제 2 교시

수학 영역

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

5지선다형

지수계산은 밑통일부터

1. $4^{1-\sqrt{3}} \times 2^{2\sqrt{3}-1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

㉮ $2^{2(1-\sqrt{3})} \times 2^{2\sqrt{3}-1}$

$= 2^{2(1-\sqrt{3})+2\sqrt{3}-1}$

$= \boxed{2}$

미분계수의 정의

2. 함수 $f(x)=x^3-7x+5$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

㉮ $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = f'(2)$ 이므로

$f'(x) = 3x^2-7$ 에서 $f'(2) = \boxed{5}$

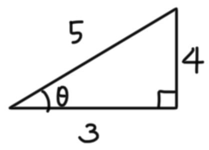
부호에만 유의하면 됨

3. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{3}{5}$ 이고 $\sin\theta\cos\theta<0$ 일 때, $\sin\theta+2\cos\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow \sin\theta\cos\theta < 0$ 에서 $\sin\theta < 0$ ∴ θ는 4사분면의 각



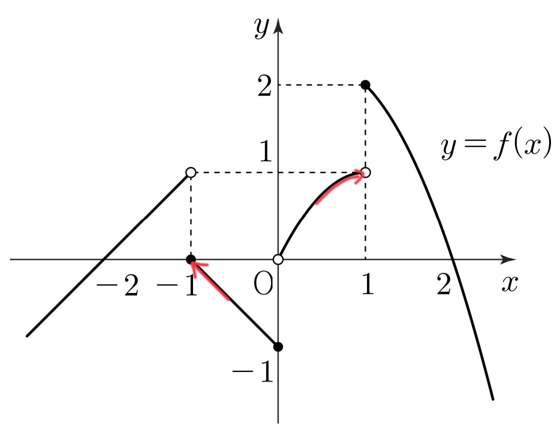
이므로 (θ를 예각으로 간주) $\sin\theta = -\frac{4}{5}$

㉮ $\sin\theta + 2\cos\theta = -\frac{4}{5} + \frac{6}{5}$

$= \boxed{\frac{2}{5}}$

못 풀면…

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x)$ 의 값은? [3점]

0 + 1 = 1

① −1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

연속가능성 Check 빼먹지 말 것

5. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x+a & (x \le 1) \\ 2x^3+bx+1 & (x>1) \end{cases}$$

이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.) [3점]

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

먼저 연속가능성 판정부터!

$$f(x)\begin{cases} 3x+a & (x\le 1) \xrightarrow{x=1 \text{대입}} 3+a \\ 2x^3+bx+1 & (x>1) \xrightarrow{x=1 \text{대입}} 3+b \end{cases} \Rightarrow a=b$$

미분가능성 판정

$$f'(x)\begin{cases} 3 & (x\le 1) \\ 6x^2+b & (x>1) \xrightarrow{x=1 \text{대입}} 6+b \end{cases} \Rightarrow b=-3$$

$a=b=-3$ 이므로
㉠ $a+b=\boxed{-6}$

경우에 따라서는 a_0, a_{-1}, a_{-2} ⋯ 등도 생각가능

6. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3^{\,2}=a_6,\ a_2-a_1=2$$

일 때, a_5의 값은? [3점]

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

등비중항의 성질에 의해 $a_3^2=a_2a_4=a_1a_5=a_0a_6=\cdots$

원래 a_0은 불가능하지만 $\frac{a_1}{r}$ 정도로 생각가능.

곧 $a_3^2=a_0a_6$에서 $a_3^2=a_6$이므로 $a_0=\frac{a_1}{r}=1$

∴ $a_1=r$ 이고, $a_2=ra_1=r^2$ 이다.

