이다.

문항 해설

55가 1부터 10까지의 합이니 55를 기준으로 해보자.

⑤ 55 : $1+2+ \cdots +10$

④ 53 : $3+4+ \cdots +10$

③ 51 : $4+5+ \cdots +10$

② 49 : 더 이상 3만을 뺄 수 없음

① 46 : 더 이상 6만을 뺄 수 없음

또한 $n \ge 2$이므로 55도 안된다.

찍을만한 선지

③, ④

실제 답

④

76

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = \log_2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}}$$

이다. $\sum_{k=1}^{m} a_k$의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합은?

① 150 ② 154 ③ 158
④ 162 ⑤ 166

문항 해설

이 문제와 다음 문제는 앞선 문제와 다른 스타일의 문제이다. 문제를 풀려고 노력해서 최소한 어느 단계에 도착했을 때만 찍을 수 있는 방법이다. 해설을 보고 이해해보자.

만약 이 문제를 못 풀었다면 아마도 조건을 해석하는 과정에서 '$\log_2 \frac{2^{m+1}}{m+2} = 200$ 이하의 짝수'가 아닌 '$\log_2 \frac{2^{m+1}}{m+2} = 200$ 이하의 자연수'로 해석하여서 답이 나오지 않았을 것이다. 만약 후자로 계산했다면 m이 다음과 같이 나온다. $m = 2,\ 6,\ 14,\ 30,\ 62,\ 126$
분명히 무언가 조건을 빠뜨려 m의 합이 나오지 않는 것이다. 이럴 때에는 두 가지 중에 하나로 선택하자.

① m에 대한 범위가 있다고 생각하여 m을 순서대로 더하기
② m을 하나씩 건너뛰고 더하기(이 문제를 통해 배운 것)

①의 방법으로 m의 합을 조합해보자.

- $2 = 2$
- $2 + 6 = 8$
- $2 + 6 + 14 = 22$
- $2 + 6 + 14 + 30 = 52$
- $2 + 6 + 14 + 30 + 62 = 114$
- $2 + 6 + 14 + 30 + 62 + 126 = 240$

선지에 답이 전혀 없으므로 뒤에서부터도 더해보자.

- $126 = 126$
- $126 + 62 = 188$ (이미 가장 큰 선지보다 값이 커졌다.)

m을 순서대로 더했을 때 답이 나오지 않으므로 ②의 방법을 시도해보자.

- $2 + 14 + 62 = 78$
- $6 + 30 + 126 = 162$

따라서 답은 162이다.

찍을만한 선지

④

실제 답

④

77

첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은?

(가) $|a_m|=|a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52

④ 56 ⑤ 60

문항 해설

조건 (가)를 풀어 $d=2$, 6, 10, 18, 30을 얻은 것부터 시작하자. 조건 (나)를 해결하지 못 했을 때, 찍을 수 있는 방법이다. 먼저 d의 값들은 앞에서부터 차례로 더해보자.

$2=2$

$2+6=8$

$2+6+10=18$

$2+6+10+18=36$

$2+6+10+18+30=76$

전부 선지에 답이 없다. 그러면 뒤에서부터 차례로 더해보자.

$30=30$

$30+18=48$ **(오!! 있다.!!)**

$30+18+10=58$ (이 이후로는 합이 60보다 커짐)

혹시 모르니 이전 문제처럼 한 칸씩 띄어서 더해도 보자.

$2+10+30=42$

$6+18=24$

역시나 둘 다 답이 되지 않으므로 48을 선택하면 되겠다.

나는 이렇게 해서 애초에 조건 (나)를 해석하지도 않고 답을 맞췄다. 이렇게 답이 나올 것이라는 확신이 있기 때문에 찍기보다는 풀어서 다른 문제를 풀 시간을 아꼈다.

찍을만한 선지

②

실제 답

②

주관식 찍기

뭐? 주관식을 찍을 수 있다고?

당연히 못 찍는 것이 당연하다. 하지만 그 중, 매우 높은 확률로 주관식 답을 예측할 수 있는 유형이 있다.

구하는 것 × 상수

굉장히 쓸모있는 찍기 방법이다. 정말 수많은 모의고사와 기출들을 통해 거의 증명되었다고 봐도 무방하다.

삼각형 ABC의 넓이를 S라 할 때, $100S$의 값은?

이런 물음을 굉장히 많이 보았을 것이다. 만약 S가 $\dfrac{6}{5}$가 나왔다면, $p+q$를 물어봐도 괜찮을 것이다. 하지만 왜? $5S$도 아닌, $15S$도 아닌 정말 큰 숫자 100을 곱하게 했을까?

이런 100 같은 숫자를 앞으로 k라고 부르겠다. 또한 상수에 곱해지는 우리가 구한 값을 a라고 부르도록 하겠다.

우리가 주관식에서 찍을 수 있는 상황 중, k로 가능한 것은 다음이 전부이다.

$$k=10,\ 60,\ 100$$

이는 기출과 300회가 넘는 실전모의고사를 치르면서 꾸준히 확인해 봤던 내용이니 신뢰해도 괜찮다.

① $k=10$일 때 : 매우 높은 확률로 a는 $\dfrac{3}{2}$ 또는 $\dfrac{5}{2}$이다.

즉, 마킹할 답은 15 또는 25이며 그 중 15의 확률이 훨씬 더 높다.

② $k=60$일 때 : 우리가 선택할 수 있는 a의 값은 다음 뿐이다.

$a=\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{2}{4}$

따라서 마킹해야 하는 값은 $20,\ 40,\ 15,\ 30$이다. 왜인지는 모르겠으나 45를 마킹하는 일은 내 기억상으로 거의 없다.

③ $k=100$일 때 : 닥치고 셋 중 하나로 찍자.

$a=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{2}{4},\ \dfrac{3}{4}$

즉, $25,\ 50,\ 75$ 중 하나를 택해서 찍으면 된다.

지금까지 설명한 내용을 절대 오해해서는 안된다.

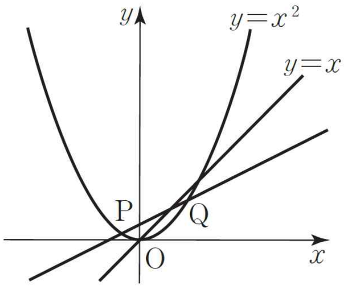
'아~ 저것 중에 찍으면 답이 나오겠구나~'

절대 아니다. 예외는 분명히 있으며, 그저 기출과 내가 풀었던 모의고사에서 높은 확률로 그래왔기에 답이 될 확률이 높다는 기댓값만 보고 찍는 것이다.

그저 출제자의 입장에서 '답의 꼴이 $\dfrac{1}{2}$이네~, 그럼 $100S$를 물어봐 볼까?' 하는 듯 하다.

78

곡선 $y=x^2$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a, a^2)$, $\mathrm{Q}(a+1, a^2+2a+1)$이 있다. 직선 PQ와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 $f(a)$라 할 때, $100\lim_{a\to0}f(a)$의 값을 구하시오.



문항 해설

$100a$의 값을 물어보았다. k의 값이 100인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 세 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

25, 50, 75

실제 답

50

79

이차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-x}{x-1}$일 때, $60\times f'(0)$의 값을 구하시오.

문항 해설

$60a$의 값을 물어보았다. k의 값이 60인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 네 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

15, 20, 30, 40

실제 답

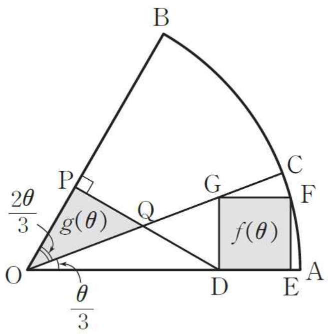
30

80

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점을 C라 하자. 변 DE가 선분 OA 위에 있고, 꼭짓점 G, F가 각각 선분 OC, 호 AC 위에 있는 정사각형 DEFG의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. 점 D에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 P, 선분 DP와 선분 OC가 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OQP의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta \times g(\theta)} = k$일 때, $60k$의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이고, $\overline{\mathrm{OD}} < \overline{\mathrm{OE}}$이다.)



문항 해설

$60a$의 값을 물어보았다. k의 값이 60인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 네 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

15, 20, 30, 40

실제 답

20

81

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x) = x$이다.
(나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서
$f(x+1) - xf(x) = ax + b$이다.

$60 \times \int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하시오.

문항 해설

$60a$의 값을 물어보았다. k의 값이 60인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 네 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

15, 20, 30, 40

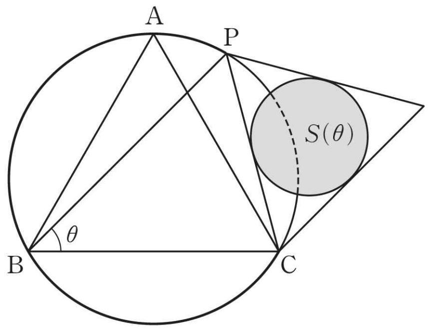
실제 답

110

82

그림과 같이 원에 내접하고 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 ABC 가 있다. 점 B 를 포함하지 않는 호 AC 위의 점 P 에 대하여 $\angle \mathrm{PBC} = \theta$ 라 하고, 선분 PC 를 한 변으로 하는 정삼각형에 내접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = a\pi$ 일 때, $60a$ 의 값을 구하시오.



