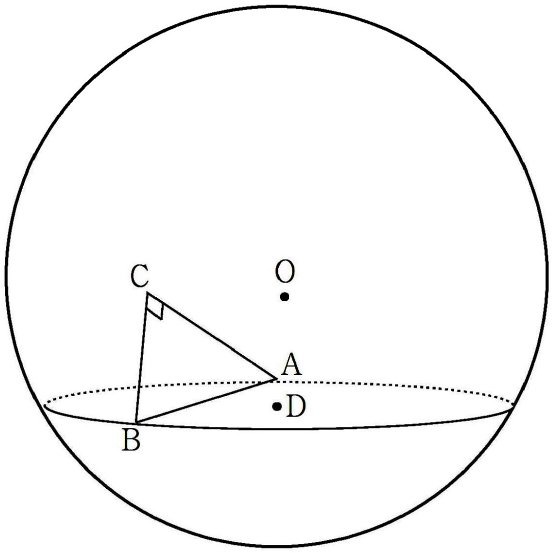
01. 〔공간도형 킬러대비 연구문제〕

그림과 같이 중심이 O인 구S 위의 세 점A,B,C가 $\overline{BC}=\overline{CA}=5\sqrt{2}$, $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$를 만족시키고, 점O에서 직선BC에 내린 수선의 길이는 $\frac{5\sqrt{6}}{2}$이다. 구S가 선분AB를 포함하는 평면α와 만나서 생기는 원의 넓이가 30π이고, 이 원의 중심을 D라 할 때, 평면BCD가 평면α와 이루는 각의 크기를 θ라 하자. $\frac{4}{\tan^2\theta}$의 값을 구하시오. (단, 점C의 평면 α 위로의 정사영은 원 외부에 있다.) [by werther]



02. 양수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = (\ln x)^n - tx^n$$

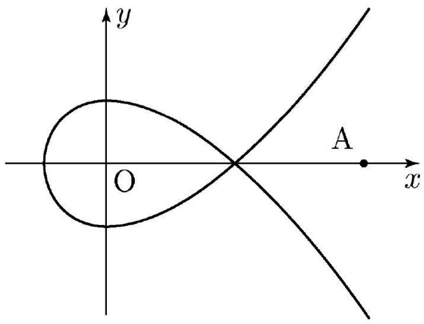
의 극값의 개수가 3이 되는 어떤 양수 t가 존재할 때, 가능한 100이하의 자연수 n의 개수는? [by 리듬농구]

① 48 ② 49 ③ 50 ④ 98 ⑤ 99

03. 좌표평면에서 다음과 같이 실수 t로 매개화된 점 (x, y)가 나타내는 곡선을 C라 하자.

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = \dfrac{1}{2}t^3 - \dfrac{3}{2}t \end{cases}$$

점 $\mathrm{A}(4, 0)$에서 곡선 C에 그은 접선들의 접점의 x좌표 중 최댓값은 $p + q\sqrt{21}$이다. $p^2 + q^2$의 값은? (단, p, q는 정수이다.) [4점] [by L]

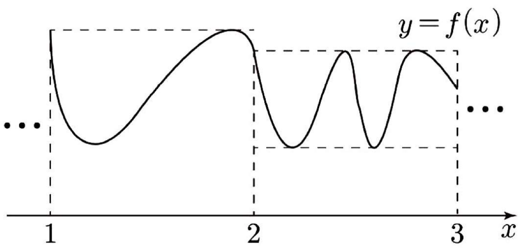


04. 곡선 $y=x^3+3x^2$ $(x \geq 0)$ 위의 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 점 H라 하자. 이 곡선과 직선 AH, x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 t $(t \geq 0)$가 되도록 하는 점 A의 x좌표를 $f(t)$라 하자. $\int_0^{12} f(t)\,dt = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [by L]

05. 10이하의 자연수 n에 대하여 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 닫힌 구간 $[n,\ n+1]$의 두 실수 $a,\ b$에 대하여
> $n \le x \le n+1$일 때, $f(a) \le f(x) \le f(b)$를 만족시키는
> 서로 다른 $a,\ b$의 개수가 각각 $n,\ n+1$이다.

예를 들어, 닫힌 구간 $[1,\ 3]$에서 다음과 같이 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$를 만들 수 있다.



$f'(k)=0$을 만족시키는 서로 다른 k값의 개수를 m이라 할 때, m의 최솟값을 구하시오. [4점] [by 리듬농구]

06. 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=f(x)$의 역함수가 존재한다.
(나) 모든 정수 n에 대하여 $f(n)=2n$이다.
(다) 모든 정수 n에 대하여 구간 $[n,\ n+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 이차함수 그래프의 일부이다.