이를 $a_2-a_1=2$ 에 대입하면 $r^2-r=2$ ∴ $r=2$ (∵ $\{a_n\}$ 모든 항이 양수이므로 $r>0$)

㉠ $a_5=r^5=\boxed{32}$

극댓값/극솟값 계산. 이걸 도함수의 정적분으로 풀어도 되긴하는데 굳이 싶어서 쓰진 않았음

7. 함수 $f(x)=x^3+ax^2-9x+4$가 $x=1$에서 극값을 갖는다.
함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

$f'(x)=3x^2+2ax-9$ 이고, $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로 $f'(1)=0$

∴ $3+2a-9=0$ 이므로 $a=3$

곧 $f'(x)=3(x+3)(x-1)$이고, $x=-3$에서 극대이다.

㉠ $f(-3)=\boxed{31}$

속도함수와 위치함수 사이의 관계 ⊕ 삼차함수의 비율관계?

8. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=t^2-4t+3$$

이다. 점 P가 시각 $t=1$, $t=a\,(a>1)$에서 운동 방향을 바꿀 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 움직인 거리는? [3점]

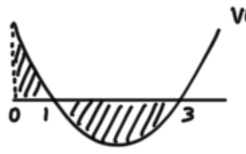
① $\frac{7}{3}$　② $\frac{8}{3}$　③ 3　④ $\frac{10}{3}$　⑤ $\frac{11}{3}$

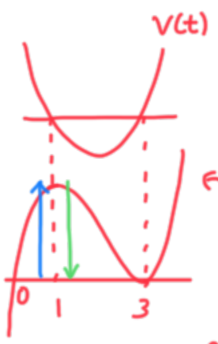
"운동방향을 바꾼다" : 속도의 부호 변동점

$V(t)=(t-1)(t-3)$이므로 $t=1$, $t=3$에서 운동 방향을 바꾼다.

∴ $a=3$

총 움직인 거리는 속도함수의 "넓이" ⇒





∴ $\int_0^3 (t^2-4t+3)dt = \int_0^1 (t^2-4t+3)dt - \int_1^3 (t^2-4t+3)dt$

이걸 그냥 계산 때려도 되고, $2\times\int_0^1 (t^2-4t+3)dt$를 계산해 계산량을 줄일 수도 있다. (∵ 속도함수의 넓이 = 위치함수의 y좌표 변화량이므로 삼차함수의 비율관계에 의해 그래프를 그려보면 (t=0 ~ t=1 까지의 y좌표 변화량) = (t=1 ~ t=3 까지의 y좌표 변화량) 임을 알 수 있다.

부호고려 X

즉 $\int_0^1 (t^2-4t+3)dt = -\int_1^3 (t^2-4t+3)dt$ 이다.) 어쨌든 계산하면 ㉠ $\boxed{\frac{8}{3}}$

9. 2 이상의 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식

↳ 최근에 평가원에서 많이 내는 유형 easy ver. 지수 홀/짝 case 분류

$$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$$

의 모든 실근의 곱이 -4일 때, n의 값은? [4점]

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

$AB=0$의 실근 : $A=0$ or $B=0$

곧 주어진 방정식의 실근은 $x^n=8$ or $x^{2n}=8$이다.

x의 거듭제곱에 관한 방정식은 지수가 홀수인지/짝수인지에 따라 나뉘므로 case 분류.

i) n이 홀수

$x^n=8$의 실근은 $x=\sqrt[n]{8}$ 하나뿐. ∴ $x=2^{\frac{3}{n}}$

$x^{2n}=8$의 실근은 $2n$이 무조건 짝수이므로 $x=\pm\sqrt[2n]{8}$ 두 개 존재.

∴ $x=\pm 2^{\frac{3}{2n}}$

곧 $2^{\frac{3}{n}}\times 2^{\frac{3}{2n}}\times(-2^{\frac{3}{2n}})=-2^2$이므로 $\frac{3}{n}+\frac{3}{2n}+\frac{3}{2n}=2$이고,

이를 계산하면 $n=3$이다.

ii) n이 짝수

$x^n=8$의 실근과 $x^{2n}=8$의 실근 모두 지수가 짝수이므로 (+)부호 1개, (−)부호 1개씩을 실근으로 갖는다.

