아래 내용은 2015학년도 고려대학교 수시모집 일반전형(인문계) 논술고사 인문계A의 논제2에 대한 수리적인 접근법에 대하여 서술하였습니다. 고려대학교의 출제의도와는 무관할 수 있으니 참고만 해주시기 바랍니다.

제시문④

A와 B 두 사람은 함께 정원을 가꾸려 한다. A와 B가 정원을 가꾸는 데 각각 들일 수 있는 노력의 수준은 {0, 10, 20}의 세 가지이며, 이 수치는 각 노력의 수준에 따라 발생하는 비용이기도 하다. A와 B가 들이는 노력과 그들이 누리게 될 정원의 아름다움 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

정원의 아름다움 = 3/5 × (A의 노력 + B의 노력)

(가) A는 B에게 공동체의 성원으로서 동질감을 느끼기 때문에, B의 만족도가 높아질수록 A의 만족도도 증가한다. 구체적으로 A와 B의 만족도는 다음과 같이 표현된다.

A의 만족도 = 정원의 아름다움 - 자기 노력의 비용 + (α×B의 만족도)
B의 만족도 = 정원의 아름다움 - 자기 노력의 비용
단 α는 A가 B에 대해서 느끼는 동질감의 정도이며, $\alpha \geq 0$ 이다.

예를 들어, A와 B 모두 10의 노력을 들였다면 정원의 아름다움은 3/5 ×(10+10)=12이다.
B는 정원의 아름다움 12에서 노력의 비용 10을 뺀 2의 만족도를, A는 2+(α×2)의 만족도를 느낀다.

(나) 만약 B 역시 A에게 동질감을 느낀다면 A와 B의 만족도는 다음과 같이 표현된다.

A의 만족도 = 정원의 아름다움 - 자기 노력의 비용 + (α×B의 만족도)
B의 만족도 = 정원의 아름다움 - 자기 노력의 비용 + (α×A의 만족도)

(다) 다음과 같은 주장이 있다.
"나 혼자 일방적으로 타인을 배려하는 것보다 타인도 나를 배려할 때, 나는 조금 더 나를 희생해 타인을 도울 수 있을 것이다. 전자의 경우는 내가 타인을 도움으로써 얻는 나의 기쁨만을 생각한다. 후자의 경우는 타인을 돕는 것이 나의 기쁨을 크게 할 뿐 아니라, 나를 배려하는 타인의 기쁨이 커져 타인의 그 기쁨이 다시 나의기쁨으로 돌아온다. 이런 과정이 반복되어 기쁨이 커지므로 내가 남을 도울 때 나의만족도가 더 많이 늘어나고, 남에게 도움이 되는 행동 역시 늘어난다."

논제2

1) 가)의 상황에서 $\alpha=0$이라고 하자. 만약 정부가 A와 B의 만족도의 합을 가장 크게 만드는 노력의 수준을 A와 B에게 정해 주려고 한다면, 정부가 A와 B에게 부여할 노력의 조합을 구하시오.

정원의 아름다움을 $B(x,y)=\frac{3}{5}(x+y)$라고 하자. 이 때 x는 A의 노력, y는 B의 노력이다. A의 만족도를 $f_A(x,y)$, B의 만족도를 $f_B(x,y)$, A가 B에게 느끼는 동질감을 α_A, B가 A에게 느끼는 동질감을 α_B라 할 때 A의 만족도와 B의 만족도는 다음과 같은 관계식이 성립한다. 이때 α_A는 $\alpha_A=\alpha$이고 α_B는 0 또는 α값을 갖는다.

$$f_A(x,y)=B(x,y)-x+\left(\alpha_A \times f_B(x,y)\right)\ ,\quad f_B(x,y)=B(x,y)-y+\left(\alpha_B \times f_A(x,y)\right)$$

이를 정리하면 다음과 같은 관계식이 도출된다.

$$\begin{cases} f_A(x,y)-\alpha_A f_B(x,y)=\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}y-x \\ f_B(x,y)-\alpha_B f_A(x,y)=\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}y-y \end{cases}$$

위 연립방정식을 행렬로 나타내면 $\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_A \\ -\alpha_B & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_A(x,y) \\ f_B(x,y) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$와 같다.

논제의 상황은 $\alpha_A=\alpha_B=0$이므로 A와 B의 만족도의 합 $f_A(x,y)+f_B(x,y)=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}y$ 이다. 두 만족도의 합이 가장 커지려면, x의 최댓값인 20과 y의 최댓값인 20, 즉 $x=20$, $y=20$일 때 만족도 의 합이 8로 최댓값을 가진다.
따라서 정부는 A, B의 만족도 합을 가장 크게 만들도록 A와 B에게 각각 20의 노력을 부여할 것이다.

2) (가)의 상황에서 $\alpha = 0$ 이라고 하자. A는 자신의 만족도를 높이기 위하여 노력의 수준을 선택한다. B의 노력이 10일 때, A의 노력을 구하시오. 또 B의 노력이 20일 경우에는 A의 노력이 어떻게 되는지 구하시오. (단, 만족도가 같다면 A는 높은 수준의 노력을 선택하며, 이는 이후의 질문들에서도 마찬가지이다.)