문항 해설

$60a$의 값을 물어보았다. k의 값이 60인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 네 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

15, 20, 30, 40

실제 답

80

83

다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = x^3 - 2x^2 - 2x\int_0^1 f(t)dt$$

일 때, $f(0) = a$라 하자. $60a$의 값을 구하시오.

문항 해설

$60a$의 값을 물어보았다. k의 값이 60인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 네 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

15, 20, 30, 40

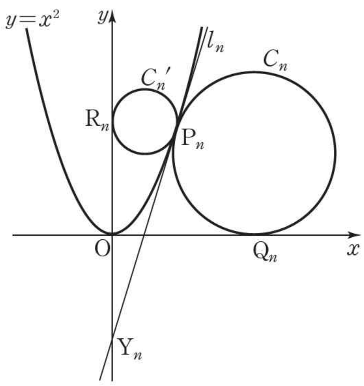
실제 답

40

84

그림과 같이 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(n, n^2)$에서의 접선을 l_n이라 하고, 직선 l_n이 y축과 만나는 점을 Y_n이라 하자. x축에 접하고 P_n에서 직선 l_n에 접한느 원을 C_n, y축에 접하고 점 P_n에서 직선 l_n에 접하는 원을 C_n'이라 할 때, 원 C_n과 x과의 교점을 Q_n, 원 C_n'과 y축과의 교점을 R_n이라 하자.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{OQ}_n}}{\overline{\mathrm{Y}_n\mathrm{R}_n}}=\alpha$라 할 때, 100α의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 Q_n의 좌표와 점 R_n의 y좌표는 양수이다.)



문항 해설

$100a$의 값을 물어보았다. k의 값이 100인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 세 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

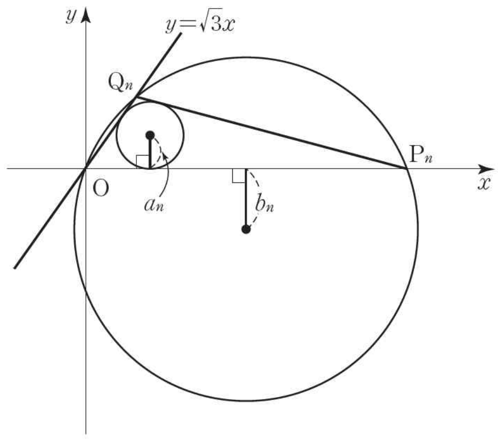
25, 50, 75

실제 답

50

85

좌표평면 위에 직선 $y=\sqrt{3}x$가 있다. 자연수 n에 대하여 x축 위의 점 중에서 x좌표가 n인 점을 P_n, 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위의 점 중에서 x좌표가 $\dfrac{1}{n}$인 점을 Q_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 외접원의 중심에서 x축까지의 거리를 b_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=L$이다. $100L$의 값을 구하시오.



문항 해설

$100a$의 값을 물어보았다. k의 값이 100인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 세 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

25, 50, 75

실제 답

50

86

$ab<0$인 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는 $f(x)=(ax+b)e^{-\frac{x}{2}}$이고 함수 $g(x)$는 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$이다. 실수 $k(k>0)$에 대하여 부등식

$$g(x)-k \geq xf(x)$$

를 만족시키는 양의 실수 x가 존재할 때, 이 x의 값 중 최솟값을 $h(k)$라 하자. 함수 $g(x)$와 $h(k)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 극댓값 α를 갖고 $h(\alpha)=2$이다.
(나) $h(k)$의 값이 존재하는 k의 값의 최댓값은 $8e^{-2}$이다.

$100(a^2+b^2)$의 값을 구하시오.

문항 해설

$100a$의 값을 물어보았다. k의 값이 100인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 세 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

25, 50, 75

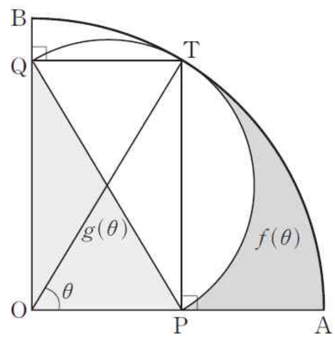
실제 답

125

87

그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 T에서 선분 OA와 선분 OB에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고 $\angle \mathrm{TOP}=\theta$라 하자. 점 P와 점 Q를 지름의 양끝으로 하고 점 T를 지나는 반원을 C라 할 때, 반원 C의 호 TP, 선분 PA, 부채꼴 OAT의 호 AT로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 OPQ의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta+f(\theta)}{g(\theta)}=a$일 때, $100a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)



문항 해설

$100a$의 값을 물어보았다. k의 값이 100인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 세 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

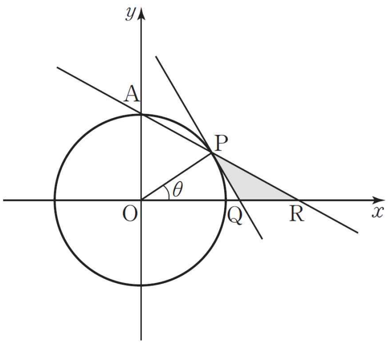
25, 50, 75

실제 답

50

88

좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, 점 A$(0, 1)$과 점 P를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 R라 하자. $\angle \mathrm{QOP} = \theta$라 하고 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라고 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = \alpha$일 때, 100α의 값을 구하시오. (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



문항 해설

$100a$의 값을 물어보았다. k의 값이 100인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 세 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

25, 50, 75

실제 답

50

89

그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 C를 잡고 $\angle \mathrm{BAC} = \theta$라 하자. 호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(\theta)$라 할 때,

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\tan \frac{\theta}{2} - f(\theta)}{\theta^2} = \alpha$$

이다. 100α의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)

문항 해설

$100a$의 값을 물어보았다. k의 값이 100인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 세 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

25, 50, 75

실제 답

25

90

정의역이 $\left\{x \middle| -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right\}$인 함수 $f(x)=\tan 2x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $100g'(1)$의 값을 구하시오.

문항 해설

$100a$의 값을 물어보았다. k의 값이 100인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 세 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

25, 50, 75

실제 답

25

91

양의 실수 k에 대하여 곡선 $y=k\ln x$와 직선 $y=x$가 접할 때, 곡선 $y=k\ln x$, 직선 $y=x$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 ae^2-be이다. $100ab$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.)

문항 해설

$100a$의 값을 물어보았다. k의 값이 100인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 세 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

25, 50, 75

실제 답

50

92

함수

$$f(x)=\begin{cases}-x-\pi\ (x<-\pi)\\ \sin x\quad(-\pi\le x\le\pi)\\ -x+\pi\ (x>\pi)\end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 부등식 $f(x)\le f(t)$를 만족시키는 실수 x의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 예를 들어, $g(\pi)=-\pi$이다. 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속일 때,

$$\int_{-\pi}^{\alpha}g(t)dt=-\frac{7}{4}\pi^2+p\pi+q$$

이다. $100\times|p+q|$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)

문항 해설

$100a$의 값을 물어보았다. k의 값이 100인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 세 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

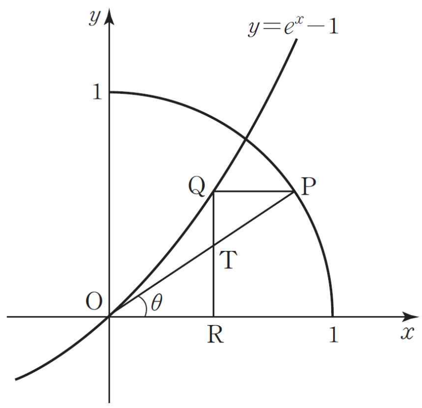
25, 50, 75

실제 답

350

93

좌표평면에서 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$라 하자. 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=e^x-1$과 만나는 점을 Q라 하고, 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 R라 하자. 선분 OP와 선분 QR의 교점을 T라 할 때, 삼각형 OTR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자 $\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $60a$의 값을 구하시오.



문항 해설

$60a$의 값을 물어보았다. k의 값이 60인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 네 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

15, 20, 30, 40

실제 답

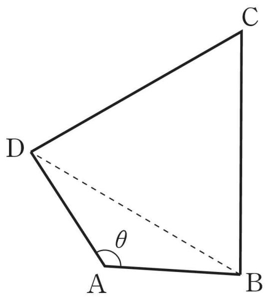
30

94

평면에 있는 사각형 ABCD가

$$\overline{AB}=\overline{AD}=1,\ \overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DB}$$

를 만족시킨다. $\angle DAB=\theta$라 할 때, 사각형 ABCD의 넓이가 최대가 되도록 하는 θ에 대하여 $60\sin^2\theta$의 값을 구하시오.



문항 해설

$60a$의 값을 물어보았다. k의 값이 60인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 네 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

15, 20, 30, 40

실제 답

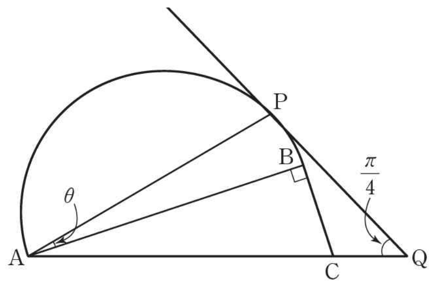
15

95

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=1$이고 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에서의 접선과 선분 AC의 연장선이 만나는 점을 Q라 하자.