따라서 실근의 곱의 부호는 무조건 $(+)\times(-)\times(+)\times(-)=(+)$

∴ 모순　　㉠ $n=\boxed{3}$

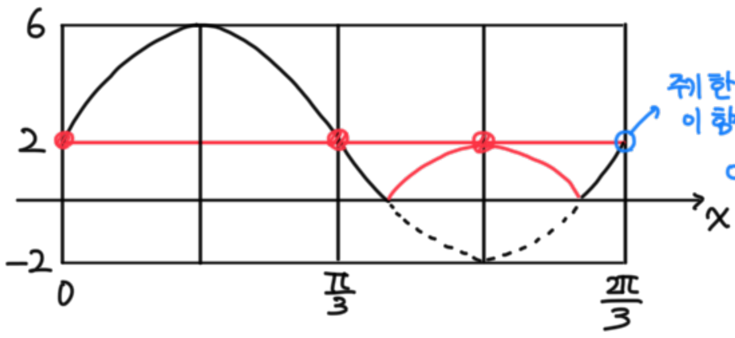
삼각함수 열심히 그리면 복이 옴

10. $0 \le x < 2\pi$일 때, 곡선 $y=|4\sin 3x+2|$와 직선 $y=2$가 만나는 서로 다른 점의 개수는? [4점]

① 3　② 6　③ 9　④ 12　⑤ 15

경계 포함 여부 조심!

주어진 함수가 $\sin 3x$ 꼴이므로 구간 $0 \le x < 2\pi$에서 주어진 함수는 3번 반복됨.
즉, 주어진 함수 $y=|4\sin 3x+2|$를 한 번 반복한 뒤 발생한 교점 개수에 ×3을 하면 된다.



주기 한 번에 포함 ×
이 함수의 주기는 $0 \le x < \frac{2\pi}{3}$이지 $0 \le x \le \frac{2\pi}{3}$이 아니다.

㉠ $3\times3=\boxed{9}$

※ 주어진 구간이 $0 \le x \le 2\pi$ 이었으면 정답은 10이 된다.
항상 구간의 양끝 조심!

대칭성... 대칭성... 대칭성....!!

11. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

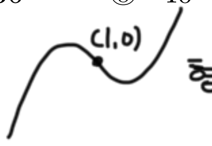
> (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(1+x)+f(1-x)=0$ 이다.
> (나) $\int_{-1}^{3} f'(x)dx = 12$

$f(x)$는 $(1, 0)$ 점대칭

($\because$ $f(p+x)+f(p-x)=2q$ 이면 $f(x)$는 (p, q)에 점대칭함수)

$f(4)$ 의 값은? [4점]

① 24 ② 28 ③ 32 ④ 36 ⑤ 40

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 $(1, 0)$에 점대칭함수. ⇒  형태.

(⊕ 이때의 $(1, 0)$을 "변곡점"이라고 한다)

조건 (나)에서 주어진 적분구간 $[-1, 3]$은 $x=1$에 대칭이므로 결국 둘을 조합해보면 이 문제는 대칭성을 이용한 문제라고 예측가능.

곧, 조건 (가)에서 $f(x) = (x-1)^3 + p(x-1)$ 으로 둘 수 있고,

↳ 이건 아이디어가 아니다!

식을 이렇게 대칭성이 드러나도록 두는 것은 익숙해져야 함

조건 (나)에서 $f'(x)$가 $x=1$에 선대칭이라는 것을 이용하면

$\int_{-1}^{3} f'(x)dx = 2\int_{1}^{3} f'(x)dx = 12$ 이다. $\therefore \int_{1}^{3} f'(x)dx = 6$

이 때 도함수의 정적분은 원함수의 넓좌표 차이이므로 (사실 걍 정적분의 기본정리)

$f(3) - f(1) = 6$ 이고, $f(1) = 0$ 이므로 $f(3) = 6$

이를 $f(x) = (x-1)^3 + p(x-1)$ 에 대입하면 $p = -1$ 이고

㉯ $f(4) = \boxed{24}$

요즘 이렇게 항의 "범위"를 주는게 좀 보이는 것 같기도 하고...