$\alpha_A = \alpha_B = 0$인 (가)의 상황에서 $f_A(x,y) = \frac{3}{5}y - \frac{2}{5}x$ 이다. $y = 10$으로 주어지고, x의 값이 증가할수록 A의 만족도 f_A가 감소하므로, $y = 10$이고, x의 최솟값인 0일 때 f_A가 최댓값 6을 가진다. 즉 A는 아무런 노력을 하지 않을 때 A의 만족도가 가장 높기 때문에 아무 노력도 하지 않을 것이다..

3) 가)의 상황에서 A는 자신의 만족도를 높이기 위하여 노력의 수준을 선택한다. A로 하여금 20의 노력을 선택하게 만드는 α의 범위를 구하시오.

$\alpha_B = 0$일 때 $\begin{bmatrix} 1 - \alpha_A \\ 0 \quad 1 \end{bmatrix}$의 판별식은 1이므로 이 행렬은 역행렬을 가진다.

따라서 $\begin{bmatrix} f_A(x,y) \\ f_B(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha_A \\ 0 \quad 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3\alpha - 2}{5} & \frac{3 - 2\alpha}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$f_A(x,y) = \frac{3\alpha - 2}{5}x + \frac{3 - 2\alpha}{5}y$$

A의 노력에 따른 A 만족도의 변화율 $\frac{df_A(x,y)}{dx} = \frac{3\alpha - 2}{5}$은 x, y와 무관하다. 즉 B의 노력과는 무관하게 A의 노력에 따른 만족도의 변화율 $\frac{df_A(x,y)}{dx}$은 A의 노력 x와 동질성 α에서만 결정된다.

$\alpha = \frac{2}{3}$이면 $f_A(x,y) = \left(\frac{3}{5} - \frac{4\alpha}{15}\right)y = f_A(y)$, 즉 A 만족도는 A의 노력과는 관계없이 B의 노력으로만 결정되므로 만족도가 같다면 높은 수준을 선택한다는 논제의 조건에 따라 A는 20의 노력을 하게 된다.

$\alpha > \frac{2}{3}$이면, $\frac{\partial f_A(x,y)}{\partial x} = \frac{3\alpha - 2}{5} > 0$이므로 A의 노력이 증가할수록 f_A 는 증가한다. 따라서 이 경우 A의 노력이 20일 때 $f_A(x,y)$가 최댓값을 갖는다. 한편 $0 < \alpha < \frac{2}{3}$에서는 $\frac{\partial f_A(x,y)}{\partial x} = \frac{3\alpha - 2}{5} < 0$ 이므로 A의 노력이 증가할수록 f_A 는 감소한다. 이 경우 A는 20보다 작은 노력을 택할수록 A의 만족도가 커지므로 0을 택하게 된다. 따라서 A가 20의 노력을 선택하게 만드는 α의 범위는 $\alpha \geq \frac{2}{3}$이다.

4) (나)의 상황에서 A는 자신의 만족도를 높이기 위하여 노력의 수준을 선택한다. A로 하여금 20의 노력을 선택하게 만드는 α의 범위를 구하시오.

$\alpha_A = \alpha_B = \alpha$의 경우 위에서 A와 B의 노력에 따른 만족도의 행렬식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_A(x,y) \\ f_B(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

만약 $\alpha = 1$이면 논제에서 주어진 조건에서 A의 만족도를 알 수 없다. $f_A(x,y) - f_B(x,y) = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y$ 이기 때문이다.

$\alpha \neq 1$이면 $\begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}$의 역행렬이 존재하므로

$$\begin{bmatrix} f_A(x,y) \\ f_B(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{5(\alpha^2 - 1)} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x - 3y \\ -3x + 2y \end{bmatrix}$$

이므로 $f_A(x,y) = \frac{2x - 3y + \alpha(-3x + 2y)}{5(\alpha^2 - 1)}$를 만족한다. $\frac{df_A(x,y)}{dx} = \frac{2 - 3\alpha}{5(\alpha^2 - 1)}$ 이고, 논제2-3과 마찬가지로 A의 노력에 따른 A 만족도의 변화율은 A, B의 노력과 무관한 동질성에 관한 함수이다.

B의 노력이 일정하게 주어질 때, $0 \leq \alpha < \frac{2}{3}$ 에서는 $\frac{df_A(x,y)}{dx} = \frac{2 - 3\alpha}{5(\alpha^2 - 1)} < 0$이므로 $f_A(x,y)$는 감소함수,

$\frac{2}{3} < \alpha < 1$일 때 $\frac{df_A(x,y)}{dx} = \frac{2 - 3\alpha}{5(\alpha^2 - 1)} > 0$이므로, $f_A(x,y)$는 증가함수, $\alpha > 1$일 때에는 증가함수 이므로

$\alpha \neq 1$이면서 $\alpha \geq \frac{2}{3}$일 때 A의 만족도가 최대가 되는 x값은 20이다.