2016학년도 논술 모의고사 3회 (수학) 해설 & 예시 답안

안녕하세요!!! 점점 사악해지는 제작자 '正進'입니다. 이 논술 모의고사, 발암물질 됐나요? 이런, 그럴 의도가 아니었는데.... 하지만, 그래도 꿋꿋하게 논술 모의고사를 제작하는 제작자입니다...

3회차나 되어서야 밝히는 거지만, 저 닉네임 뜻은 문자 그대로 '바르게 나아간다'라는 뜻을 담고 있는, 사전에 없는 단어로 제가 만든 겁니다. 아마 중국어로도 번역이 안 될걸요? 왜 갑자기 닉네임을 들먹이냐고요? 그냥, 한번 말해보고 싶은 이유가 대부분이라서요.... (이 모의고사를 통해 얻을 수 있는 것도 '당연히' 있으므로 절대 '사도(邪道)'가 아님을 밝히고 싶기도 했지요.)

각설하고(!) 이번 3회차는 지난 2회차보다도 훨~씬!!! 난이도를 낮췄는데요, 그게, 그, 제작자 기준이라서 여러분들은 어땠는지는 잘 모르겠습니다! (아예 대놓고 당당하게!) 일단 제시문 길이부터 한 방 압도하고, 해결해야 하는 논제 개수에서(7개!) 압도하고... 하기야, 논제 개수는 이미 2회차에서 극한까지 끌어 올려먹었기에 3회차에선 거리낌 없이 논제들을 꾸역꾸역 구겨 넣었습니다. 그나마 다행인 것은 지난 회차 논제들은 하나같이 더러운 것들이 많았고, 시간도 빠듯했지만, 이번에는 좀 널널한 분들도 몇 분 계셨을 듯 합니다.

이번 3회차의 주제는 '수학적 귀납법'대 '적분'의 비율이 한 3:7 정도 되지 않았나 싶었습니다. 솔직히 논제로 삼고 싶은 것들은 엄청나게 많았지만, 그것들은 나중에 또 다른 논제에서 써먹기로 했습니다.(논제 주제는 아껴야지요.) 걱정하지 마세요! 적분 관련 주제는 이거 말고도 3개 정도나 더 있으니까요. 이제 시작이여요....

자! 그럼 3회차 출제 의도, 예시 답안, 채점 기준을 공개하겠습니다! 이번 3회차 역시 증명하는 문제가 많기 때문에, 예시 답안은 참고용으로 삼으시고, 논증 과정에서 문제가 없는 경우에는 모두 정답 처리합니다. 물론, 계산실수는 1문제당 2점씩 감점합니다.

[논제1]

[논제 1-1] 자연수 n에 대한 참인 명제 $P(n)$ '수열 $\{a_n\}$은 유리수이다.'에 대하여, n이 한없이 커질 때 명제 $P(n)$이 '거짓'이 되는 수열 a_n을 하나 찾으시오.[5점]

출제 의도 : 명제와 극한 사이의 관계를 파악할 수 있다.

어.... [논제 1-1]의 경우는, 딱히 출제의도를 찾기 힘들어, 그냥 적당히 갖다 붙였습니다. 원래는 나중에 나오는 논술 주제에 관련된 내용을 증명하는 과정에서 튀어 나온 것인데, 이번 3회차가 적분만 다루기에는 썰렁해 보여서 한번 넣어봤습니다. ...그냥 '아 저런 것도 있구나'하고 생각하시고 넘어가시길 바랍니다.

예시 답안 : 임의의 자연수 n에 대한 명제 '수열 $\{a_n\}$은 유리수이다.'가 n이 한없이 커질 때 거짓이려면, $n\to\infty$일 때, a_n이 무리수가 되면 된다. (…… ①) 즉, 유리수로 구성된 수열 $\{a_n\}$의 극한값이 무리수인 수열을 찾으면 된다. 이러한 수열 중에는 '어떤 무리수 p를 소수점 이하 n번째 자리까지 표현한 수'를 수열 $\{a_n\}$으로 정한 수열도 포함된다. $a_n = \frac{1}{10^n}\left[10^n\pi\right]$ (단, 실수 x에 대하여 $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)로 두면, 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

$\{a_n\}$: 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, 3.141592, 3.1415926, ……

이 수열은 임의의 자연수 n에 대하여 a_n이 유리수이지만, $\lim_{n\to\infty} a_n = \pi$이므로 n이 한없이 커질 때,

무리수가 된다. (…… ②)

붙임 : '임의의 무리수 p에 대하여 $a_n = \frac{1}{10^n}[10^n p]$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n = p$이다.' 증명

임의의 자연수 n에 대하여 $10^n p = [10^n p] + \alpha$(단, $0 \le \alpha < 1$)이므로, 다음이 성립한다.

$$10^n p - 1 < [10^n p] = 10^n p - \alpha \le 10^n p$$

따라서 극한의 성질(Squeeze Theorum)에 의해 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10^n p - 1}{10^n} = p \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10^n}[10^n p] \le \lim_{n\to\infty}\frac{10^n p}{10^n} = p$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = p$$

채점 기준

주어진 명제가 n이 한없이 커질 때, '거짓'이 될 조건을 찾음. (①) …………………… 3점

①을 바탕으로 구하고자 하는 수열 a_n을 찾음. (②) ……………………………………… 2점

(이외에도 논리적으로 타당하고, 주어진 조건을 만족하는 수열 $\{a_n\}$을 찾은 경우 모두 정답처리.)

