제 2 교시

2024학년도 대학수학능력시험 대비 응애 모의고사 2회 문제지

수학 영역

성명	

수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

달빛이 밝히는 샛길을 빠져나가

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[3]{3^4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

2. $\int_{-1}^{2} (x^3 + x)dx$의 값은? [2점]

① 5 ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{23}{4}$ ⑤ 6

3. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 각 θ에 대하여 $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

4. $f(1) = f'(1) = 1$인 다항함수 $f(x)$와 함수 $g(x) = x^2 f(x)$에 대하여 $g'(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & (x<a) \\ x^2 & (x \geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $y=|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [3점]

① 3 ② 2 ③ 1 ④ 0 ⑤ -1

6. $0 \leq x < 2\pi$에서 방정식

$$\sin x = \tan^2 x$$

의 서로 다른 모든 실근의 합은? [3점]

① 2π ② 3π ③ 4π ④ 5π ⑤ 6π

7. 두 곡선

$$y=x^2(x-1),\ y=x^2$$

으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

8. 모든 항이 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_1+a_2의 값은? [3점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2}+\frac{1}{4}a_n=a_{n+1}$이다.
>
> (나) $\sum_{k=1}^{5}a_k=31$

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

9. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=f(3)=f(\alpha)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t)=f(t)$$

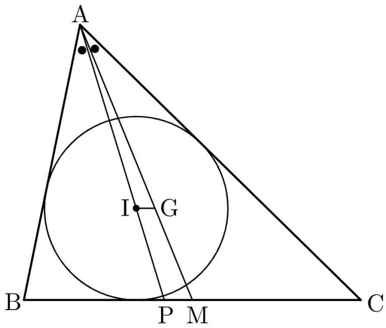
이다. 시각 $t=4$에서 점 P의 속도가 0이 될 때, 점 P의 가속도가 0이 되는 시각 t의 값은? (단, α는 상수이다.) [4점]

① $\frac{11}{5}$ ② $\frac{12}{5}$ ③ $\frac{13}{5}$
④ $\frac{14}{5}$ ⑤ 3

10. $a_1=90$이고 공차가 정수 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{S_n\}$은 $n=6$에서 최댓값을 갖는다. 가능한 모든 d의 값의 합은? [4점]

① -48 ② -54 ③ -60
④ -66 ⑤ -72

11. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=7$인 삼각형 ABC에 대하여 $\angle$BAC의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 P, 선분 BC의 중점을 M이라 하고, 삼각형 ABC의 무게중심과 내접원의 중심을 각각 G, I라 하자. 사각형 IPMG의 넓이는? [4점]



① $\frac{1}{6}\sqrt{6}$ ② $\frac{2}{9}\sqrt{6}$ ③ $\frac{5}{18}\sqrt{6}$
④ $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ ⑤ $\frac{7}{18}\sqrt{6}$

12. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)g(4)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $(f \circ g)(x)=(g \circ f)(x)$이다.
(나) $\lim_{x \to 1}\left\{\frac{1}{x-1}-\frac{g(x)}{f(x)}\right\}$의 값이 존재한다.

① 42 ② 45 ③ 48 ④ 51 ⑤ 54

13. 자연수 n에 대하여 두 자연수 a, b $(a < b)$가 다음 조건을 만족시킬 때, b로 가능한 모든 값들의 곱은? [4점]

(가) $-(n-a)(n-b)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(n)=1$을 만족시키는 $2 \le n \le 10$인 자연수 n의 개수는 5이다.
(나) $|a-n|(b-n)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10} g(n) = 11$이다.

