# 2016학년도 논술 모의고사 5회 문제지 (수학)

성명 : (                    )

제한 시간 : 120분, 총점 : 200점

다음 제시문을 읽고 [논제 1] ~ [논제 3]에 답하시오.

(가) 자연수 $a$ 이상의 모든 자연수 $n$에 대해서 명제 $P(n)$이 성립함을 보이려면 다음과 같은 과정을 거치면 된다.

1) 어떤 자연수 $a$에 대하여 명제 $P(n)$이 성립함을 보인다.
2) $a$ 이상의 자연수 $k$에 대하여 $n=k$일 때, 명제 $P(k)$가 성립한다고 가정한 후, $n=k+1$일 때의 명제 $P(k+1)$이 성립함을 보인다.
3) 필요하다면 $a$ 이상 자연수 $k$에 대하여 $a \le m \le k$인 모든 자연수 $m$에 대하여 $n=m$일 때의 명제 $P(m)$이 성립한다고 가정한 후, $n=k+1$일 때의 명제 $P(k+1)$이 성립함을 보인다.

이러한 증명 방법을 '수학적 귀납법'이라고 한다.

(나) 닫힌구간 $[a, b]$의 임의의 두 원소 $\alpha$, $\beta$와, $0 \le t \le 1$인 임의의 실수 $t$에 대하여 연속 함수 $f(x)$가

$$f(t\alpha+(1-t)\beta) \ge tf(\alpha)+(1-t)f(\beta)$$

가 성립하면, 이 함수를 '구간 $[a, b]$에서 위로 볼록하다.'고 한다. 이를 $n$개의 임의의 양수 $t_i$, 임의의 실수 $x_i$ ($i=1$, 2, 3, $\cdots$, $n$, $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$)와 위로 볼록한 함수 $f(x)$에 대한 일반식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \le f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right)$$

이러한 부등식을 옌센(젠센) 부등식(Jensen's Inequality)라 하며, $f(x)$가 아래로 볼록한 경우는 부등호 방향이 반대이다.

(다) 임의의 자연수 $n$에 대한 임의의 실수 $x_i$, $y_i$ ($i=1$, 2, 3, $\cdots$ , $n$)와 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$인 임의의 두 양수 $p$, $q$에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

이 부등식을 횔더 부등식(Hölder's Inequality)이라 한다. 여기서 $x_i y_i$가 모두 0인 경우는 자명하게 성립하므로 부등식은 $x_i y_i$가 모두 0이 아닌 경우만(즉, 적어도 1개 이상의 $x_i y_i$가 0이 아닌 경우) 증명하면 된다.

(라) 임의의 자연수 $n$대한 임의의 $x_i$, $y_i$ ($i=1$, 2, 3, $\cdots$ , $n$)와 $p \ge 1$인 임의의 양수 $p$에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

이 부등식을 민코프스키 부등식(Minkowski Inequality)이라 한다. 횔더 부등식과 마찬가지로 이 부등식에서 $x_i+y_i$가 모두 0인 경우는 자명하게 성립하므로, 부등식은 $x_i+y_i$가 모두 0이 아닌 경우만(즉, 적어도 1개 이상의 $x_i+y_i$가 0이 아닌 경우) 증명하면 된다.

(마) 어떤 두 상수 $a<b$에 대하여 닫힌구간 $[a, b]$에서 정의되고, 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값을 다음과 같이 정의한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \qquad \left(\text{단, } x_k = a+\frac{b-a}{n}k,\ \Delta x = \frac{b-a}{n}\right)$$

여기서, 미적분학의 기본 정리에 의하면, $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$인 함수 $F(x)$에 대해, $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$로 계산한다.

※이하의 모든 논제에서 $a$, $b$는 $a \le b$인 임의의 실수이고, 모든 부등식에서 등호 조건은 생략한다.

[논제 1] 아래의 논제에 답하시오.