원래 이 논제는 '제시문 (나)를 참고하여, 임의의 자연수 n에 대한 참인 명제 $P(n)$에 대하여, n이 한없이 커질 때 거짓이 되는 명제 $P(n)$을 찾으시오.'로 하려 했지만, 아직 제가 미적분학을 제대로 배우질 못한 수험생이고, 또 논제의 발문에 오해의 소지가 있을 수도 있어서 지금의 형태로 바꿨습니다. 덕분에 난도는 확 낮아졌지만요.(사족으로, 이 문장에선 '난이도(難易度)'가 아니라 '난도(難度)'가 맞는 어휘입니다. '난도'는 뜻이 '어려운 정도'이고, '난이도'는 '쉽고 어려운 정도'이기 때문이지요. 수학만 해설하는 게 아니라 국어도 설명하는, 진정한 사족, 제작자....)

[논제 1-2] 정적분의 정의를 이용하여, 제시문 (라)의 첫 번째 부등식이 성립함을 보이시오. [5점]

출제 의도 : 정적분의 정의를 이용하여 정적분에 관한 부등식을 증명할 수 있다.

아마 이 논제는 교과서에도 실려 있을 수도 있습니다. 그렇지 않더라도 한두 번쯤은 증명해 보고 넘어간 분들도 많을 듯 합니다.

예시 답안 : 상수 $a < b$에 대하여, 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x) \ge g(x)$이고, 임의의 자연수 n에 대하여 $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$ (단, $k = 1, 2, 3, \cdots, n$)이라 하면 $a \le x_k \le b$이므로 다음이 성립한다.

$$f(x_k) \ge g(x_k)$$

이때, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$이라 하면, $\Delta x > 0$이므로 다음이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \ge \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\Delta x \quad (\cdots\cdots ①)$$

그런데, 제시문 (나)에 의해, 극한을 취해도 부등식의 대소 관계는 변하지 않고 성립한다. 따라서 극한의 성질(극한의 대소 관계)과 제시문 (다)의 정적분의 정의에 의해 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx \geq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g(x_k)\Delta x = \int_a^b g(x)dx \qquad (\ \cdots\cdots\ ②\ )$$

채점 기준

주어진 조건을 이용하여 ①의 부등식을 구함. ······················· 3점

극한의 성질(극한의 대소 관계)과 정적분의 정의를 이용해 제시문 (라)의 첫 번째 부등식이 성립함을 보임. (②) ··· 2점

(이외에도 정적분의 정의를 이용한 증명의 경우, 논리적으로 타당할 시 모두 정답처리. 단, 정적분의 정의를 이용하지 않은 경우 0점 처리.)

[논제 1-2]는 아주 기본 중의 기본에, 매우 쉬운 논제라서, [논제 1] 전체를 해결하는 데 아마 10분도 채 걸리지 않았을까 하고 생각해봅니다.

여기서 제시문 (라)의 두 번째 부등식은 직접적인 증명은 (저를 포함해서) 어렵지만, 아마 직관적으로 다들 이해하실 거라 생각합니다.

[논제 2]

[논제 2-1] 구간 $[a, b]$에서 아래로 볼록한 함수 $f(x)$와 구간 $[a, b]$의 임의의 원소 x_1, x_2, x_3에 대하여, 다음 부등식이 성립함을 보이시오. [10점]

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$$

출제 의도 : 함수의 볼록성의 정의를 이용하여 주어진 부등식을 해결할 수 있다.

첫 번째 부등식은 이미 제시문에 주어져 있기 때문에 쉽게 보일 수 있지만 문제는 아마 두 번째 부등식이었을 겁니다. 이 두 번째 부등식을 어떻게 잘 해결하느냐에 따라 [논제 2-2]를 해결할 수 있는 발판이 마련될 수도 있고, 안 될 수도 있기 때문이지요.

예시 답안 : 제시문 (마)에 의하면, $\alpha = x_1$, $\beta = x_2$, $t = \frac{1}{2}$라 하면, $f(x)$는 아래로 볼록한 함수이므로 다음이 성립한다.

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \ \cdots\cdots\ ㉠\ (\ \cdots\cdots\ ①\ )$$

이때, $\alpha = \frac{x_1+x_2}{2}$, $\beta = x_3$, $t = \frac{2}{3}$을 제시문 (마)의 부등식에 대입하면 다음과 같다.

$$f\left(\frac{2}{3}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{1}{3}x_3\right) \leq \frac{2}{3}f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{1}{3}f(x_3)$$

그런데, ㉠에 의해 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$이므로 다음이 성립한다.