$3\int_{0}^{11} f(x)\,dx$의 최댓값을 구하시오. [4점] [by 리듬농구]

07. 이차함수 $f(x)=x^2-ax$와 실수 t에 대하여 좌표평면에서 중심이 $(t,\ f(t))$이고 반지름의 길이가 r인 원이 있다. 이 원 위의 점 Q에 대하여 선분 OQ의 길이의 최솟값을 $g(t)$라 하자. $g(t)$가 두 점에서만 미분가능하지 않을 때, a^2+4r^2의 값을 구하시오. (단, a와 r은 양의 상수이고, O는 원점이다.) [by 포카칩]

08. 양수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 하자. 두 자연수 a, b와 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 $g(n)$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{5} g(n)$의 값을 구하시오. [4점] [by 리듬농구]

(가) $1 \le a \le b < 100$ (나) $f(a)+f(b)=\log n$

09. 최고차항의 계수가 1이고, $f'(0)=5$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$$S=\{m \mid \text{모든 실수 } x\text{에 대하여 } f(x) \geq m(x-t)+f(t)\}$$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=-1$과 $t=2$에서만 불연속일 때, $f'(3)$의 값은? [4점] [by L]

① 39 ② 41 ③ 43 ④ 45 ⑤ 47

10. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x^2+4x-2$가 있다. 실수 t에 대하여 $\{f(x)-t\}(x-t)\leq 0$을 만족하는 x의 최댓값을 $g(t)$라고 하자. $\int_0^3 g(t)\,dt=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. [by L]
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

11. 실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=2$, $f(3)\geq 3$, $f(6)=2$
(나) 임의의 짝수 k와 $0<t<1$인 임의의 실수 t에 대하여 닫힌 구간 $[k, k+t]$와 $[k-t, k]$에서 $f(x)$의 평균변화율의 절댓값은 모두 t^2이다.
(다) 열린 구간 $(0, 6)$에서 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 3이다.

$\int_0^6 f(x)\,dx$의 최댓값이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 두 자연수이다.) [by L]

12. 양수 x에 대하여 $\log x$의 지표를 $f(x)$라 하자. 2 이상의 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x의 최솟값을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=2}^{15} n \log a_n$의 값은? [by L]

(가) $1 \le \log x < 2$ (나) $1 \le \sum_{k=1}^{n} f(x^k) - \frac{n(n+1)}{2} < 2$

① 123 ② 133 ③ 143 ④ 153 ⑤ 163

13. 실수 t에 대하여 역함수가 존재하고 미분가능한 함수 $f(t)$와 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $-27f\left(\frac{5}{2}\right)f'\left(\frac{5}{2}\right)$의 값을 구하시오. [4점] [by 리듬농구]

(가) $f(2)=3,\ g\left(\frac{5}{2}\right)=2,\ f'(3)=-\frac{1}{4}$

(나) 함수 $y=g(x)$를 매개변수 t로 나타내면

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=f^{-1}(t) \end{cases}$$

이고, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(x,\ y)$에서의 미분계수는 $\{f^{-1}(t)\}^2$이다.

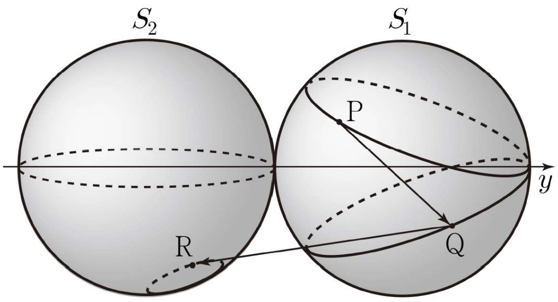
14. 함수 $f(x)=\dfrac{ax^2}{x+1}$ 에 대하여 함수 $|f(x)+b|$ 가 $x=-1$ 에서만 미분가능하지 않을 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 a, b 의 순서쌍 $(a,\ b)$ 의 개수를 구하시오. [by JnS]

(가) $1 \le a \le 20$
(나) 함수 $|f(x)+2b|$ 의 미분가능하지 않은 점의 개수가 2 이상이다.