① 60 ② 72 ③ 84 ④ 96 ⑤ 108

14. 최고차항의 계수가 1이고 직선 $x=1$을 축으로 하는 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(|x|)$라 하고, x에 대한 방정식

$$g(x)-x=t$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\sum_{n=0}^{4} h\left(f(0)-\frac{n^2}{4}\right) = 9$
ㄴ. 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 함수 $f(x)$가 존재한다.
ㄷ. 함수 $\{g(x)\}^2 h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 함수 $f(x)$가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. $a_3=2$이고 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $-1<a_n<5$이다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} k(a_n+1) & (-1<a_n\le 2) \\ 4-a_n & (2<a_n<5) \end{cases}$$

이다. (단, k는 0보다 큰 실수)

$\sum_{n=1}^{5}a_n$의 값으로 가능하지 <u>않은</u> 것은? [4점]

① 10 ② $\frac{17}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 4

단답형

16. $a=\frac{1}{3\log_3 2}$일 때, 64^a의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)=3x^2-7x-1$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(2)=1$일 때, $F(4)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 함수 $f(x)=-x^3+(a+1)x^2-8x$가 실수 전체의 집합에서 감소하도록 하는 자연수 a의 개수를 구하시오. [3점]

19. 수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{10}(k+1)a_k=10,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k-k)^2=395$$

를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+2)$의 값을 구하시오. [3점]

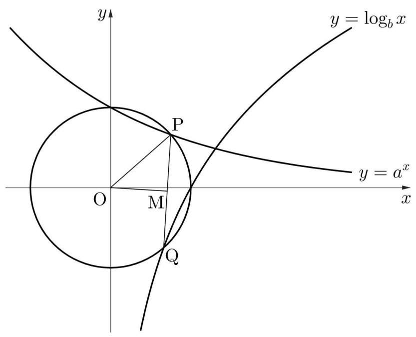
20. 양의 상수 a에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to a}\frac{\int_{2a}^{x}f(t)dt}{(x-a)^2}=\lim_{x\to 2a}\frac{\int_{a}^{x}f(t)dt}{(x-2a)^2}=2+f'\left(\frac{3}{2}a\right)$$

를 만족시킬 때, $f(3a)$의 값을 구하시오. [4점]

21. $0 < a < 1 < b$인 두 상수 a, b에 대하여 그림과 같이 곡선 $y = a^x$와 원 $x^2 + y^2 = 1$이 만나는 점 중 $(0, 1)$이 아닌 점을 P, 곡선 $y = \log_b x$와 원 $x^2 + y^2 = 1$이 만나는 점 중 $(1, 0)$이 아닌 점을 Q라 하자. 선분 PQ의 중점 M이 다음 조건을 만족시킬 때, $b^{\frac{3}{2}} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) $\overline{\mathrm{OM}} = \overline{\mathrm{PM}}$
(나) 점 M의 x좌표와 y좌표의 곱이 $-\frac{1}{32}$이다.



22. 삼차함수 $f(x) = -x^3 + 6x^2$과 상수 m에 대하여 $f(t)$와 $|mt|$ 중 크지 않은 값을 $g(t)$, 작지 않은 값을 $h(t)$라 하자. 두 함수 $g(t)$와 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$는 한 점에서만 미분가능하지 않다.
(나) 함수 $h(t)$는 <u>두 점에서만 미분가능하지 않다</u>.

$\int_0^3 \{g(t) + h(t)\}dt$의 최솟값을 p라 할 때, $4p$의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{-n}+n}{n+1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

24. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x \tan x \, dx$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

25. $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}\ln 2$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{2}\ln 3$
④ $\ln 2$　⑤ $\ln 3$

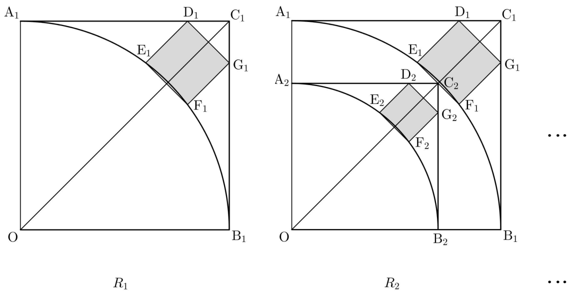
26. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x+\sin x)=\sin^3 x$$