12. 모든 항이 정수이고 공차가 5 인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 자연수 m 이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\sum_{k=1}^{2m+1} a_k < 0$
> (나) $|a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| < 13$

$24 < a_{21} < 29$ 일 때, m 의 값은? [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 5이므로 $\{a_n\} = 5n + \alpha$ 꼴임을 알 수 있다.

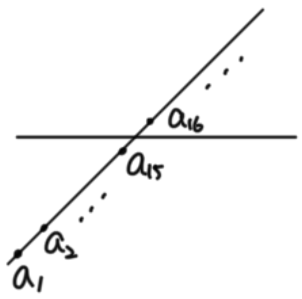
조건 (가)에서 $\sum_{k=1}^{2m+1} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2m+1} = \underbrace{(2m+1)}_{\text{항의 개수}}\underbrace{a_{m+1}}_{\text{평균}} < 0$

이 때 $2m+1$은 무조건 양수이므로 $a_{m+1} < 0$ 이다.

$24 < a_{21} < 29$ 에서 차례대로

$19 < a_{20} < 24$

$14 < a_{19} < 19$

$9 < a_{18} < 14$ ⇒ 

$4 < a_{17} < 9$

$-1 < a_{16} < 4$: $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이므로 최소 0

→ $a_{16} \geq 0$

$-6 < a_{15} < -1$

↳ $a_{15} < 0$ 이므로 $m+1$의 최댓값은 15 $\therefore m \leq 14$

조건 (나)에서 "절댓값"들의 합이 13보다 작아야 하므로 최대한 0으로부터의 거리가 가까운 세 수를 더한 경우를 찾는 것

m에 하나씩 대입해보자.

i) $m = 14$

$|a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| = |a_{14}| + |a_{15}| + |a_{16}|$

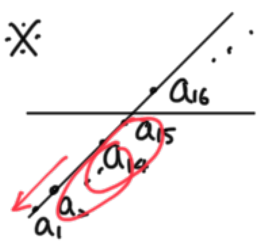
이 때 $-11 < a_{14} < -6$ 이므로 $a_{14} = -7$ 로 가정하면

$a_{15} = -2$, $a_{16} = 3$ 이다.

$\therefore |-7| + |-2| + |3| = 12 < 13$ $\therefore$ 성립

사실 여기서 문제의 답은 14라는 것을 알 수 있지만, 연습이니 나머지 경우도 파악해보자.

ii) $m = 13$부터는 a_m, a_{m+1}, a_{m+2} 모두 음수이므로 절댓값을 씌우면 음수인 성분이 모두 양수로 치환되므로 0으로부터의 거리는 멀어질 수밖에 없다.

※ 

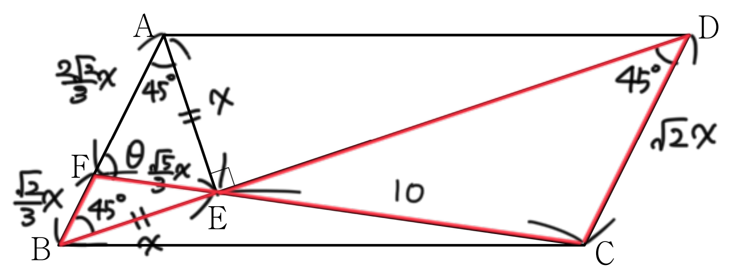
따라서 $|a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| < 13$은 불가능.

㉯ $m = \boxed{14}$

아는 조건, sin/cos Law 총동원. 평행사변형이라 낯선감 있었을지도?

13. 그림과 같이 평행사변형 ABCD가 있다. 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 하고, 직선 CE가 선분 AB와 만나는 점을 F라 하자.

$\cos(\angle \mathrm{AFC})=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\overline{\mathrm{EC}}=10$이고 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$일 때, 삼각형 AFE의 넓이는? [4점]



① $\frac{20}{3}$ ② 7 ③ $\frac{22}{3}$ ④ $\frac{23}{3}$ ⑤ 8

$\overline{EC}=10$, $\triangle CDE$의 외접원의 반지름 길이가 $5\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Sin Law 적용가능.