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{1}{3}x_3\right)\le \frac{2}{3}f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{1}{3}f(x_3)\le \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$$

(…… ②)

채점 기준
 제시문 (마)를 이용하여 첫 번째 부등식이 성립함을 보임. (①) …………………………………… 3점
 제시문 (마)와 부등식 ㉠을 이용하여 두 번째 부등식이 성립함을 보임. (②) …………………… 7점
(이외에도 논리적으로 타당할 시 모두 정답처리.)

 이 논제도 비교적 쉬운 축에 속하는 논제입니다. 이제 남은 4개의 논제를 어떻게 공략하느냐에 따라 논술 점수가 갈리겠군요!

 [논제 2-2] 2 이상의 임의의 자연수 n에 대하여 임의의 수열 $\{t_n\}$가 $0<t_i<1$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$이고, $\sum_{i=1}^{n}t_i=1$이라 하자. 구간 $[a,b]$에서 아래로 볼록한 함수 $f(x)$와 구간 $[a,b]$의 임의의 원소 x_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. [25점]

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}t_ix_i\right)\ \le\ \sum_{i=1}^{n}t_if(x_i)$$

출제 의도 : 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 부등식이 항상 성립함을 보일 수 있다.

 처음 이 부등식을 접하는 분들은 도대체 어떻게 보여야 할지 난감했을 겁니다. 하지만, 우리의 '참으로 친절하신' 제작자가 이미 앞 논제에서 이 논제를 해결할 수 있는 실마리를 던졌지요.

예시 답안 : 제시문 (가)에 따라 수학적 귀납법으로 이 부등식을 증명하자.

ⅰ) $n=2$일 때
$t_1+t_2=1$이므로, 제시문 (마)에 의해 다음이 성립한다. (…… ①)

$$f(t_1x_1+t_2x_2)\le t_1f(x_1)+t_2f(x_2)\ \cdots\cdots\ ㉡$$

ⅱ) $n=m$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하고, $n=m+1$일 때도 성립함을 보이자.
$0<b_i<1$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m+1)$이고, $\sum_{i=1}^{m+1}b_i=1$인, $m+1$개의 항으로 이루어진 임의의 수열 $\{b_l\}$를 설정하자. 또한 상수 B에 대하여 $\sum_{i=1}^{m}b_i=B>0$라 하자. (…… ②) 그러면 구간 $[a,b]$의 임의의 원소 $x_i(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m+1)$와 $t=1-b_{m+1}=B$에 대하여 $t+(1-t)$ $B+b_{m+1}=1$이므로 제시문 (마)에 의해 다음이 성립한다. ($\frac{b_i}{B}a\le\frac{b_i}{B}x_i\le\frac{b_i}{B}b$이므로

$a \le \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i}{B} x_i \le b$가 성립함.)

$$f\left(B\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{b_i x_i}{B}\right) + b_{m+1} x_{m+1}\right) \le f\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{b_i x_i}{B}\right) \times B + b_{m+1} f(x_{m+1}) \text{ (…… ③)}$$

이때, $\sum_{i=1}^{m} \frac{b_i}{B} = 1$이므로, 가정에 의해 $f\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{b_i x_i}{B}\right) \le \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i}{B} f(x_i)$이 성립한다.

$$\therefore \quad f\left(\sum_{i=1}^{m+1} b_i x_i\right) \le f\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{b_i x_i}{B}\right) \times B + b_{m+1} f(x_{m+1}) \le \sum_{i=1}^{m+1} b_i f(x_i) \text{ (…… ④)}$$

$n = m+1$일 때도 성립하므로 ⅰ)과 ⅱ), 제시문 (가)에 의해 주어진 부등식은 2 이상의 임의의 자연수 n에 대하여 성립한다. (…… ⑤)

채점 기준

주어진 부등식이 $n=2$일 때 성립함을 보임. (①) ………………………………………… 2점
수열 $\{b_i\}$을 조건에 맞게 적절하게 설정함. (②) …………………………………………… 9점
수열 $\{b_i\}$과 제시문 (마)를 이용하여 ③의 부등식을 유도함. ………………………… 7점
가정에 의해 부등식 ④가 성립함을 보임. ………………………………………………… 4점
ⅰ)과 ⅱ), 제시문 (가)를 종합하여 결론을 도출함. (⑤) ……………………………… 3점
(이외에도 논리적으로 타당하면 모두 정답처리.)

이 부등식은 아마 수리논술을 꽤 해봤던 분들이라면 바로 아실만 한 부등식입니다. 그 정도로 꽤나 많이 다뤄졌던 부등식이고, 여러 부등식을 증명하는 데 쓰이는 부등식이기 때문입니다. 참고로, 저 부등식의 이름은 '옌센(혹은 젠센) 부등식 (Jensen's inequality)'이며, 당연히 함수 $f(x)$가 아래로 볼록인 경우에는 부등호의 방향이 반대로 바뀝니다. 이는 바로 다음 논제에서 쓰이는 성질입니다.