$\angle PQA=\frac{\pi}{4}$이고 $\angle PAB=\theta$라 할 때, $60\tan 2\theta$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$)



문항 해설

$60a$의 값을 물어보았다. k의 값이 60인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 네 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

15, 20, 30, 40

실제 답

30

96

양의 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(t)$에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 P의 시각 $t(t \geq 1)$에서의 위치 (x, y)가

$$\begin{cases} x = 2\ln t \\ y = f(t) \end{cases}$$

이다. 점 P가 점 $(0, f(1))$로부터 움직인 거리가 s가 될 때, 시각 t는 $t = \dfrac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$이고, $t=2$일 때, 점 P의 속도는 $\left(1, \dfrac{3}{4}\right)$이다. 시각 $t=2$일 때 점 P의 가속도를 $\left(-\dfrac{1}{2}, a\right)$라 할 때, $60a$의 값을 구하시오.

문항 해설

$60a$의 값을 물어보았다. k의 값이 60인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 네 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

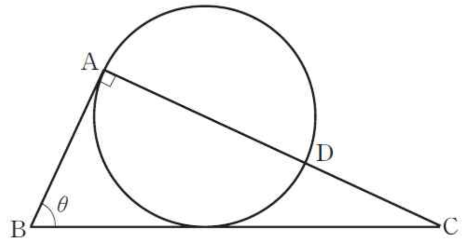
15, 20, 30, 40

실제 답

15

97

그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=1$, $\angle \mathrm{A} = \dfrac{\pi}{2}$, $\angle \mathrm{B} = \theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 선분 AD를 지름으로 하는 원이 선분 BC와 접할 때, $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta^3} = k$라 하자. $100k$의 값을 구하시오.



문항 해설

$100a$의 값을 물어보았다. k의 값이 100인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 세 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

25, 50, 75

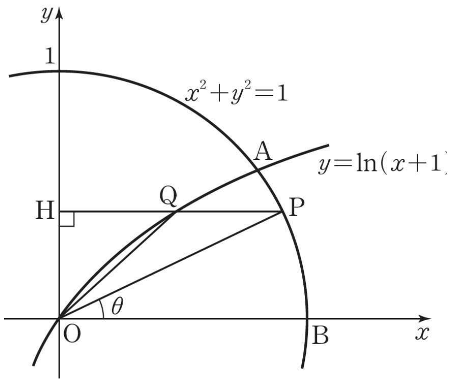
실제 답

25

98

그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$과 곡선 $y=\ln(x+1)$이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 점 B$(1, 0)$에 대하여 호 AB 위의 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 곡선 $y=\ln(x+1)$이 만나는 점을 Q라 하자. $\angle \mathrm{POB}=\theta$라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 HQ의 길이를 $L(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{S(\theta)}{L(\theta)}=k$일 때, $60k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$이고, O는 원점이다.)



문항 해설

$60a$의 값을 물어보았다. k의 값이 60인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 네 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

15, 20, 30, 40

실제 답

30

99

실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는 1이다.

함수 $f(2x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, a)$에서의 접선의 기울기는 b이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오.

문항 해설

$10a$의 값을 물어보았다. k의 값이 10인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 두 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

15, 25

실제 답

15

100

실수 t에 대하여 좌표평면에서 원점을 지나고 기울기가 $\tan(\sin t)$인 직선와 원 $x^2+y^2=e^{2t}$이 만나는 점 중에서 x좌표가 양수인 점을 P라 하고, 점 P가 나타내는 곡선을 C라 하자. $t=\pi$일 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $a\times e^{b\pi}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오.(단, a와 b는 유리수이다.)

문항 해설

$10a$의 값을 물어보았다. k의 값이 10인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 두 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

15, 25

실제 답

25

101

양의 실수 x와 두 실수 b, c에 대하여

함수 $f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$에서 극값을 갖는다. (나) $0\le x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1\ge 0$이다.

세 수 a, b, c의 곱 abc의 최댓값을 $\dfrac{k}{e^3}$라 할 때, $60k$의 값을 구하시오.

문항 해설

$60a$의 값을 물어보았다. k의 값이 60인 상황이므로 우리가 마킹할 수 있는 답안의 선택지는 네 개뿐이다.

답으로 선택할만한 수

15, 20, 30, 40

실제 답

15

102

세 정수 a, b, c에 대하여 이차함수 $f(x)=a(x-b)^2+c$라 하고, 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=g(x)$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(2)<h(-1)<h(0)$
(나) 함수 $(t^2-t)h(t)$는 모든 실수 t에서 연속이다.

$80f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오.

문항 해설

$80a$의 값을 물어보았다. 80이라는 숫자는 우리가 절대 예측할 수 없는 수이다. 실제 답을 보고 '80일때도, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ 중에 하나로 찍으면 되지 않을까?'라고 생각하면 안된다. 내 빅데이터가 말해주고 있다.

실제 답

60

103

양수 a와 실수 b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -3x(x+2) & (x<0) \\ \left|ax^2+bx\right| & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 $f(x)=t$인 모든 x를 작은 수부터 크기 순으로 나열한 것을 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_m(m은 자연수)라 할 때, 함수 $g(t)$를 $g(t)=x_1$이라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$는 $t=3$, $t=4$에서만 불연속이다.
(나) $\lim_{t \to 3+} g(t)=\frac{2}{3}$

$30 \times g(4)$의 값을 구하시오.

문항 해설

$30a$의 값을 물었다. 30은 내가 정한 k값에 속하지는 않지만 그래도 약간은 찍을 수 있다. $a=\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ 중에 하나를 찍자. 하지만 이렇게 자주 나와주지는 않는다.

실제 답

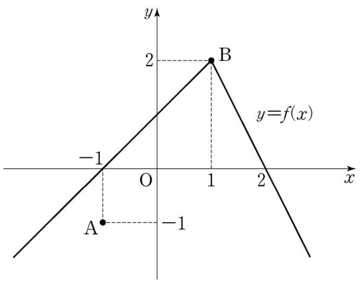
40

104

함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<1) \\ -2x+4 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이고, 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$, $\mathrm{B}(1,2)$가 있다. 실수 x에 대하여 점 $(x, f(x))$에서 점 A까지의 거리의 제곱과 점 B까지의 거리의 제곱 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합이 p일 때, $80p$의 값을 구하시오.



문항 해설

$80a$를 구해야하며 답인 186을 봐도 알 수 있듯이 k가 10, 60, 100이 아니고서는 쓸모가 없다. 하지만 이 문항의 경우,
문제의 특이성 때문에 찍어서 답을 맞출 길이 열린다.
점 A까지의 거리와 점 B의 거리를 비교해야하는 문제이며, 당연히 경계는 두 거리가 같을 때이다. 두 정점에서 거리가 같은 동점 P의 자취는 선분 AB의 수직이등분선일 때이다. 선분 AB의 수직이등분선은 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}$이므로 이 직선과 $y=f(x)$가 교점을 가지는 곳이 바로 경계이다. 따라서 이때의 x값은 각각 $x=-\frac{3}{10}$, $x=\frac{21}{8}$이다. 그리고 애초에 $f(x)$의 첨점이었던 $x=1$이 있다.
그러므로 우리는 미분가능하지 않은 점으로 의심되는 $x=a$의 값은 $-\frac{3}{10}$, 1, $\frac{21}{8}$로 찍어서 답을 작성해야 한다.

찍을만한 값

266

실제 답

186

: 이 문제를 통해서 애초에 첨점이더라도 식이 잘 마련되면 미분가능할 수도 있다는 것을 배웠다. 따라서 앞으로는 이 문제에서의 $x=1$ 같은 부분을 미분가능하지 않은 점으로 포함할지 안 할지에 대한 선택 사항이 생긴다.

105

곡선 $y=x^3$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, t^3)$에서의 접선과 원점 사이의 거리를 $f(t)$라 하자. $\lim_{t \to \infty}\frac{f(t)}{t}=\alpha$일 때, 30α의 값을 구하시오.

문항 해설

$30a$의 값을 물었다. 30은 내가 정한 k값에 속하지는 않지만 그래도 약간은 찍을 수 있다. $a=\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ 중에 하나를 찍자. 하지만 이렇게 자주 나와주지는 않는다.

실제 답

20

106

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$는 $x=a$에서 극솟값 b를 가진다.

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, f(2))$에서 접하는 직선을 l이라 할 때, 점 (a, b)에서 직선 l까지의 거리가 d이다. $90d^2$의 값을 구하시오.

문항 해설

$90a$의 값을 물었다. 즉, 못 찍는다.

실제 답

16

107

실수 t에 대하여 두 함수

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+3kx+2 & (x<0)\\ x^2+\frac{4}{3k}x-2 & (x\geq 0)\end{cases},\quad g(x)=2x+t$$

의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속이 되는 실수 α의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k를 정할 때, $150k$의 값은?

문항 해설

$150a$의 값을 물어보았다. 찍을 수 없는 k값이다.

실제 답

35

108

함수 $f(x)=\begin{cases}-3x^2 & (x<1)\\ 2(x-3) & (x\ge 1)\end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)dt$$

라 할 때, 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 하자. $\left|\lim_{t\to a+}h(t)-\lim_{t\to a-}h(t)\right|=2$를 만족시키는 모든 실수 a에 대하여 $|a|$의 값의 합을 S라 할 때, $30S$의 값을 구하시오.