[논제 1-1] 임의의 실수 $t$와 임의의 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $h(t)=\int_a^b \{f(x)t-g(x)\}^2 dx \ge 0$임을 보이고, 이를 이용하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. [10점]

$$\left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right) \ge \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

# 2016학년도 논술 모의고사 5회 문제지 (수학)

성명 : (                    )

제한 시간 : 120분

[논제 1-2]  자연수 $n$에 대한 임의의 $2^n$개의 연속함수 $f_i(x)(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$에 대해 다음 부등식이 성립함을 보이시오.[20점]

$$\prod_{i=1}^{2^n}\int_a^b \{f_i(x)\}^{2^n}dx \ge \left(\int_a^b\left(\prod_{i=1}^{2^n}f_i(x)\right)dx\right)^{2^n}$$

[논제 1-3]  제시문 (다)의 부등식이 성립한다고 가정하자. 임의의 연속함수 $f(x)$, $g(x)$와 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$인 양수 $p$, $q$에 대하여 부등식 $\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$이 성립함을 보이시오.  [15점]

[논제 1-4]  자연수 $n$에 대한 임의의 $n$개의 연속함수 $f_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (힌트 : [논제 1-3]의 식에서 $p$를 자연수라 두고 식을 변형하여 이용하시오.)  [25점]

$$\left(\int_a^b\left|\prod_{i=1}^{n}f_i(x)\right|dx\right)^n \le \prod_{i=1}^{n}\int_a^b |f_i(x)|^n dx$$

[논제 2] 아래의 논제에 답하시오.

[논제 2-1]  제시문 (다)의 $q$, $y_i$에 대하여 $\lambda_i=\dfrac{|y_i|^q}{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q}$라 하면, $\lambda_i>0$이고, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$이다. 이와 제시문 (나)를 이용하여 제시문 (다)의 부등식이 성립함을 보이시오. (힌트 : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$에서 $p(q-1)=q$이다.)  [30점]

[논제 2-2]  자연수 $n$, $m$와 자연수 $i$, $k$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m)$에 대해 0이 아닌 임의의 실수 $a_{(k,\,i)}$, $b_k$에 대하여 $b_k>0$이고, $\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{b_k}=1$일 때, 모든 자연수 $m$에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.  [25점]

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\prod_{k=1}^{m}a_{(k,\,i)}\right| \le \prod_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{(k,\,i)}|^{b_k}\right)^{\frac{1}{b_k}}$$

[논제 2-3]  [논제 2-2]를 이용하여 [논제 1-4]의 부등식을 증명하시오.  [15점]

[논제 3] 아래의 논제에 답하시오.

[논제 3-1]  자연수 $n$에 대한 임의의 실수 $a_i$, $b_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$에 대하여, 다음을 이용하여 제시문 (라)의 부등식이 성립함을 보이시오. (힌트 : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$에서 $q(p-1)=p$이다.)  [20점]

| |
|---|
| ㄱ) 횔더 부등식에 $x_i=a_i$, $y_i=\lvert a_i+b_i\rvert^{p-1}$을 대입한 부등식 ㉠을 얻는다. |
| ㄴ) 횔더 부등식에 $x_i=b_i$, $y_i=\lvert a_i+b_i\rvert^{p-1}$을 대입한 부등식 ㉡을 얻는다. |
| ㄷ) 임의의 실수 $a$, $b$에 대하여 $\lvert a+b\rvert\le\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$이다. |

[논제 3-2]  자연수 $n$, $m$에 대한 임의의 실수 $a_{(k,\,i)}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m)$와 $p\ge 1$인 임의의 양수에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.  [25점]

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{m}a_{(k,\,i)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{(k,\,i)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

[논제 3-3] 임의의 자연수 $m$에 대한 임의의 $m$개의 연속함수 $f_k(x)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m)$와 $p\ge 1$인 임의의 양수 $p$에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.  [15점]

$$\left(\int_a^b\left|\sum_{k=1}^{m}f_k(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{k=1}^{m}\left(\int_a^b |f_k(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

# 2016학년도 논술 모의고사 5회 답안지 (수학)

성명 : (                    )

제한시간 : 120분

※뒷면의 주의사항을 잘 읽고 답안지에 기입하시오.

# 2016학년도 논술 모의고사 5회 답안지 (수학)

성명 : (                    )

수 학

※ 주의 사항
- 절대로 지정된 칸을 벗어나서 답안을 작성하지 마시오.
- 틀린 곳을 수정할 땐 절대 수정테이프나 수정액을 사용하지 말고, 두 줄을 긋거나 지우개로 깨끗이 지운 후 서술하시오.
- 사용 가능한 필기구는 검은색 볼펜이나 연필, 샤프만 가능하며, 절대 색상이 있는 필기구를 사용해서는 안 되며, 한번 사용한 색상의 필기구로 서술하시오.