$\Rightarrow \frac{10}{\sin(\angle CDE)}=2R=10\sqrt{2}$ $\therefore \sin(\angle CDE)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

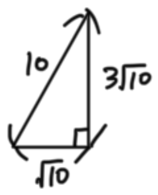
곧 $0<\angle CDE<\frac{\pi}{2}$에서 $\angle CDE=\frac{\pi}{4}$

주어진 도형이 평행사변형이므로 $\overline{AB}/\!/\overline{DC}$이고, 즉 엇각의 성질에 의해 $\angle ABD=\frac{\pi}{4}$이다. $\therefore \triangle ABE$는 직각이등변$\triangle$

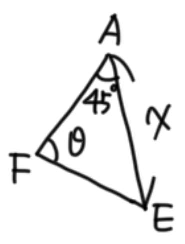
모르는 값은 미지수로 놓는 것이 기본!

$\overline{AE}=\overline{BE}=x$로 두면 $\overline{AB}=\overline{CD}=\sqrt{2}x$이다.

이제 우리는 $\cos(\angle AFC)=\frac{\sqrt{10}}{10}$임을 알고 있으므로 (이하 $\angle AFC=\theta$)

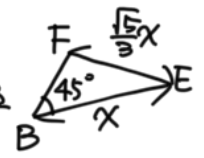


$\therefore \sin\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$



$\triangle AFE$에서 Sin Law 적용가능.

$\Rightarrow \frac{\overline{FE}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{x}{\sin\theta}$이므로 $\overline{FE}=\frac{\sqrt{5}}{3}x$



이제 다시, $\triangle BEF$에서 두 변의 길이와 한 각을 알고 있으므로

cos Law 적용가능.

$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}x\right)^2=x^2+\overline{BF}^2-2x\overline{BF}\cos\frac{\pi}{4}$ $\longrightarrow$ 계산때리면 $\overline{BF}=\frac{\sqrt{2}}{3}x$

즉, $\overline{AB}=\sqrt{2}x$에서 $\overline{BF}=\frac{\sqrt{2}}{3}x$이므로 점F는 $\overline{BA}$를 1:2 내분하는 점이고, $\triangle BEF$와 $\triangle DEC$가 닮음이라는 사실에서 닮은 길이비가 1:3인 닮음.

따라서 $\overline{FE}:\overline{EC}=\frac{\sqrt{5}}{3}x:10=1:3$임을 얻고, 이를 계산하면 $x=2\sqrt{5}$

㉠ $\triangle AFE$의 넓이

$\Rightarrow \overline{FE}=\frac{10}{3}$, $\overline{AF}=\frac{2\sqrt{2}}{3}x=\frac{4\sqrt{10}}{3}$이므로 $\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times\frac{4\sqrt{10}}{3}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\boxed{\frac{20}{3}}$

곱함수의 연속여부 판정. 불×연= 연을 만드려면 필요한 조건은? ⊕ 불×불=?

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f(-3)=f(0)$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-3 \text{ 또는 } x\geq 0) \\ -f(x) & (-3\leq x<0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 값이 한 개일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(x)g(x-3)$은 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. $f(-6)\times f(3)=0$
ㄷ. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k가 음수일 때 집합 $\{x \mid f(x)=0,\ x\text{는 실수}\}$의 모든 원소의 합이 -1이면 $g(-1)=-48$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

< 상황 분석 >

$y=g(x)$는 삼차함수, 즉 연속함수 $f(x)$의 개형을 부분적으로 따르고, $x=-3$과 $x=0$에서 구간이 나뉘는 함수이므로 $x=-3$, $x=0$에서 불연속이 의심되는 함수이다.

여기서 좀 더 생각해보면 $g(x)$는 구간에 따라 각각 $f(x)$와 $-f(x)$으로 구분되므로 $x=-3$과 $x=0$에서 $f(x)=0$이면 $g(x)$는 연속함수라는 것을 알 수 있다.

즉, $f(-3)=f(0)=0$이면 $g(x)$는 연속함수이고,
$f(-3)=f(0)=\alpha$ $(\alpha\neq 0)$이면 $g(x)$는 $x=-3$, $x=0$에서 불연속함수이다.

