2016학년도 논술 모의고사 4회 문제지 (수학)

성명 : (   )

제한 시간 : 120분, 총점 : 200점

다음 제시문을 읽고 [논제 1] ~ [논제 3]에 답하시오.

(가) 다음은 점화식에 대한 자료이다.

- 점화식(또는 재귀식, Recurrence relation)이란 수열의 항 사이에서 성립하는 관계식을 말한다. 즉, 수열 $\{a_n\}$의 각 항 a_n이 함수 f를 이용해서

$$a_n = f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1})$$

처럼 귀납적으로 정해져 있을 때, 함수 f의 수열 $\{a_n\}$의 점화식이라고 하며, 또한, 수열 $\{a_n\}$은 점화식 f로 정의된다고 한다. 점화식을 풀어 일반항으로 나타낸다는 것은 귀납적으로 주어진 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 n의 명시적인 식(explicit formula)으로 나타내는 것을 말한다.

- Wikipedia 점화식 페이지 수정 발췌 -

(나) 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 최솟값이 존재하는 경우, 구간 $[a, b]$ 내의 임의의 실수 x에 대하여 $f(x) \geq k$인 상수 k의 최댓값이 존재한다. 즉, $f(x)$의 최솟값을 $\min\{f(x)\}$라 하면 $f(x) \geq k$인 상수 k의 최댓값은 $\min\{f(x)\}$이다. 같은 논리로 $f(x)$의 최댓값이 구간 $[a, b]$에서 존재하는 경우, $f(x) \leq k$인 상수 k의 최솟값이 존재한다.

(다) 어떤 연속 함수나 수열이 증가하면서 최댓값이 존재하면 그 함수나 수열은 수렴한다. 즉, 함수 $f(x)$, 수열 $\{a_n\}$이 정의되어있고, 적당한 상수 N이 존재한다고 하자. 구간 (a, b) 내의 임의의 두 실수 $x_1 < x_2$와 N보다 큰 임의의 두 자연수 $n_1 < n_2$에 대하여

$$f(x_1) \leq f(x_2) \leq M_1,\ a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq M_2$$

인 상수 M_1, M_2가 존재하면, $\lim_{x \to b-0} f(x) = \alpha$, $\lim_{n \to \infty} a_n = \beta$인 상수 α, β가 존재하며, $\alpha \leq M_1$, $\beta \leq M_2$이다. 이는 $g(x_1) \geq g(x_2) \geq m_1$, $b_{n_1} \geq b_{n_2} \geq m_2$인 상수 m_1, m_2가 존재하는 연속 함수 $g(x)$와 수열 $\{b_n\}$에 대해서도 같은 논리로 성립한다. 즉, $\lim_{x \to b-0} g(x) = \gamma \geq m_1$, $\lim_{n \to \infty} b_n = \delta \geq m_2$인 상수 γ, δ가 존재한다. 만약 $m \leq f(x_1) \leq f(x_2)$이면, $\lim_{x \to a+0} f(x) = p \geq m$인 상수 p가 존재한다.

(라) 정적분은 다음과 같은 성질을 가지고 있다.

ⅰ) 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이면, 구간 $[a, b]$ 내의 모든 x에 대하여 함수 $g(x) = \int_a^x f(t)dt$는 미분가능하다.

ⅱ) 구간 $[a, b]$에서 연속인 임의의 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a, b]$ 내의 모든 x에 대하여 $f(x) < g(x)$이면, 구간 $[a, b]$에서 $\int_a^x f(t)dt < \int_a^x g(t)dt$이다.

(마) 어떤 정적분을 계산하기 곤란할 때, 극한을 이용하여 정적분을 계산할 수 있다. 즉, $x = b$에서 $f(x)$가 정의되지 않거나 불연속이어서 $\int_a^b f(x)dx$를 직접 계산하기 어려운 경우, 다음과 같은 방법을 통해 간접적으로 구할 수 있다.

$$\int_a^b f(x) = \lim_{x \to b-0} \int_a^x f(x) = \lim_{x \to b-0} \{F(x) - F(a)\} \qquad (\text{단, } F(x)\text{는 } f(x)\text{의 한 부정적분})$$

이때, 극한값이 존재하는 경우에만 위 식이 성립하며, 적분 값을 구할 수 있다. 이와 같은 적분을 '이상 적분(Improper Integral)'이라고 한다.