[논제 3]

[논제 3-1] 임의의 실수 x에 대하여 $f(x) > 0$인 임의의 함수 $f(x)$에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. [25점]

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \ \ge \ e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx}$$

출제 의도 : [논제 2-2]의 부등식과 제시문의 부등식, 정적분의 정의를 이용하여 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.

자, 이제 [논제 2-2] 이후의 첫 번째 고비입니다. 아마 주어진 부등식을 어떻게 해야 할지 감이 잘 안 잡힐 수도 있습니다. 하지만, 이 논제만 잘 해결하면 나머지 두 논제도 비교적 쉽게 해결할 수 있는 발판이 마련됩니다.

예시 답안 : $g(x) = \ln x$라 하면, $g(x)$는 양수범위에서 위로 볼록한 함수이다. 그런데, 제시문 (마)와 [논제 2-2]를 종합하면, $g(x)$가 위로 볼록한 함수일 때, 2 이상의 임의의 자연수 n에 대하여 임의의

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

수열 $\{t_n\}$가 $0 < t_i < 1$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$이고, $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$일 때, 임의의 양수 x_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$에 대하여 $g\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} t_i g(x_i)$임을 알 수 있다. (…… ①) 그런데, x_i는 임의의 양수이므로, $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$인 x_k에 대하여 x_i를 $f(x_k) > 0$로 치환할 수 있으므로 다음이 성립한다. (k와 i는 Σ 안의 변수이므로, 전체의 식에는 영향을 주지 못한다.)

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k)\right) \geq \sum_{k=1}^{n} t_k \ln f(x_k) \quad (\cdots\cdots ②)$$

이때, $t_k = \frac{1}{n}$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$이라 하면 위 부등식은 다음과 같이 바꿀 수 있다.

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b-a} f(x_k)\Delta x\right) = \ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_k)\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b-a} \ln f(x_k)\Delta x \quad (\cdots\cdots ③)$$

따라서 양 변에 극한을 취해주면 극한의 성질과 정적분의 정의에 의해 주어진 부등식이 성립한다.
($\because$ $\ln x$는 연속함수이므로 $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha > 0$($\alpha$는 상수)이면, $\lim_{x\to a} \ln f(x) = \ln\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = \ln\alpha$이다.)

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b-a} f(x_k)\Delta x\right) \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b-a} \ln f(x_k)\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx \quad (\cdots\cdots ④)$$

이때, $p \leq q$인 임의의 실수에 대해 $e^p \leq e^q$이므로, 양 변을 자연 상수 e를 밑으로 하는 지수함수의 지수로 올려주면 주어진 부등식이 나온다.

$$\therefore \ \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \geq e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx} \quad (\cdots\cdots ⑤)$$

채점 기준

제시문 (마)와 [논제 2-2]를 통해 $g(x) = \ln x$에 대해 $g\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} t_i g(x_i)$를 유도함.(①) ⋯ 5점
x_i가 임의의 양수임을 이용해 x_i 대신에 $f(x_k)$를 ①의 부등식에 대입함. (②) ………………… 7점
수열 $\{t_n\}$가 임의의 수열임을 이용해 $t_k = \frac{1}{n}$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$를 ②의 부등식에 대입함. (③) …… 6점
극한의 성질과 정적분의 정의를 이용해 ④를 유도함. ………………………………………………… 4점
지수함수의 성질을 이용해 주어진 부등식을 유도함. (⑤) ……………………………………………… 3점
(이외에도 논리적으로 타당한 경우 모두 정답처리. 단, 맨 처음에 주어진 식에 자연로그를 취할 시, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx > 0$임을 보이지 않을 경우 5점 감점.)

처음에 저 부등식을 보고 $f(x) > 0$이므로 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx > 0$이라고 생각해서 양 변에 로그를 취

하면 로그 함수의 볼록성을 이용해서 어떻게든 가능할 것 같아 보였을 겁니다. 또, [논제 2-2]의 부등식을 이용해야 한다는 것도 생각을 해 봤을 수도 있을 겁니다. 하지만, 결정적으로 ②의 과정을 생각하지 못한다면 이 부등식은 증명하기 매우 어려웠을 겁니다. 여기서 제작자가 말하고 싶은 바는 **'정적분은 수열의 무한합'**, 즉 **'정적분은 무한급수'**라는 것입니다. 매우 중요해서 처음으로 밑줄에, 형광펜에, 빨간 글씨로 썼습니다. 너무나도 중요해서 다시 한 번 언급하자면 **'정적분은 무한급수'**입니다. 때문에 수1의 '수열의 극한' 단원에서 최고차항의 계수가 m인 p차 다항식 $f(x)$에 대하여 어떤 수열 $a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ 꼴로 주어지면, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^{p+1}} = \int_0^1 mx^p dx$로도 계산할 수 있다는 겁니다. (물론, 상황에 따라 적분구간과 피적분함수는 달라지겠지만요.)