문항 해설

$30a$의 값을 물었다. 30은 내가 정한 k값에 속하지는 않지만 그래도 약간은 찍을 수 있다. $a=\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ 중에 하나를 찍자. 하지만 이렇게 자주 나와주지는 않는다.

실제 답

80

109

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x (2x-1)f(t)dt=x^3+ax+b$$

일 때, $40\times f(1)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

문항 해설

$40a$의 값을 물었다. 즉, 못 찍는다.

실제 답

50

110

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=-f(1+x)$를 만족시킨다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=-6x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오.

문항 해설

$4a$의 값을 물었다. 즉, 못 찍는다.

실제 답

2

111

시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2+t, \quad v_2(t)=2x^2+3t$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 a라 할 때, $9a$의 값을 구하시오.

문항 해설

$9a$의 값을 물었다. 즉, 못 찍는다.

실제 답

12

112

양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{a}x^2\,(-a\le x<a)\\ 3a\quad(x<-a \text{ 또는 } x>a)\end{cases}$$

라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은 S이다. $40S$의 값을 구하시오.

문항 해설

$40a$의 값을 물었다. 즉, 못 찍는다.

실제 답

290

113

$0<a<\dfrac{4}{7}$인 실수 a와 유리수 b에 대하여 닫힌구간 $\left[-\dfrac{\pi}{a},\ \dfrac{2\pi}{a}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{7}{2}\pi,\ 0\right)$을 지날 때, $30(a+b)$의 값을 구하시오.

문항 해설

$30a$의 값을 물었다. 30은 내가 정한 k값에 속하지는 않지만 그래도 약간은 찍을 수 있다. $a=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{2}$ 중에 하나를 찍자. 하지만 이렇게 자주 나와주지는 않는다.

실제 답

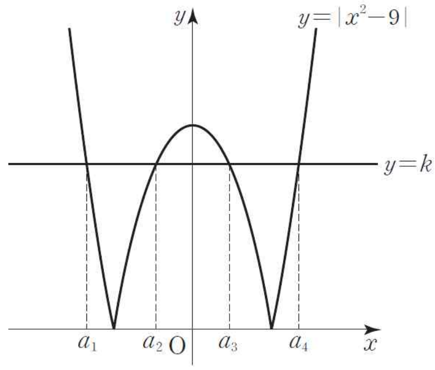
40

답이 될 것 같은 숫자

답이 될 것 같다는 것은 말 그대로 정말 답일 것 같은 숫자를 고르는 것이다. 근거는 1도 없지만 수많은 문제 풀이 경험상 답이 안 될 것같은 숫자도 종종 보이고 답이 될 것같은 숫자도 왕왕 보인다. 본인의 경험을 믿고 자주 나왔던 것 같은 숫자를 고르도록 노력해보자.

114

그림과 같이 함수 $y=|x^2-9|$의 그래프가 직선 $y=k$와 서로 다른 네 점에서 만날 때, 네 점의 x좌표를 각각 a_1, a_2, a_3, a_4라 하자. 네 수 a_1, a_2, a_3, a_4가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 상수 k의 값은? (단, $a_1<a_2<a_3<a_4$)



① $\frac{34}{5}$　② 7　③ $\frac{36}{5}$
④ $\frac{37}{5}$　⑤ $\frac{38}{5}$

선지 분석

분모를 5로 통분하면 분자가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

본인의 감을 시험해보자. 가장 답일 것 같은 숫자는 무엇인가?

③인 $\frac{36}{5}$이다. 다른 선지의 34, 37, 38이라는 숫자가 흔히 나오는 숫자였던가? 난 그렇게 생각하지 않는다. 7은 혼자 정수라 제외했다.

찍을만한 선지

③

실제 답

③

115

수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_8 - a_{15} = 63$일 때, $\dfrac{a_8}{a_1}$의 값은?

① 91 ② 92 ③ 93
④ 94 ⑤ 95

선지 분석

공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

본인의 감을 시험해보자. 가장 답일 것 같은 숫자는 무엇인가?
②인 92이다. 일단 답의 꼴이 몫의 꼴이므로 소수는 최대한 피해보도록 하자. 91은 탈락이다. 93도 좀 그렇지 않나? 95도 마음에 들지 않는 숫자이다. 92가 정말 4의 배수로서 정말 예쁘지 않나...?

찍을만한 선지

②

실제 답

②

116

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_n - 1$
(나) $a_{2n+1} = 2a_n + 1$

$a_{20} = 1$일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$의 값은?

① 704 ② 712 ③ 720
④ 728 ⑤ 736

선지 분석

공차가 8인 등차수열이다.

문항 해설

$63 = 2^6 - 1$

$728 = 3^6 - 1$

이라는데.. 난 잘 모르겠다. 이걸 어떻게 생각하지
(사실 17, 18, 19, 20시즌에는 21번 믿찍4 개념이 있었다.)

찍을만한 선지

④

실제 답

④

only for 미적분 선택자

삼각함수의 극한

삼각함수의 극한을 찍기 위해서는 $f(\theta)$가 어떤 꼴로

이루어져 있나 보면 된다. 대부분 곱의 꼴이기에 인수논리를 적용하면 된다.

여기에 하나 더 추가한다. 문제에 있는 숫자, 각, 길이 등으로 답이 구성될 수 밖에 없다. 따라서 아무리 소수이더라도 문제에 있는 숫자였다면 충분히 답이 될 수 있다.

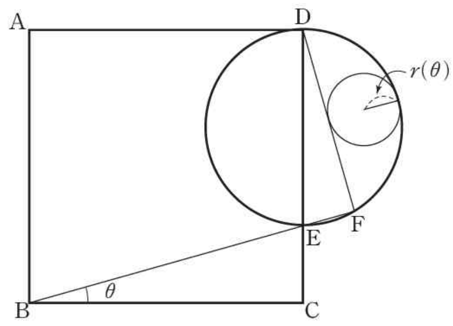
따라서 일단 문제에 있는 숫자들로 구성된 답을 찾는다.

하지만 답의 꼴이 $\dfrac{f(\theta)}{g(\theta)}$일 경우 약분되어 사라질 가능성도 있으니 무조건 문제에서 제공된 숫자가 있는 선지를 찍는 것을 지양하도록 하자.

117

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 변 CD 위의 점 E에 대하여 선분 DE를 지름으로 하는 원과 직선 BE가 만나는 점 중 E가 아닌 점을 F라 하자. $\angle \mathrm{EBC}=\theta$라 할 때, 점 E를 포함하지 않는 호 DF를 이등하는 점과 선분 DF의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자.

$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$



① $\dfrac{1}{7}(2-\sqrt{2})$ ② $\dfrac{1}{6}(2-\sqrt{2})$ ③ $\dfrac{1}{5}(2-\sqrt{2})$

④ $\dfrac{1}{4}(2-\sqrt{2})$ ⑤ $\dfrac{1}{3}(2-\sqrt{2})$

선지 분석

분모가 공차가 -1인 등차수열이다.

문항 해설

문제에서 주어진 조건은 1, θ밖에 없다. 따라서 7, 6, 5, 3은 만들어질 수 없다고 생각해야 한다.

찍을만한 선지

④

찍으면 안 되는 선지

①, ②, ③, ⑤

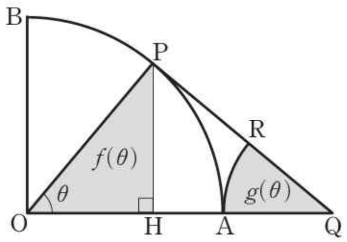
실제 답

④

118

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서 호 AB에 접하는 직선과 직선 OA의 교점을 Q라 하자. 점 Q를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{QA}$인 원과 선분 PQ의 교점을 R라 하자. $\angle POA=\theta$일 때, 삼각형 POH의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 QRA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta\times f(\theta)}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



① $\frac{\sqrt{\pi}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$

④ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ⑤ $\sqrt{\pi}$

선지 분석

분모가 공차가 -1인 등차수열이다.

문항 해설

문제에서 주어진 조건은 1, θ밖에 없다. 따라서 5, 3은 만들어질 수 없다고 생각해야 한다. 또한 혼자 분수가 아닌 ⑤는 버리고 찍어 보자.

찍을만한 선지

②, ④

찍으면 안 되는 선지

①, ③

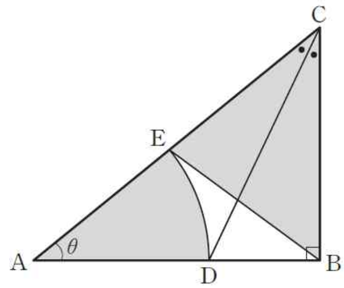
실제 답

④

119

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle C$를 이등분하는 직선과 선분 AB의 교점을 D, 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AD}$인 원과 선분 AC의 교점을 E라 하자. $\angle A=\theta$일 때, 부채꼴 ADE의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 BCE의 넓이를 $T(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta\to0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$의 값은?



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

선지 분석

분모를 4로 통일하면 분자가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

문제에서 주어진 조건은 1, θ밖에 없다. 따라서 3, 5는 만들어질 수 없다고 생각해야 한다. 또한 혼자 분수가 아닌 ④는 버리고 찍어 보자.

