2016학년도 논술 모의고사 3회 문제지 (수학)

성명 : (   )

제한 시간 : 85분, 총점 : 100점

다음 제시문을 읽고 [논제 1] ~ [논제 4]에 답하시오.

(가) 자연수 a 이상의 모든 자연수 n에 대해서 명제 $P(n)$이 성립함을 보이려면 다음과 같은 과정을 거치면 된다.

1) 어떤 자연수 a에 대하여 명제 $P(n)$이 성립함을 보인다.
2) a 이상의 자연수 k에 대하여 $n=k$일 때, 명제 $P(k)$가 성립한다고 가정한 후, $n=k+1$일 때의 명제 $P(k+1)$이 성립함을 보인다.
3) 필요하다면 a 이상 자연수 k에 대하여 $a \le m \le k$인 모든 자연수 m에 대하여 $n=m$일 때의 명제 $P(m)$이 성립한다고 가정한 후, $n=k+1$일 때의 명제 $P(k+1)$이 성립함을 보인다.

이러한 증명 방법을 '수학적 귀납법'이라고 한다.

(나) 일반적으로 모든 자연수 n에 대한 어떤 명제 $P(n)$이 참이라고 해서 n이 한없이 커질 때, $P(n)$이 참이라고 할 수 없다. 그러나 참인 명제 $P(n)$이 어떤 수열에 대한 정의로서 실수 값에 대한 명제, 방정식, 혹은 부등식의 대소 관계에 대한 명제 등, 일부의 경우에는 극한의 정의에 의해 n이 무한히 커질 때, 계산한 결괏값, 방정식 혹은 부등식에 대해서 참이다. 예를 들어 '모든 자연수 n에 대하여 수열 $a_n = \dfrac{1}{2^n}$이다.'의 경우, n이 한없이 커질 경우 '$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}$이다.' 또한 참이다.

(다) 어떤 두 상수 $a<b$에 대하여 닫힌구간 $[a,\,b]$에서 정의되고, 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 정적분 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$의 값을 다음과 같이 정의한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \qquad \left(\text{단, } x_k = a+\frac{b-a}{n}k,\ \Delta x = \frac{b-a}{n}\right)$$

여기서, 미적분학의 기본 정리에 의하면, $\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x)$인 함수 $F(x)$에 대해, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$로 계산한다.

(라) 정적분은 여러 성질을 가지고 있다. 특히, 어떤 두 상수 $a<b$에 대하여 닫힌구간 $[a,\,b]$에서 $f(x) \ge g(x)$인 경우,

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$$

이 성립한다. 이때, $f(x)=g(x)$인 x의 개수가 유한개이면(0개, 즉 $f(x)>g(x)$도 포함), 다음 부등식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$$

(마) 닫힌구간 $[a,\,b]$의 임의의 두 원소 α, β와, $0 \le t \le 1$인 임의의 실수 t에 대하여 연속 함수 $f(x)$가

$$f(t\alpha+(1-t)\beta) \le tf(\alpha)+(1-t)f(\beta)$$

가 성립하면, 이 함수를 '구간 $[a,\,b]$에서 아래로 볼록하다.'고 한다. 같은 논리로, 부등호 방향이 반대이면 '구간 $[a,\,b]$에서 위로 볼록하다.'고 한다. 이때, 이 명제의 역 또한 성립한다.

[논제 1] 아래의 논제에 답하시오.

[논제 1-1] 자연수 n에 대한 참인 명제 $P(n)$ '수열 $\{a_n\}$은 유리수이다.'에 대하여, n이 한없이 커질 때 명제 $P(n)$이 '거짓'이 되는 수열 a_n을 하나 찾으시오. [5점]

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

2016학년도 논술 모의고사 3회 문제지 (수학)

성명 : (   )

제한 시간 : 85분

[논제 1-2] 정적분의 정의를 이용하여, 제시문 (라)의 첫 번째 부등식이 성립함을 보이시오. [5점]

[논제 2] 아래의 논제에 답하시오. (이하의 논제에서 상수 a, b는 $a<b$이며, 등호성립조건은 논하지 않는다. 또한, 모든 함수는 연속 함수만 고려한다.)

[논제 2-1] 구간 $[a, b]$에서 아래로 볼록한 함수 $f(x)$와 구간 $[a, b]$의 임의의 원소 x_1, x_2, x_3에 대하여, 다음 부등식이 성립함을 보이시오. [10점]

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$$

[논제 2-2] 2 이상의 임의의 자연수 n에 대하여 임의의 수열 $\{t_n\}$가 $0<t_i<1$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$이고, $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$이라 하자. 구간 $[a, b]$에서 아래로 볼록한 함수 $f(x)$와 구간 $[a, b]$의 임의의 원소 x_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. [20점]

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \ \le\ \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$$

[논제 3] 아래의 논제에 답하시오. (이하의 논제에서 제시문 (나)의 상황은 별도로 고려하지 않으며, 모든 함수는 정적분 값이 존재하는 함수만 고려한다.)

[논제 3-1] 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$인 임의의 함수 $f(x)$에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. [25점]

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \ \ge\ e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx}$$

[논제 3-2] 실수 전체집합에서 정의된 임의의 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $g(x)>0$일 때, 다음의 부등식 이 성립함을 보이시오. [15점]

$$\left(\int_a^b g(x)\{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right) \ge \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$

[논제 3-3] 실수 전체집합에서 정의된 임의의 연속 함수 $f(x)>0$에 대하여, 실수 p에 대한 방정식 $\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b \{f(x)\}^p dx\right) - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)^p = 0$의 근이 실수 전체집합에 적어도 2개 이상 존재함을 보이시오. (단, 필요하다면 임의의 함수 $f(x)>0$에 대해 $g(t)=\int_a^b \{f(x)\}^t dx$는 임의의 실수 t에 대해 연속임을 이용하시오.) [20점]

제작자 : 正進 (exito2016@daum.net)

2016학년도 논술 모의고사 3회 답안지 (수학)

성명 : (   )

제한시간 : 85분

※뒷면의 주의사항을 잘 읽고 답안지에 기입하시오.

2016학년도 논술 모의고사 3회 답안지 (수학)

성명 : (   )

수 학

※ 주의 사항

- 절대로 지정된 칸을 벗어나서 답안을 작성하지 마시오.
- 틀린 곳을 수정할 땐 절대 수정테이프나 수정액을 사용하지 말고, 두 줄을 긋거나 지우개로 깨끗이 지운 후 서술하시오.
- 사용 가능한 필기구는 검은색 볼펜이나 연필, 샤프만 가능하며, 절대 색상이 있는 필기구를 사용해서는 안 되며, 한번 사용한 색상의 필기구로 서술하시오.