예를 들어, 어떤 수열을 계산한 결과가 $a_n = \sum_{k=1}^{n}(k^4 - 30k^2 + 205)$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^5}$를 계산하는 문제를 푼다 합시다. 직접 수열을 풀어서 극한을 구할 수도 있지만, 정적분을 이용하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^5}$ $= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^4 - \frac{30}{n^2}\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{205}{n^4}\right)\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}30\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \frac{205}{n^4}\right) = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$ 입니다. 솔직히 말하자면, 현행 고등학교 교육과정(7차 개정 교육과정)상, p가 4 이상의 자연수일 때, $k=1$부터 $k=n$까지의 k^p의 값의 합을 한 번에 구하는 공식(예를 들면 $\sum_{k=1}^{n}k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ 등)을 배우지 않았기 때문에, 노가다를 뛰어 $\sum_{k=1}^{n}k^4$를 구하지 않는 이상 (문제를 해결하는 사람에 한해) 대부분이 저렇게 적분으로 계산할 겁니다. 물론, 수능 시험에서는 k가 4차 이상인 경우는 나오지 않지만요.(3차인 경우도 거의 나오지 않습니다.) 하지만 $a_n = \sum_{k=1}^{n}(k^2 - k)$같이 k의 차수가 낮을 때, 직접 공식을 써서 a_n을 n에 대한 식으로 바꾼 뒤에 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}$을 계산하기 보다는 위의 적분을 이용해 구하는 방법도 생각해 볼 수 있습니다. 적분을 써서 구하면 시간이 매우 빨리 단축되고, 정확도도 높아집니다.(거의 30초 정도. 적분을 쓰지 않고 계산하는 경우, 계산실수로 구한 값이 <보기>에 없을 때, 다시 계산하는 경우에 비하면 거의 1분 이상 단축 가능.) 특히 논술에서는 다항식 말고도 분수식, 무리식 등에서 어떤 수열의 극한값이 존재하는지에 대한 여부를 판단할 때 매우 유용하게 쓰일 수 있습니다. 하지만, 식이 많이 복잡한 경우, 정적분으로 표현하려고 하다가 시간이 다 가는 경우도 있을 수 있으며, dx가 되는 부분, 혹은 적분구간을 잘못 변환해서 오히려 망칠 수도 있으니 주의하시기 바랍니다.(도대체 어쩌라는 건지.....)

[논제 3-2] 실수 전체집합에서 정의된 임의의 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $g(x) > 0$일 때, 다음의 부등식 이 성립함을 보이시오. [15점]

$$\left(\int_a^b g(x)\{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right) \geq \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$

출제 의도 : 함수의 볼록성을 이용하여 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.

논술 공부를 좀 해봤던 분들이라면 다음과 같은 부등식은 많이 본 적이 있을 겁니다.

$$\left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right) \ge \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$

이런 형태에 익숙했던 분들이라면 아마 저 부등식을 본 순간 '어?! 뭐야?! 저거, 제곱 잘못 쓴 거 아냐?!'하고 당황했을 텐데요... 저 부등식 맞습니다. 하지만 [논제 3-1]을 해결하신 분들은 그래도 어느 정도 감을 잡았을 수 있었을 겁니다. 여기서 [논제 3-1]의 ①이 두 번 쓰였거든요.

예시 답안 : 함수 $h(x)=x^2$는 실수 전체집합에서 아래로 볼록한 함수이므로 [논제 2-2]의 부등식을 만족한다. 이때, x_i는 임의의 실수이므로, x_i 대신에 $f(x_k)$(단, $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$, $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$)를 대입해도 부등식은 성립한다. 따라서 $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$인 임의의 양수 t_k에 대하여 다음과 같다.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k)\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} t_k \{f(x_k)\}^2 \quad (\ \cdots\cdots\ ①\ )$$

이때, [논제 2-2]와 위에서와 같은 논리로 $G = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) > 0$인 G에 대하여 $t_k = \frac{1}{G} g(x_k) > 0$로 대입할 수 있다. ($\because \sum_{k=1}^{n} \frac{g(x_k)}{G} = 1$) 따라서 이를 대입하면 다음과 같다.

$$\left(\frac{1}{G}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)g(x_k)\right)^2 \le \frac{1}{G}\sum_{k=1}^{n} g(x_k)\{f(x_k)\}^2 \quad (\ \cdots\cdots\ ②\ )$$

이때 $G = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)$로 두었으므로 위 부등식은 다음과 같다.

$$\left(\sum_{i=k}^{n} f(x_k)g(x_k)\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} g(x_k)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g(x_k)\{f(x_k)\}^2\right)$$

따라서 양 변에 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$을 곱해준 후 극한을 취해주면, 극한의 대소 관계와 정적분의 정의에 의해 다음이 성립한다. (이때, 우변의 두 극한이 서로 정적분 값으로 수렴하므로 다음과 같이 쓸 수 있다.)