찍을만한 선지

①, ②

찍으면 안 되는 선지

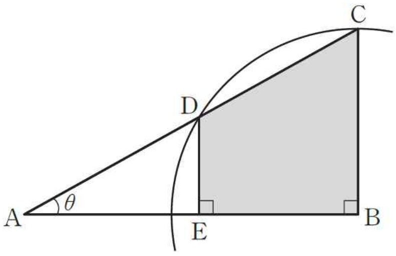
③, ⑤

실제 답

④

120

그림과 같이 빗변 AC의 길이가 1이고 $\angle \mathrm{BAC}=\theta$인 직각삼각형 ABC가 있다. 점 B를 중심으로 하고 점 C를 지나는 원이 선분 AC와 만나는 점 중 점 C가 아닌 점을 D라 하고, 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E라 하자. 사각형 BCDE의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$



① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

선지 분석

공비가 2인 등비수열이다.

문항 해설

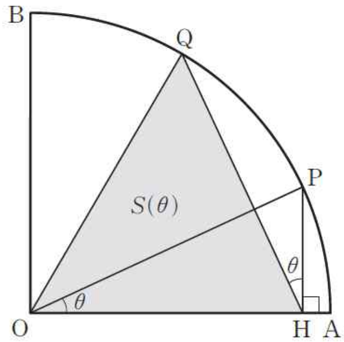
선지가 등비수열이면 절대 못찍는다.

실제 답

④

121

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, 호 BP 위에 점 Q를 $\angle \mathrm{POH}=\angle \mathrm{PHQ}$가 되도록 잡는다. $\angle \mathrm{POH}=\theta$일 때, 삼각형 OHQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{6}\right)$



① $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$　② $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$　③ $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$　④ $\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$　⑤ $\dfrac{5+\sqrt{2}}{2}$

선지 분석

분자에서 $\sqrt{2}$를 제외한 수가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

$\overline{\mathrm{OP}}$와 $\overline{\mathrm{QH}}$의 교점을 I라 하자. 그렇다면 당연히 삼각형 OIH의 넓이$\left(\dfrac{1}{2}\theta\right)$는 구할 수 있어야 한다. $S(\theta)$를 θ로 나눴으므로 $S(\theta)$는 θ를 하나만 가져야 한다. 이미 삼각형 OIH의 넓이가 $\dfrac{1}{2}\theta$로서 θ를 하나를 가지고 있으므로 삼각형 OQI의 넓이를 $T(\theta)$라 한다면 $\dfrac{S(\theta)}{\theta}=\dfrac{T(\theta)}{\theta}+\dfrac{1}{2}$이다. 따라서 선지 중 $\dfrac{1}{2}$를 가지고 있는 선지는 ① 밖에 없다.

찍을만한 선지

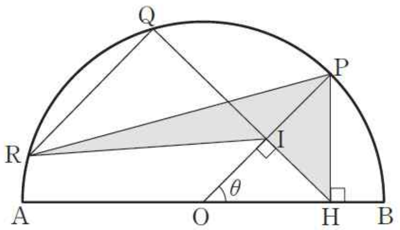
①

실제 답

①

122

그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 H를 지나고 선분 OP에 수직인 직선이 선분 OP, 호 AB와 만나는 점을 각각 I, Q라 하자. 점 Q가 아닌 점을 R라 하자. $\angle \mathrm{POB} = \theta$일 때, 두 삼각형 RIP, IHP의 넓이를 $S(\theta)$, $T(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta) - T(\theta)}{\theta^3}$의 값은? $\left(단, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$



① $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ③ $\sqrt{2}-1$

④ $\frac{2\sqrt{2}-1}{4}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$

선지 분석

규칙이 없다.

문항 해설

$T(\theta)$의 넓이는 누구나 시도해서 구했을 것이다.
(아마 이 문제를 못 풀었다면 $S(\theta)$를 못 구했을 것이기에)

$T(\theta) = \frac{\theta^3}{2}$이므로 $\frac{S(\theta) - T(\theta)}{\theta^3} = \frac{S(\theta)}{\theta^3} - \frac{1}{2}$이다.

① $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$

③ $\sqrt{2}-1$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}$

⑤ $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$

이므로 답이 될 수 있는 선지는 ②, ⑤이다.

찍을만한 선지

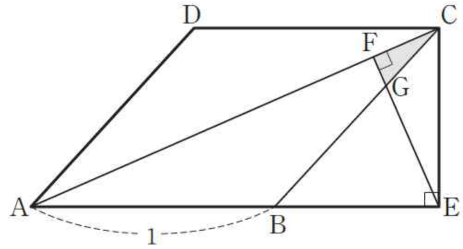
②, ⑤

실제 답

②

123

그림과 한 변의 길이가 1인 마름모 ABCD가 있다. 점 C에서 선분 AB의 연장선에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 F, 선분 EF와 선분 BC의 교점을 G라 하자.
$\angle \mathrm{DAB} = \theta$일 때, 삼각형 CFG의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값은?



① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{16}$

④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

선지 분석

분모가 공차가 -4인 등차수열이다.

문항 해설

문제에서 주어진 조건은 1, θ밖에 없다. 따라서 24(3), 20(5), 12(3)는 만들어질 수 없다고 생각해야 한다.

찍을만한 선지

③, ⑤

찍으면 안 되는 선지

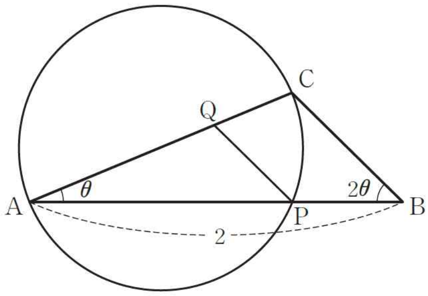
①, ②, ④

실제 답

④

124

그림과 같이 $\overline{AB}=2$이고 $\angle ABC=2\angle BAC$를 만족하는 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC를 지름으로 하는 원과 직선 AB가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P, 점 P를 지나고 선분 BC에 평행한 직선이 선분 AC와 만나는 점을 Q라 하자. $\angle BAC=\theta$라 할 때, 삼각형 APQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$



① $\frac{16}{27}$　② $\frac{17}{27}$　③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{19}{27}$　⑤ $\frac{20}{27}$

선지 분석

분모를 27로 통분했을 때, 분자가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

문제에서 주어진 조건은 2, θ, 2θ밖에 없다. 따라서 17, 19, 20은 만들어질 수 없다고 생각해야 한다.

찍을만한 선지

①, ③

찍으면 안 되는 선지

②, ④, ⑤

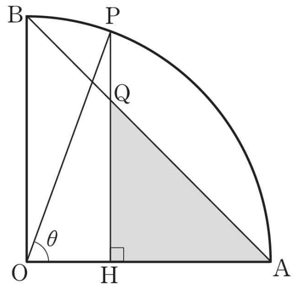
실제 답

①

125

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 선분 AB의 교점을 Q라 하자. $\angle POH=\theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}$의 값은?

$\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{5}{8}$

선지 분석

분모를 8로 통분했을 때, 분자가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

문제에서 주어진 조건은 1, θ밖에 없다. 따라서 3, 5는 만들어질 수 없다고 생각해야 한다.

찍을만한 선지

①, ②. ④

찍으면 안 되는 선지

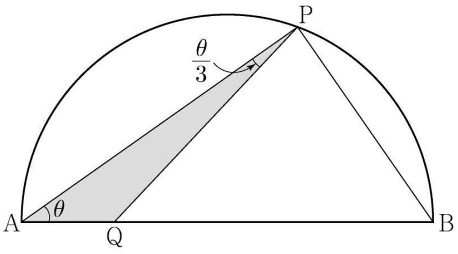
③, ⑤

실제 답

①

126

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 점 P가 있고, 선분 AB 위에 점 Q가 있다. $\angle \mathrm{PAB}=\theta$이고 $\angle \mathrm{APQ}=\dfrac{\theta}{3}$일 때, 삼각형 PAQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 PB의 길이를 $l(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+}\dfrac{S(\theta)}{l(\theta)}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$



① $\dfrac{1}{12}$ ② $\dfrac{1}{6}$ ③ $\dfrac{1}{4}$
④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{12}$

선지 분석

분모를 12로 통분했을 때, 분자가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

문제에서 주어진 조건은 2, θ, $\dfrac{\theta}{3}$밖에 없다. 따라서 3의 배수가 반드시 들어가야 한다. 또한 5는 만들어질 수 없다고 생각해야 한다.

찍을만한 선지

①, ②, ④

찍으면 안 되는 선지

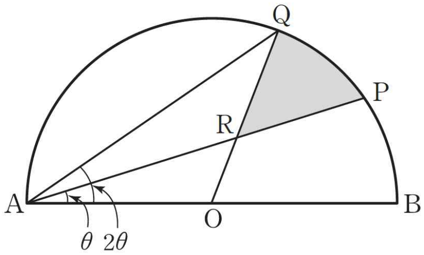
③, ⑤

실제 답

①

127

그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 두 점 P, Q를 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$, $\angle \mathrm{QAB}=2\theta$가 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 선분 OQ와 선분 AP가 만나는 점을 R라 하자. 호 PQ와 두 선분 QR, RP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta \to 0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$)



① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{5}{3}$ ③ 2
④ $\dfrac{7}{3}$ ⑤ $\dfrac{8}{3}$

선지 분석

분모를 3으로 통분했을 때, 분자가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

문제에서 주어진 조건은 4, θ, 2θ밖에 없다. 분모에 모두 3이 있으므로 아마 3은 $\theta+2\theta$로 만들어진 듯 하다. 하지만 5, 7은 만들어질 수 없다고 생각해야 한다. 혼자 정수인 ③은 빼도록 하자.