를 만족시킬 때, $f'(\pi)$의 값은? [3점]

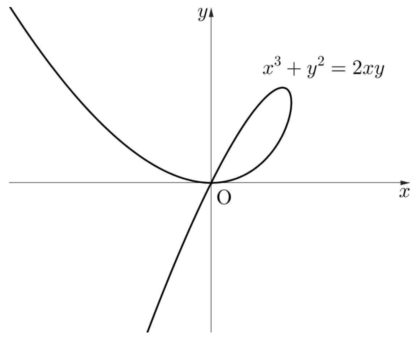
① 6　② 3　③ 0　④ -3　⑤ -6

27. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $\mathrm{A_1OB_1C_1}$과 점 O를 중심으로 하는 사분원 $\mathrm{OA_1B_1}$이 있다. 선분 $\mathrm{A_1C_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_1}$, 선분 $\mathrm{B_1C_1}$ 위의 점 $\mathrm{G_1}$, 사분원 $\mathrm{OA_1B_1}$ 위의 두 점 $\mathrm{E_1}$, $\mathrm{F_1}$을 사각형 $\mathrm{D_1E_1F_1G_1}$의 각 변이 선분 $\mathrm{AB_1}$ 또는 선분 $\mathrm{OC_1}$과 평행한 정사각형이 되도록 잡고, 사각형 $\mathrm{D_1E_1F_1G_1}$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{OC_1}$과 선분 $\mathrm{E_1F_1}$의 교점을 $\mathrm{C_2}$라 하고, 사각형 $\mathrm{A_2OB_2C_2}$가 정사각형이 되도록 선분 $\mathrm{OA_1}$위에 점 $\mathrm{A_2}$, 선분 $\mathrm{OB_1}$ 위에 점 $\mathrm{B_2}$를 잡는다. 정사각형 $\mathrm{A_2OB_2C_2}$에서 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 $\mathrm{D_2}$, $\mathrm{E_2}$, $\mathrm{F_2}$, $\mathrm{G_2}$를 잡고 사각형 $\mathrm{D_2E_2F_2G_2}$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{7}{51}$ ② $\frac{8}{51}$ ③ $\frac{3}{17}$ ④ $\frac{10}{51}$ ⑤ $\frac{11}{51}$

28. 0보다 큰 두 실수 x, y가 $x^3+y^2=2xy$를 만족시킬 때, $x+y$의 최댓값은? [4점]



① $\frac{1}{14}(9+7\sqrt{7})$ ② $\frac{1}{14}(10+7\sqrt{7})$
③ $\frac{1}{14}(11+7\sqrt{7})$ ④ $\frac{2}{27}(10+7\sqrt{7})$
⑤ $\frac{2}{27}(11+7\sqrt{7})$

단답형

29. 두 상수 a, b $\left(a > \frac{1}{2}\right)$와 함수 $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2-2x+5}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_a^x \{|f(t)| + f(t)\}\,dt$$

라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 점 $(1, f(1))$에 대하여 대칭이다. (나) $x=a$에서 $x=a+s$ $(s \ge 0)$까지 곡선 $y=g(x)$의 길이를 $h(s)$라 할 때, 점 $(a, h(a))$는 곡선 $y=h(s)$의 변곡점이다.

$g(2a) + \frac{3}{2}\ln 17 = k$라 할 때, $e^{\frac{2}{3}k}$의 값을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$와 함수 $h(x) = |g(x) - g(0)|$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$ $(\alpha \neq 0)$에서만 <u>미분가능하지 않다</u>. (나) 집합 $\{x \mid h(x) = g(0)\}$의 원소의 개수는 1이다. (다) 열린구간 $(0, k)$에서 $g(x)$가 증가하도록 하는 양수 k가 존재한다.

$f(2) \times g(0) = 1$일 때, $8f(1)$의 값을 구하시오. [4점]

＊ 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.