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=k}^{n} f(x_k)g(x_k)\Delta x\right)^2 \le \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} g(x_k)\Delta x\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g(x_k)\{f(x_k)\}^2\Delta x\right) \\ &= \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g(x_k)\Delta x\right)\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g(x_k)\{f(x_k)\}^2\Delta x\right) = \left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)\{f(x)\}^2 dx\right)\end{aligned}$$

(⋯⋯ ③)

채점 기준

함수 $h(x)=x^2$에 대한 [논제 2-2]의 부등식에 x_i 대신에 $f(x_k)$를 대입해 ①을 유도함. ……… 4점

$G = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)$인 G에 대하여 $t_k = \frac{1}{G} g(x_k) > 0$을 ①에 대입해 ②를 유도함. …………………… 7점

극한의 성질과 정적분의 정의에 의해 주어진 부등식이 성립함을 보임. (③) ……………………… 4점

(이외에도 논리적으로 타당할 시 모두 정답처리. 단, 함수 $h(x)=\sqrt{x}$로 설정한 경우는 ①을 0점 처

리. 또한, ③에서 위와 같이 우변의 두 극한이 서로 수렴함을 서술하지 않은 경우 2점 감점.)

이 논제에서 함수 $h(x)=\sqrt{x}$로 설정한 경우, $x \ge 0$이 정의역이므로 $g(x)f(x) \ge 0$에서 $f(x) \ge 0$만 가능하기 때문에 논제의 '임의의 함수 $f(x)$'라는 조건을 만족하지 못해서 ①을 0점 처리하기로 하였습니다. 또한, ③에서 극한 $\lim_{n \to \infty}\left(\sum_{k=1}^{n} g(x_k)\Delta x\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g(x_k)\{f(x_k)\}^2\Delta x\right)$은 극한 $\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n} g(x_k)\Delta x$, $\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n} g(x_k)\{f(x_k)\}^2\Delta x$가 각각 값이 존재하는 정적분 $\int_a^b g(x)dx$, $\int_a^b g(x)\{f(x)\}^2dx$로 수렴하기 때문에 나눠서 계산한 값으로 각각 수렴할 수 있습니다. 때문에 이에 대한 언급이 있어야 저 성질을 쓸 수 있습니다.

이 부등식에 대해서 좀 더 얘기해보면, 사실 저 부등식은 항상 $g(x)<0$여도 성립하고, $g(x)=0$이어도 성립합니다. 때문에 종합하면 항상 $g(x) \ge 0$이거나 $g(x) \le 0$이면 이 부등식은 성립합니다. 하지만, $g(x)$의 부호가 바뀌는 경우에 대해서는.... 잘 모르겠네요. 아래로 볼록한 함수는 t_k가 0 이상 1이하인 경우에만 성립하기 때문에 $g(x)$가 임의의 함수인 경우에는 어떻게 될지는 잘..... 직관적으로는 $g(x)$가 임의의 함수여도 성립할 것 같은데, 마땅한 증명법이 떠오르지 않네요. 혹시 뭔가 아시거나, 임의의 $g(x)$에 대해서도 성립함을 보이신 분(부등호 방향이 유지 혹은 반대방향)은 제작자의 이메일(exito2016@daum.net)으로 보내 주시면 감사하겠습니다.

[논제 3-3] 실수 전체집합에서 정의된 임의의 연속 함수 $f(x)>0$에 대하여, 실수 p에 대한 방정식 $\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b \{f(x)\}^p dx\right) - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)^p = 0$의 근이 실수 전체집합에 적어도 2개 이상 존재함을 보이시오. (단, 필요하다면, 임의의 함수 $f(x)>0$에 대해 $g(t)=\int_a^b \{f(x)\}^t dx$는 임의의 실수 t에 대해 연속임을 이용하시오.)   [20점]

출제 의도 : [논제 2-2]의 부등식과 중간값 정리를 이용하여 주어진 방정식의 근의 개수가 2개 이상임을 보일 수 있다.

자! 마지막 논제입니다! 이제 아시는 분들은 아시겠지만, 어떤 방정식을 주고 그 근의 개수가 적어도 몇 개 이상인지 보이는 논제(혹은 수능 문제)는 대부분이 중간값 정리 혹은 평균값 정리를 쓰면 해결된다는 것을 아실 겁니다. 솔직히 까놓고 말해 고등학교 수학을 배운 수준에선 근의 개수에 대해 언급하는 내용은 저 두 개가 전부이니, 결국 둘 중 적어도 하나는 쓰일 수밖에요. 게다가 아예 참고용으로 대놓고 중간값 정리나 평균값 정리를 쓰라고 하네요.

예시 답안 : 함수 $h(x)=x^p$라 하자.(단, $x>0$) 그러면 p의 범위에 따라 h의 볼록성이 달라진다. 따라서 다음과 같이 5개의 경우로 나눈다.
i) $p>1$인 경우
함수 $h(x)=x^p$는 아래로 볼록한 함수($\because h''(x)=p(p-1)x^{p-2}>0$)이므로 [논제 2-2]의 부등식을 만족한다. 이때, x_i 대신에 $f(x_k)$(단, $x_k=a+\frac{b-a}{n}k$, $k=1, 2, 3, \cdots, n$)을 대입해도 부등식은 성

립한다. 또한 $t_k = \frac{1}{n}$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$이라 하면 다음이 성립한다.