(바) 함수 $f(n, x)$를 자연수 n과 구간 $[a, b]$에서 정의되고, n에 대하여 연속 함수 $f(x)$로 수렴하는 연속 함수라 하자. 즉, $\forall n \in \mathbb{N}$에 대하여

$$f(n, x) : [a, b] \to \mathbb{R}$$

이고, $\lim_{n \to \infty} f(n, x) = f(x)$인 연속 함수 $f(x)$가 존재한다. 이때, 구간 $[a, b]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $|f(n, x)| \leq g(x)$인 연속 함수 $g(x)$가 존재하면 $\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(n, x)dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f(n, x)dx = \int_a^b f(x)dx$임이 알려져 있다.

(사) 임의의 실수 x에 대하여 수열 $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$이라 하면, 실수 x의 값에 관계없이 항상 $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$임이 알려져 있다.

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

2016학년도 논술 모의고사 4회 문제지 (수학)

성명 : (   )

제한 시간 : 120분

[논제 1] 아래의 논제에 답하시오.

[논제 1-1] $1<x$인 임의의 실수 x에 대하여 $\frac{x-1}{x}<\ln x<x-1$임을 보이시오. [10점]

[논제 1-2] $1<\alpha$인 임의의 상수 α가 존재하여 구간 $(1,\alpha)$ 내의 모든 x에 대하여 $\frac{\ln\alpha}{\alpha-1}<\frac{\ln x}{x-1}$임을 보이시오. [10점]

[논제 1-3] 이상적분부등식 $0<\int_1^e \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx<2(e-1)$임을 보이고, $\int_1^e \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx$의 수렴성 여부를 판정하시오. [20점]

[논제 2] 아래의 논제에 답하시오.

[논제 2-1] 0 이상의 정수 n에 대하여 $\mathrm{A}_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$라 할 때, 2 이상의 자연수 n에 대하여 A_n의 점화식을 구하고, 0 이상의 정수 m에 대하여 A_{2m+1}의 일반항을 구하시오. (단, $\mathrm{A}_0=\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{A}_1=1$이다.) [15점]

[논제 2-2] 0 이상의 정수 n에 대하여 $\mathrm{B}_n=\int_1^e \sqrt{\ln x}^{\,n}dx$라 할 때, B_{n+2}의 점화식을 구하시오. [10점]

[논제 2-3] [논제 2-2]의 수열 B_n과 임의의 자연수 n에 대하여 수열 $\mathrm{C}_{n-1}=-2\frac{(-4)^{n-1}n!}{(2n-1)!}\mathrm{B}_{2n-1}$임을 이용하여 0 이상의 정수 n에 대하여 B_{2n+1}의 일반항을 구하시오. (단, B_1의 값은 계산하지 마시오.) [25점]

[논제 3] 아래의 논제에 답하시오.

[논제 3-1] $\int_0^1 \frac{1}{2-x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n(n!)^2}{(2n+1)!}$임을 보이시오. [25점]

[논제 3-2] $\int_1^e \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx$를 [논제 2]의 B_{2n+1}에 대한 식으로 나타내시오. [15점]

[논제 3-3] $0<x<1$인 임의의 x에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. [30점]

$$\sqrt{x}\,e^{-x+1}<-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}<2-x^2$$

[논제 3-4] 무한급수 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n n!}{(2n+1)!}$의 수렴 여부를 판정하고, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n(n!)^2}{(2n+1)!}$, $2(e-1)$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n n!}{(2n+1)!}$의 대소 관계를 판정하시오. [40점]

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

2016학년도 논술 모의고사 4회 답안지 (수학)

성명 : (   )

제한시간 : 120분

※뒷면의 주의사항을 잘 읽고 답안지에 기입하시오.

2016학년도 논술 모의고사 4회 답안지 (수학)

성명 : (   )

수 학

※ 주의 사항

- 절대로 지정된 칸을 벗어나서 답안을 작성하지 마시오.
- 틀린 곳을 수정할 땐 절대 수정테이프나 수정액을 사용하지 말고, 두 줄을 긋거나 지우개로 깨끗이 지운 후 서술하시오.
- 사용 가능한 필기구는 검은색 볼펜이나 연필, 샤프만 가능하며, 절대 색상이 있는 필기구를 사용해서는 안 되며, 한번 사용한 색상의 필기구로 서술하시오.