15. 좌표공간의 두 구 S_1 : $x^2+(y-2)^2+z^2=4$과 S_2 : $x^2+(y+2)^2+z^2=4$에 대하여 세 점 P, Q, R은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 P는 평면 $y+3z=4$와 구 S_1의 교선위에 있다.
(나) 두 점 Q, R은 각각 평면 $y-3z=4$와 두 구 S_1, S_2의 교선위에 있다.

원점 O와 점 A(0, 4, 0)에 대하여 $|\overrightarrow{PQ}|$, $|\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{OA}|$가 모두 최대일 때, $|\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{OA}|^2$의 값을 구하시오. [4점] [by 리듬농구]



16.

(가) 함수 $f(x)$는 역함수가 존재하고, $f^{-1}(x) = g(x)$ 이다.

(나) $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f'(0) = \dfrac{1}{3}$, $f'(1) = 2$

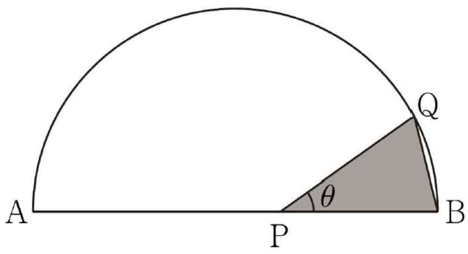
(다) 구간 $(0,1)$ 에서, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$

이계도 함수가 존재하는 함수 $g(x)$에 대하여,

정적분 $\displaystyle\int_0^1 \left| \frac{g''(g(x))}{f'(g(x))} \right| dx$ 의 값을 구하면 $\dfrac{q}{p}$이다.

$p^2 + q^2$ 의 값을 구하여라.(단, p,q는 서로소인 정수) [by EBS변형-박주혁t]

17. 그림과 같이 지름 AB의 길이가 1인 반원이 있다.
선분 AB위의 점 P와 호 AB위의 점 Q가 각각 $\overline{\mathrm{AP}}=\cos\theta$, $\angle\mathrm{QPB}=\theta$를 만족시킬 때, 삼각형 QPB의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.
$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$이다.) [4점] [by 리듬농구]



① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

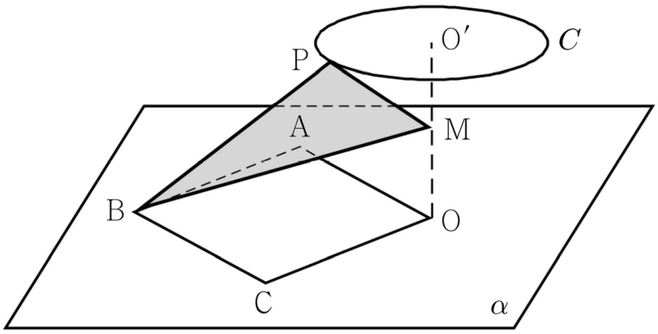
18. 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=1,\ f(1)=\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$
(나) 모든 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$의 $x=0$에서 $x=t$까지 곡선의 길이는 곡선 $y=f(x)$와 x축, 두 직선 $x=0$, $x=t$으로 둘러싸인 영역의 넓이와 같다.
(다) 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 $f'(x)>0$이다.

$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = pe+\frac{q}{e}$일 때, $4\left(p^2+q^2\right)$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 유리수이다.) [4점] [by 리듬농구]

19. 좌표평면에서 곡선 $f(x)=\ln\{k(x^2+1)\}+1$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ 에 대하여 함수 $y=g(t)$ 를 직선 OP 의 기울기라고 하자. 함수 $y=g(t)$ 가 양의 실수 전체의 집합에서 감소하게 하는 k 의 최솟값을 m 이라 할 때, $60m$ 의 값을 구하시오.
(단, O 는 원점이고, $k>0$) [4점] [by 이해원]

20. 그림과 같이 평면 α위에 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인 정사각형 OABC가 있다. 평면 α와 평행하고 반지름이 2인 원 C의 중심 O'에서 평면 α에 내린 수선의 발은 O이고 $\overline{\mathrm{OO}'}=4$이다. 원 C 위의 임의의 점 P와 선분 OO'의 중점 M에 대하여 평면 BMP와 평면 α가 이루는 각의 크기가 최소일 때, 점 P에서 직선 AC까지의 거리를 구하시오. [by 이해원]



B형 정답표

01.	30	**06.**	364	**11.**	29	**16.**	29
02.	②	**07.**	35	**12.**	②	**17.**	⑤
03.	26	**08.**	28	**13.**	32	**18.**	26
04.	97	**09.**	②	**14.**	420	**19.**	30
05.	109	**10.**	27	**15.**	8	**20.**	5