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(x_k)\right)^p = \left(\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x\right)^p \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\{f(x_k)\}^p = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)\}^p\Delta x$$

이때, 양 변에 극한을 취해주면, 극한의 대소 관계와 정적분의 정의에 의해 다음이 성립한다.

$$\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b\{f(x)\}^p dx\right)-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)^p \ge 0$$

ⅱ) $p=1$인 경우

에 $p=1$을 대입하면 $\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)dx\right)-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)=0$이 된다.

ⅲ) $0<p<1$인 경우

함수 $h(x)=x^p$는 위로 볼록($\because h''(x)=p(p-1)x^{p-2}<0$)한 함수이므로 위의 ⅰ)의 경우에서 부등호의 방향만 바뀐 부등식이 성립한다. 즉, $\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b\{f(x)\}^p dx\right)-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)^p \le 0$이다.

ⅳ) $p=0$인 경우

ⅱ)에서와 마찬가지로 $p=0$을 대입하면 $\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b dx\right)-1=0$이 된다.

ⅴ) $p<0$인 경우

ⅰ)에서와 마찬가지로 함수 $h(x)=x^p$는 아래로 볼록($\because h''(x)=p(p-1)x^{p-2}>0$)한 함수이기 때문에 ⅰ)과 같은 부등식이 성립한다.

위의 ⅰ) ~ ⅴ)를 종합하면 p의 범위에 따른 함수 $k(p)=\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b\{f(x)\}^p dx\right)-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)^p$의 값의 부호는 다음과 같다.

$$\begin{cases} k(p)\ge 0 & (p>1 \text{ or } p<0) \\ k(p)=0 & (p=1 \text{ or } p=0) \\ k(p)\le 0 & (0<p<1) \end{cases} \quad (\cdots\cdots ①)$$

이때, $\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b\{f(x)\}^p dx\right)$는 임의의 실수 p에 대해 연속이고, 제시문 (라)의 두 번째 부등식에 의해 $f(x)>0$에서 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx>0$이므로 $\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)^p$는 p에 대한 지수함수가 되어 모든 실수 p에 대해 연속이다. 따라서 함수 $k(p)$는 연속함수간의 합(차)로 이루어진 함수이므로 실수 전체집합에서 연속이다. (…… ②) 여기서 중간값 정리에 의해 $\alpha<0<\beta<1<\gamma$인 세 상수 α, β, γ에 대해 $k(\beta)\le 0\le k(\alpha)$, $k(\beta)\le 0\le k(\gamma)$이므로, $k(p)=0$인 p가 구간 $[\alpha,\beta]$, $[\beta,\gamma]$ 사이에 적어도 하나 이상씩 총 두 개 이상 존재하고, 그 값 중에 $p=0$, $p=1$이 포함되어 있다.(…… ③)

채점 기준

p 값에 따라 5개의 경우를 나눠서 ⅰ) ~ ⅴ)을 보임. (①) …………………… ⅰ) ~ ⅴ)에 각 2점씩, p 값에 따른 $k(p)$의 부호 정리에 3점으로 총 13점

함수 $k(p)=\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b\{f(x)\}^p dx\right)-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)^p$가 실수 전체집합에서 연속임을 보임. (②) ……………………………… 4점

중간값의 정리로 방정식 $k(p)=0$의 실근이 적어도 2개 이상 존재함을 보임. (③) ……………… 3점
(이외에도 논리적으로 타당하면 모두 정답처리. 단, ②에서 함수 $k(p)$가 연속임을 보이지 않고 중간값 정리를 쓴 경우 ②에서 득점 없음. 또한, ③에서 '$p=0$, 1이므로 근은 두 개 이상 존재함'이라고만 서술한 경우(중간값 정리 이용하지 않은 경우) 득점 없음.)

채점하실 때, ③에서 '$p=0$, 1이므로 근은 두 개 이상 존재함'이라고만 서술한 경우(즉, 중간값 정리 이용하지 않은 경우) 또한 논리적이므로 정답 처리해야 한다고 생각할 수 있지만, 임의의 함수의 근의 개수를 판별할 때는 중간값 정리(혹은 평균값 정리)를 이용해야 합니다. 물론, '두 개 이상'이라는 말에는 '두 개만 존재'하는 상태를 포함하지만, 보다 엄밀한 증명을 위해 중간값 정리를 사용한 경우에만 정답으로 인정하기로 했습니다.
이 논제에서 ①까지 큰 무리 없이 도달했다면 ②, ③을 해결하기란 정말 쉬웠을 겁니다. 이때, ③에서 교과서에 실려 있는 중간값 정리는 등호가 빠져있는 부등식('$f(a)<f(c)=k<f(b)$인 $a<c<b$' 형태)이지만, 이를 조금만 확장하면 등호가 들어가도 문제될 것이 없다는 것을 알 수 있습니다.
이 논제는 조금 문제가 있는 논제로, 사실 제작자가 아직 대학 미적분학을 제대로 공부하지 못해서 $g(t)=\int_a^b \{f(x)\}^t dx$가 임의의 t에 대해 연속인지는 간략하게는 증명했지만 엄밀한 증명은 하지 못했습니다. 다행히 위키님의 힘을 빌려서 겨우 증명했는데요, 조금 조잡합니다. 솔직히 리만적분은 알지만, 푸비니의 정리는 그냥 그런게 가능하다는 것만 알아요... 때문에 정리의 활용을 잘못했을 수도.....(어?! 그럼 논제가 성립하지 않는데?!) 만약 이 해설을 보시는 분 중 대학 수학을 전공하시는 분이 계신다면 아래의 증명에서 잘못된 것이 있다면 이메일(exito2016@daum.net)로 알려주세요.