찍을만한 선지

①, ⑤

찍으면 안 되는 선지

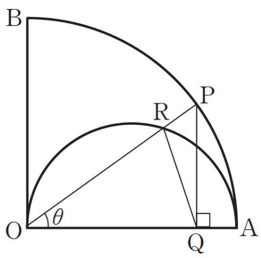
②, ④

실제 답

⑤

128

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB와 선분 OA를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 Q, 선분 OP와 반원의 교점 중 O가 아닌 점을 R라 하고, $\angle \mathrm{POA}=\theta$라 하자. 삼각형 PRQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은?



① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{3}{8}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{5}{8}$

선지 분석

분모를 8로 통분했을 때, 분자가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

문제에서 주어진 조건은 1, θ밖에 없다. 따라서 3, 5는 만들어질 수 없다고 생각해야 한다.

찍을만한 선지

①, ②, ④

찍으면 안 되는 선지

③, ⑤

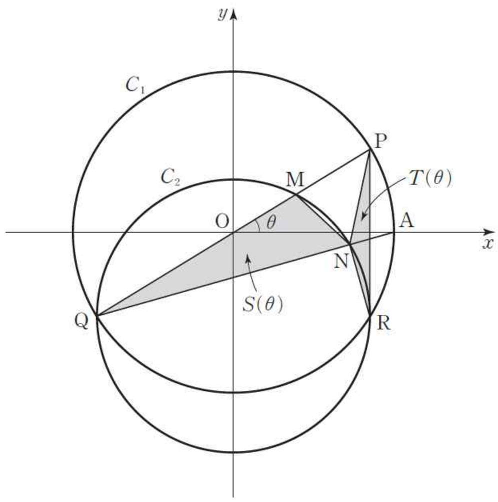
실제 답

②

129

그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 O$(0, 0)$이고 점 A$(1, 0)$을 지나는 원 C_1 위의 제1사분면 위의 점을 P라 하자. 점 P를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q, x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 R라 하자. 선분 QR를 지름으로 하는 원 C_2와 두 선분 PQ, AQ와의 교점을 각각 M, N이라 하자. $\angle \mathrm{POA}=\theta$라 할 때, 두 삼각형 MQN, PNR의 넓이를 각각 $S(\theta)$, $T(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta^2 \times S(\theta)}{T(\theta)}$의 값은?



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

선지 분석

공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

문제에서 주어진 조건은 1, θ밖에 없다. 따라서 3, 5는 만들어질 수 없다고 생각해야 한다.

찍을만한 선지

①, ②, ④

찍으면 안 되는 선지

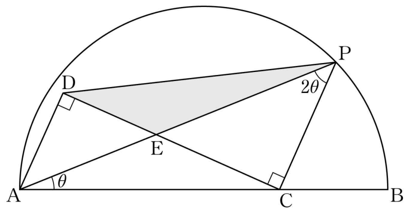
③, ⑤

실제 답

②

130

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P와 선분 AB 위의 점 C에 대하여 $\angle \mathrm{PAC} = \theta$일 때, $\angle \mathrm{APC} = 2\theta$이다. $\angle \mathrm{ADC} = \angle \mathrm{PCD} = \frac{\pi}{2}$인 점 D에 대하여 두 선분 AP와 CD가 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 DEP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$)



① $\frac{5}{9}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{7}{9}$
④ $\frac{8}{9}$　⑤ 1

선지 분석

분모를 9로 통분했을 때, 분자가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

문제에서 주어진 조건은 2, θ, 2θ밖에 없다. 따라서 5, 7은 만들어질 수 없다고 생각해야 한다. 또한 혼자 정수인 ⑤도 제외하자.

찍을만한 선지

②, ④

찍으면 안 되는 선지

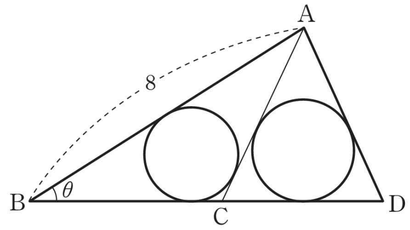
①, ③, ⑤

실제 답

④

131

$\overline{\mathrm{AB}} = 8$, $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$, $\angle \mathrm{ABC} = \theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 선분 BC의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AD}}$인 점 D를 잡는다. 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_1, 삼각형 ACD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_2라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{r_1 r_2}{\theta^2}$의 값은?



① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

선지 분석

공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

문제에서 주어진 조건은 8, θ밖에 없다. 따라서 6, 7, 9, 10은 만들어질 수 없다고 생각해야 한다. 또한 $r_1 r_2$이므로 곱의 꼴이기에 소수도 나오기 힘들다.

찍을만한 선지

③

찍으면 안 되는 선지

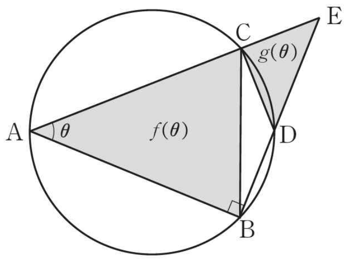
①, ②, ④, ⑤

실제 답

④

132

그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원에 내접하고, $\overline{AB}=\overline{AC}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC=\theta$라 하고, 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D, 직선 BD와 직선 AC가 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 CDE의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

선지 분석

분모를 8로 통분했을 때, 분자가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

문제에서 주어진 조건은 5, θ밖에 없다. 따라서 3은 만들어질 수 없다고 생각해야 한다. 평소라면 무조건 5가 들어가야겠지만 지금 문제에서는 $f(\theta)$와 $g(\theta)$의 몫의 꼴이므로 5가 약분되어 사라질 수도 있다는 것 또한 알아야 한다.

찍으면 안 되는 선지

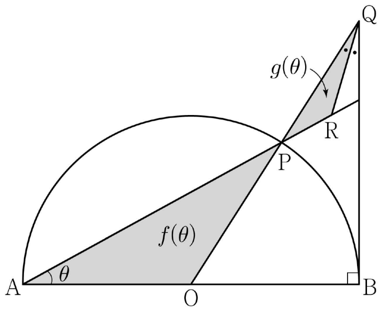
③

실제 답

②

133

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, $\angle OQB$의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. $\angle OAP=\theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3

④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

선지 분석

공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다.

문항 해설

문제에서 주어진 조건은 2, θ밖에 없다. 따라서 5, 3, 7은 만들어질 수 없다고 생각해야 한다.

찍을만한 선지

①, ⑤

찍으면 안 되는 선지

②, ③, ④

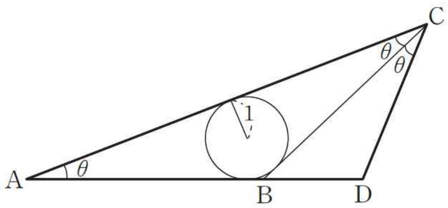
실제 답

①

134

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고
$\angle \mathrm{CAB} = \angle \mathrm{BCA} = \theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 점 A가 아닌 점 D를 $\angle \mathrm{DCB} = \theta$가 되도록 잡는다. 삼각형 BCD의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \{\theta \times S(\theta)\}$의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)



① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{8}{9}$ ③ $\frac{10}{9}$

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{14}{9}$

선지 분석

분모를 9로 통분했을 때, 분자가 공차가 1인 등차수열이다.

문항 해설

문제에서 주어진 조건은 1, θ밖에 없다. 따라서 10, 14은 만들어질 수 없다고 생각해야 한다.

찍을만한 선지

①, ②, ④

찍으면 안 되는 선지

③, ⑤

실제 답

④

무한등비급수

매우매우 중요하니 집중하기를 바란다.

이 파트에서는 전제 조건이 깔린다.

S_1은 구해야 한다.

즉, 공비를 구하기 힘든 상황에서 찍는 법을 배울 것이다. 당연히 풀 수 있으면 그냥 풀어야한다.

그림 R_1과 R_2의 길이의 비를 $p:q$라 하자. 그렇다면 넓이의 비는 $p^2:q^2$이 되며, 이것이 무한등비급수를 계산할 때는 $\dfrac{S_1}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^2}$꼴로 들어가게 된다. $\dfrac{S_1}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^2}=S_1\times\dfrac{p^2}{p^2-q^2}$이므로 우리가 S_1을 구했다는 전제 하에 선지에서 S_1을 분리하면 그 중 꼴이 $\dfrac{p^2}{p^2-q^2}$인 것이 답이 되게 되는 것이다.

순서를 정확히 정해보자.

① S_1을 구한다.

② 선지에서 S_1을 분리하여 $\dfrac{p^2}{p^2-q^2}$을 구한다.

③ 주어진 $\dfrac{p^2}{p^2-q^2}$ 중 제곱꼴이 있는 것을 고른다.