임의의 함수 $f(x)>0$에 대해, $g(t)=\int_a^b \{f(x)\}^t dx$는 임의의 실수 t에 대해 연속이다.

pf) 실수 전체집합에서 정의된 임의의 연속함수 $f(x)>0$에 대하여 이변수함수 $g(x,y)=\{f(x)\}^y$를 임의의 영역 $S\in\mathbb{R}^2$에 대한 함수라 하자. 이때, 연속함수는 리만적분이 가능하므로, 임의의 직사각형 영역 $S=[a,b]\times[c,t]$에 대해서 $g(x,y)$는 $\forall x\in[a,b]$인 x에 대해 구간 $[c,t]$에서 y에 대해 리만적분이 가능하며, 마찬가지로 $\forall y\in[c,t]$인 y에 대해 구간 $[a,b]$에서 x에 대해 리만적분이 가능하다. (x를 상수로 보면, $g(x,y)$는 y에 대한 지수함수이고, y를 상수로 보면 $g(x,y)$는 $f(x)$의 y제곱 꼴이므로 연속, 즉 리만적분이 가능하다.) $G_x(x,y)$를 x에 대한 $g(x,y)$의 부정적분이라 하면, $h(t)=\iint_S g(x,y)dA=\int_c^t\int_a^b\{f(x)\}^y dxdy=\int_c^t\{G_x(b,y)-G_x(a,y)\}dy$이다. ($\because$ 푸비니 정리) 이때, 미적분학의 기본 정리에 의해 $\frac{dh}{dt}=G_x(b,t)-G_x(a,t)=\int_a^b g(x,t)dx$이고, $G_x(x,y)$는 임의의 x, y에 대해 연속($\because$ 연속 함수를 적분한 함수 또한 연속 함수이다.)이므로 임의의 실수 t에 대하여 $G_x(b,t)-G_x(a,t)$또한 연속이다. 따라서 $f(x)>0$일 때, $g(t)=\int_a^b\{f(x)\}^t dx$는 임의의 실수 t에 대하여 연속이다.

- Q. E. D

원래 푸비니의 증명이란 위 조건에서 (t를 d라는 상수로 둠) $\iint_S g(x,y)dA=\int_c^d\int_a^b g(x,y)dxdy$

$=\int_a^b\int_c^d g(x,y)dydx$이 성립하는 것인데, 이 증명에서 $h(t)=\iint_S g(x,y)dA=\int_a^b\int_c^t \{f(x)\}^y dydx$로 두지 않은 이유는 다음과 같습니다. 푸비니의 정리에 의해 위의 등식에서 $h(t)=\int_a^b\int_c^t \{f(x)\}^y dydx=\int_a^b \frac{\{f(x)\}^t-\{f(x)\}^c}{\ln f(x)}dx$인데, $f(k)=1$인 실수 k가 구간 $[a,b]$에 존재할 경우 $\ln f(x)=0$이 되어서 피적분 함수가 $x=k$에서 무한대로 발산하는 불연속 함수가 되기 때문입니다. 물론, $g(x,y)$는 연속한 함수이므로 $\iint_S g(x,y)dA$는 어떤 값으로 수렴하며, 따라서 $\int_a^b \frac{\{f(x)\}^t-\{f(x)\}^c}{\ln f(x)}dx$ 또한 어떤 값으로 수렴하지만, 일단은 피적분 함수가 연속인 것이 편하므로(사실, 연속이 아니어도 적분을 계산할 수 있습니다.) x에 대해서 적분한 $G_x(x,y)$를 사용하였습니다.(이 함수는 확실한 연속함수이니까요.)

이것으로 3회차도 모두 끝났습니다!! 이번 회차 난이도는 1회차보다는 조금 어렵고, 2회차보다는 비교적 쉬운 편이었다고 생각합니다. 2회차 난이도를 100으로 보면, 1회차는 한 65정도 되고, 이번 회차는 75정도 되었다고 생각합니다. 물론, 이는 사람에 따라 달라지기 때문에 절대적으로 그런 것이 아니라, 어디까지나 제작자 개인의 생각임을 밝힙니다. '무슨! 난 1회차가 더 어려웠다고!'하시는 분들께는 할 말이 없지만, 대다수의 분들께선 아마 제 말에 동의하실 겁니다. (저도 논제를 만들고 나서 예시 답안을 만들기 위해 직접 논제를 풀기 때문에 어느 정도의 난이도 측정은 가능하....리라고 믿습니다.) 각설하고, 저는 언능 4회차 찍어내러 후다닥 가보겠습니다~!