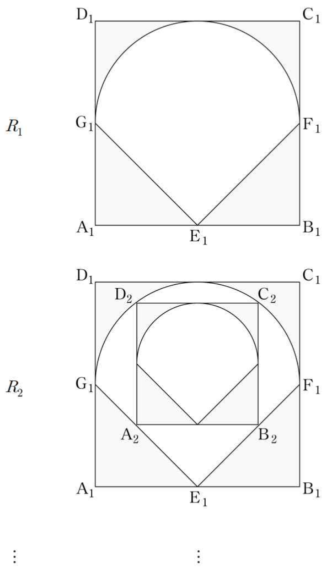
마지막 ④가 가장 중요하다.

④ 그림 상에서 $p:q$의 비가 얼추 맞는지 확인한다.

반드시 확인해야만 한다.

135

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다.
세 변 A_1B_1, B_1C_1, D_1A_1의 중점을 각각 E_1, F_1, G_1이라 하자.선분 G_1F_1을 지름으로 하고 선분 D_1C_1에 접하는 반원의 호 G_1F_1과 두 선분 G_1E_1, E_1F_1로 둘러싸인  모양의 도형의 외부와 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부의 공통부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 G_1E_1 위의 점 A_2, 선분 E_1F_1 위의 점 B_2와 호 G_1F_1 위의 두 점 C_2, D_2를 꼭짓점으로 하고 선분 A_2B_2가 선분 A_1B_1과 평행한 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 그린  모양의 도형의 외부와 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부의 공통부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\dfrac{25(6-\pi)}{42}$　② $\dfrac{25(6-\pi)}{32}$　③ $\dfrac{25(6-\pi)}{24}$

④ $\dfrac{25(6-\pi)}{21}$　⑤ $\dfrac{5(6-\pi)}{4}$

S_1의 값

$$S_1 = \frac{1}{2}(6-\pi)$$

문항 해설

① $\dfrac{25}{21} = \dfrac{5^2}{5^2-2^2}$

② $\dfrac{25}{16} = \dfrac{5^2}{5^2-3^2}$

③ $\dfrac{25}{12}$

④ $\dfrac{50}{21}$

⑤ $\dfrac{5}{2}$

답이 될 수 있는 선지는 ①, ②이다.
①이 답이라면 길이의 비가 $5:2$, ②가 답이라면 길이의 비가 $5:3$이다. 그림 상에서 $5:2$보다 $5:3$가 더 맞는 듯 하다.

찍을만한 선지

②

실제 답

②

136

직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$이다. 그림과 같이 선분 A_1D_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 M_1, N_1이라 하자.

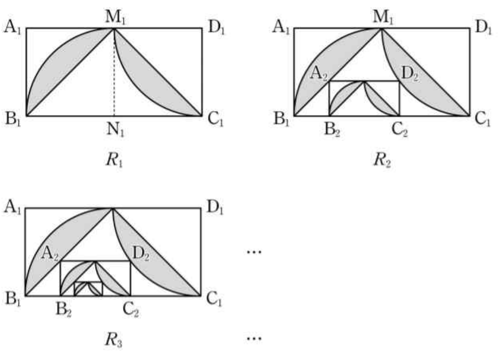
중심이 N_1, 반지름의 길이가 $\overline{B_1N_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $N_1M_1B_1$을 그리고, 중심이 D_1, 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $D_1M_1C_1$을 그린다.

부채꼴 $N_1M_1B_1$의 호 M_1B_1과 선분 M_1B_1로 둘러싸인 부분과 부채꼴 $D_1M_1C_1$의 호 M_1C_1과 선분 M_1C_1로 둘러싸인 부분인  모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 M_1B_1 위의 점 A_2, 호 M_1C_1 위의 점 D_2와 변 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고

$\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{25}{19}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ② $\frac{5}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ③ $\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

④ $\frac{25}{22}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ⑤ $\frac{25}{23}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

S_1의 값

$S_1=\frac{\pi}{2}-1$

문항 해설

① $\frac{25}{19}$

② $\frac{5}{4}$

③ $\frac{25}{21}=\frac{5^2}{5^2-2^2}$

④ $\frac{25}{22}$

⑤ $\frac{25}{23}$

답이 될 수 있는 선지는 ③이다. 하지만 냉큼 선택하지 말고 반드시 그림에서 비를 확인하자. $5:2$의 비가 딱히 문제될 것 같지 않다.

찍을만한 선지

②

실제 답

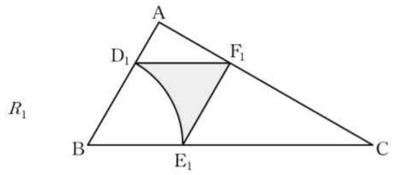
②

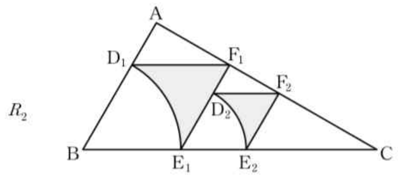
137

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$이고 $\angle\mathrm{ABC}=60°$인 삼각형 ABC가 있다. 사각형 $\mathrm{D_1BE_1F_1}$이 마름모가 되도록 세 선분 AB, BC, CA 위에 각각 점 $\mathrm{D_1}$, $\mathrm{E_1}$, $\mathrm{F_1}$을 잡고, 마름모 $\mathrm{D_1BE_1F_1}$의 내부와 중심이 B인 부채꼴 $\mathrm{BE_1D_1}$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 사각형 $\mathrm{D_2E_1E_2F_2}$가 마름모가 되도록 세 선분 $\mathrm{F_1E_1}$, $\mathrm{E_1C}$, $\mathrm{CF_1}$ 위에 각각 점 $\mathrm{D_2}$, $\mathrm{E_2}$, $\mathrm{F_2}$를 잡고, 마름모 $\mathrm{D_2E_1E_2F_2}$의 내부와 중심이 $\mathrm{E_1}$인 부채꼴 $\mathrm{E_1E_2D_2}$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?





⋮ ⋮

① $\dfrac{4(3\sqrt{3}-\pi)}{15}$ ② $\dfrac{4(3\sqrt{3}-\pi)}{9}$ ③ $\dfrac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{15}$

④ $\dfrac{2(3\sqrt{3}-\pi)}{3}$ ⑤ $\dfrac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{9}$

S_1의 값

$$S_1=\frac{4}{27}(3\sqrt{3}-\pi)$$

문항 해설

① $\dfrac{9}{5}=\dfrac{3^2}{3^2-2^2}$

② 12

③ $\dfrac{72}{5}$

④ 18

⑤ 24

답이 될 수 있는 선지는 ①이다. 그림 상에서 3 : 2의 비가 대충 맞아 보인다.

찍을만한 선지

①

실제 답

①

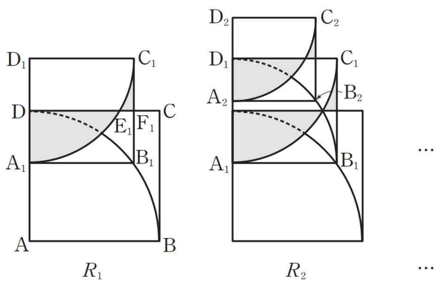
139

그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD에 중심이 A이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 ABD를 그린다. 선분 AD를 3 : 2로 내분하는 점을 $\mathrm{A_1}$, 점 $\mathrm{A_1}$을 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 BD 와 만나는 점을 $\mathrm{B_1}$이라 하자.

선분 $\mathrm{A_1B_1}$을 한 변으로 하고 선분 DC와 만나도록 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$을 그린 후, 중심이 $\mathrm{D_1}$이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $\mathrm{D_1A_1C_1}$을 그린다. 선분 DC가 호 $\mathrm{A_1C_1}$, 선분 $\mathrm{B_1C_1}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{E_1}$, $\mathrm{F_1}$이라 하고, 두 선분 $\mathrm{DA_1}$, $\mathrm{DE_1}$과 호 $\mathrm{A_1E_1}$로 둘러싸인 부분과 두 선분 $\mathrm{E_1F_1}$, $\mathrm{F_1C_1}$과 호 $\mathrm{E_1C_1}$로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$에 중심이 $\mathrm{A_1}$이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $\mathrm{A_1B_1D_1}$을 그린다. 선분 $\mathrm{A_1D_1}$을 3 : 2로 내분하는 점을 $\mathrm{A_2}$, 점 $\mathrm{A_2}$를 지나고 선분 $\mathrm{A_1B_1}$에 평행한 직선이 호 $\mathrm{B_1D_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{B_2}$라 하자. 선분 $\mathrm{A_2B_2}$를 한 변으로 하고 선분 $\mathrm{D_1C_1}$과 만나도록 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$를 그린 후, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{50}{3}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right)$ ② $\frac{100}{9}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$ ③ $\frac{50}{3}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$
④ $\frac{100}{9}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right)$ ⑤ $\frac{100}{9}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

S_1의 값

$$S_1 = 4\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$

문항 해설

일단 S_1의 꼴 중 $2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$이 없는 ①, ②, ④는 제외하자.

③ $\frac{25}{6}$

⑤ $\frac{25}{9}=\frac{5^2}{5^2-3^2}$

답이 될 수 있는 선지는 ⑤이다. 그림 상에서 5 : 3의 비가 대충 맞아 보인다.

찍을만한 선지

⑤

실제 답

⑤

140

그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD의 대각선 BD의 5등분점을 점 B에서 가까운 순서대로 각각 P_1, P_2, P_3, P_4라 하고, 선분 BP_1, $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$, $\mathrm{P}_4\mathrm{D}$를 각각 대각선으로 하는 정사각형과 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$, $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$를 각각 지름으로 하는 원을 그린 후  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

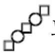
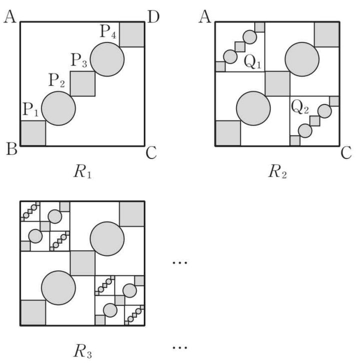
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$을 대각선으로 하는 정사각형의 꼭짓점 중 점 A와 가장 가까운 점을 Q_1, 점 C와 가장 가까운 점을 Q_2라 하자. 선분 AQ_1을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 CQ_2를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 2개의 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 선분 AQ_1을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 CQ_2를 대각선으로 하는 정사각형에 그림 R_1에서 그림 R_2를 얻는 것과 같은 방법으로  모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\dfrac{24}{17}(\pi+3)$ ② $\dfrac{25}{17}(\pi+3)$ ③ $\dfrac{26}{17}(\pi+3)$

④ $\dfrac{24}{17}(2\pi+1)$ ⑤ $\dfrac{27}{17}(2\pi+1)$

S_1의 값

$S_1 = \pi+3$

문항 해설

일단 $\pi+3$이 없는 ④, ⑤는 지우자. (이런 식으로 S_1을 구하지 못했을 때에도 $\pi+3$이 $2\pi+1$보다 많다는 이유로 찍을 수 있다.)

① $\dfrac{24}{17}$

② $\dfrac{25}{17}$

③ $\dfrac{26}{17}$

당장은 답이 될 수 있는 수가 안 보인다. 물론 제곱수인 25를 보고 ②를 찍고 싶어도 된다.

이 문제는 길이의 비 뿐만이 아닌 개수의 비도 있어서 예쁘게 나오지 않은 경우이다. ②의 경우 $p:q$가 $5:2\sqrt{2}$가 나온다. 이를 길이의 비가 $5:2\sqrt{2}$이라고 생각하고 넓이의 비를 구하면 $25:8$이다. 하지만 이는 실제로 넓이의 비가 아닌 개수의 비가 포함된 결과이므로 q를 2로 나누어서 넓이의 비는 $25:4$가 된다. 따라서 실제 길이의 비는 $5:2$가 될 것이며, 모양의 두 개씩 추가되는 경우에는 우리가 선지에서 구한 $p:q$꼴에서 $p:\dfrac{q}{\sqrt{2}}$꼴을 구해 길이비로 생각하면 된다.

$5:2$의 비가 그림상으로 맞아보이므로 ②를 찍자.

찍을만한 선지

②

실제 답

②

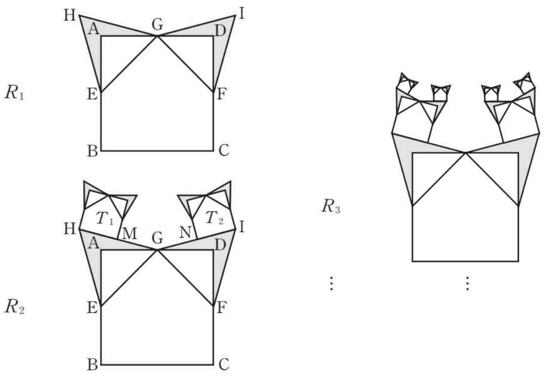
141

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서 선분 AB, 선분 CD, 선분 DA의 중점을 각각 E, F, G라 하자.

선분 EG를 한 변으로 하고 점 A가 내부에 있도록 정삼각형 EGH를 그리고, 선분 GF를 한 변으로 하고 점 D가 내부에 있도록 정삼각형 GFI를 그린다. 두 정삼각형 EGH, GFI의 내부와 정사각형 ABCD의 외부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 HG의 중점을 M, 선분 IG의 중점을 N이라 하고, 선분 HM을 한 변으로 하는 정사각형 T_1과 선분 IN을 한 변으로 하는 정사각형 T_2를 각각 정사각형 ABCD와 만나지 않게 그린다. 정사각형 T_1, T_2에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{14}{3}(\sqrt{3}-1)$ ② $\frac{16}{3}(\sqrt{3}-1)$ ③ $6(\sqrt{3}-1)$
④ $\frac{20}{3}(\sqrt{3}-1)$ ⑤ $\frac{22}{3}(\sqrt{3}-1)$

S_1의 값

$S_1 = 4(\sqrt{3}-1)$

문항 해설

① $\frac{7}{6}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$

⑤ $\frac{11}{6}$

①, ④, ⑤는 일단 제외하자.

②의 경우 $2:1$이며 길이의 비는 $2:\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}:1$이다.

③의 경우 $\sqrt{3}:1$이며 길이의 비는 $\sqrt{3}:\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}:1$이다.

그림 상에서 $3:1$과 가까워 보이므로 ②를 선택하자

찍을만한 선지

②

실제 답

②

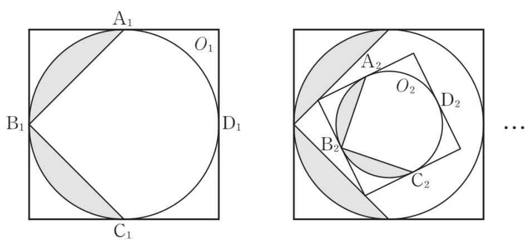
142

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형에 내접하는 원 O_1이 있다. 정사각형과 원 O_1의 접점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1이라 할 때, 원 O_1과 두 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$, $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$로 둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 두 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$, $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$을 각각 $3:1$로 내분하는 두 점을 이은 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 원 O_1의 내부에 그린다. 이 정사각형에 내접하는 원을 O_2라 하고 그 접점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2라 할 때, 원 O_2와 두 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$, $\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$로 둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 두 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$, $\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$를 각각 $3:1$로 내분하는 두 점을 이은 선분을 한 변으로 하는 정사각형에 그림 R_1에서 그림 R_2를 얻은 것과 같은 방법으로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1 R_2

① $\frac{32}{11}(\pi-2)$ ② $\frac{34}{11}(\pi-2)$ ③ $\frac{36}{11}(\pi-2)$

④ $\frac{32}{11}(\pi-1)$ ⑤ $\frac{34}{11}(\pi-1)$

S_1의 값

$S_1=2(\pi-2)$

문항 해설

S_1을 구하기도 전에 $\frac{36}{11}=\frac{6^2}{6^2-5^2}$을 보고 흥분해서 ③을 고르는 일은 없도록 하자. 항상 고르기 전에 그림에서 길이의 비를 추정하는 습관을 가지자. 절대 $6:5$의 비율은 아닌 것 같다.

$\pi-2$가 없는 ④, ⑤는 제외하자.

① $\frac{16}{11}$

② $\frac{17}{11}$

③ $\frac{18}{11}$

이 중 제곱꼴로 표현이 가능한 것은? ①

찍을만한 선지

①

실제 답

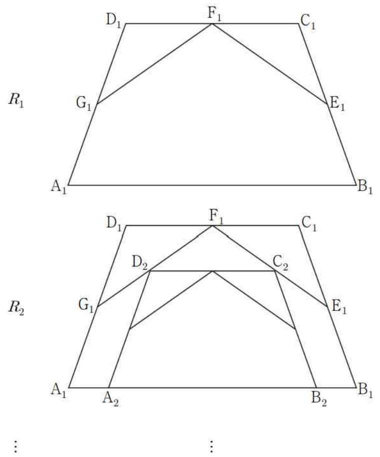
①

143

그림과 같이 두 선분 A_1B_1, C_1D_1이 서로 평행하고 $\overline{A_1B_1}=10$, $\overline{B_1C_1}=\overline{C_1D_1}=\overline{D_1A_1}=6$인 사다리꼴 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 세 선분 B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1의 중점을 각각 E_1, F_1, G_1이라 하고 두 개의 삼각형 $C_1F_1E_1$, $D_1G_1F_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 A_1B_1 위의 두 점 A_2, B_2와 선분 E_1F_1 위의 점 C_2, 선분 F_1G_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하고 두 선분 A_2B_2, C_2D_2가 서로 평행하며 $\overline{B_2C_2}=\overline{C_2D_2}=\overline{D_2A_2}$, $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=5:3$인 사다리꼴 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 사다리꼴 $A_2B_2C_2D_2$에 두 개의 삼각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?



① $\frac{234}{19}\sqrt{2}$　② $\frac{236}{19}\sqrt{2}$　③ $\frac{238}{19}\sqrt{2}$

④ $\frac{240}{19}\sqrt{2}$　⑤ $\frac{242}{19}\sqrt{2}$

S_1의 값

$S_1=6\sqrt{2}$

문항 해설

이 문제는 공비 구하기가 매우 까다롭다. 이럴 때, 선지 발라내기를 꼭 해보자.

① $\frac{39}{19}$

② $\frac{118}{57}$

③ $\frac{119}{57}$

④ $\frac{40}{19}$

⑤ $\frac{121}{57}=\frac{11^2}{11^2-8^2}$

⑤를 바로 선택하지 말고 꼭 그림에서 $11:8$의 비율이 대충 맞을지 확인하고 가자. 크게 괴리감이 없다면 아마 정답이 맞겠다.

찍을만한 선지

⑤

실제 답

⑤