하지만, 함수 $y=g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 값이 존재하므로 $g(x)$는 연속 X

($\because$ $g(x)$가 연속함수면 $g(x-3)$도 연속함수이고, 연속 $\times$ 연속 $=$ 연속)

$\therefore f(-3)=f(0)=\alpha$ $(\alpha\neq 0)$이고, $g(x)$는 $x=-3$, $x=0$에서만 불연속이다.

이때, $y=g(x-3)$은 $y=g(x)$를 x축 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프이므로 불연속점도 그대로 x축 방향으로 3만큼 평행이동한다.

즉, $y=g(x-3)$은 $x=0$, $x=3$에서 불연속이다.

따라서 $y=g(x)g(x-3)$은 $x=-3$, $x=0$, $x=3$이 불연속 의심점인데 문제 조건에서 불연속인 지점은 단 한 군데 존재한다고 하였으므로 세 개의 지점 중 2개의 지점에서는 연속이어야 한다.

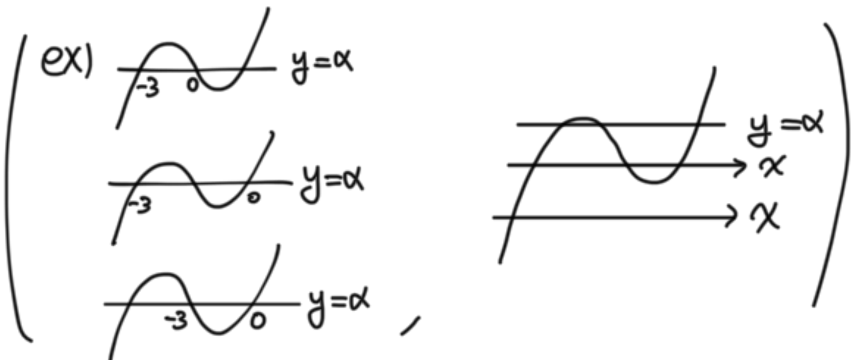
선지 풀이는 다음 page

14번 이어서 – ①

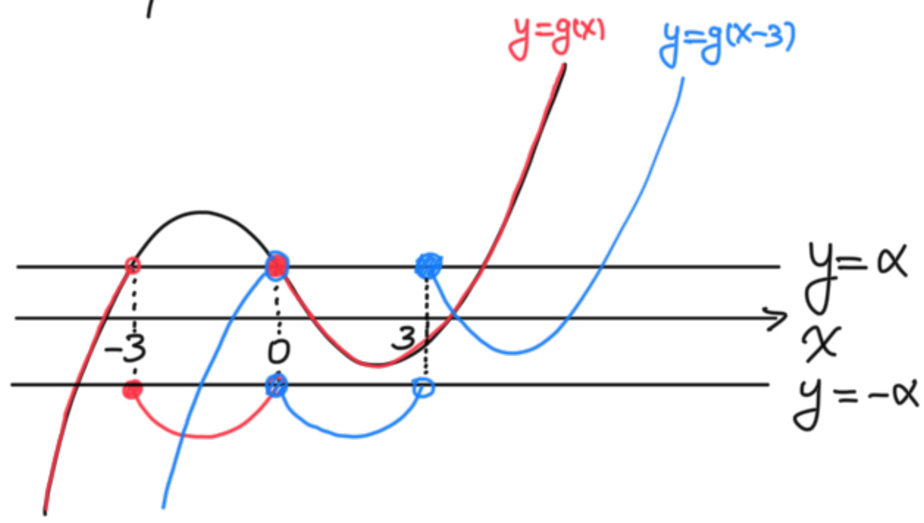
주어진 함수를 대강 그려보면 다음과 같다. case 별로 그렸으며, 해보면 알겠지만 $x=-3,\ 0,\ 3$의 위치와 x축의 정확한 위치는 문제 상황과 크게 관련이 없어 따로 모든 case 분류를 하지는 않았다. 궁금하면 해보시길 ~

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

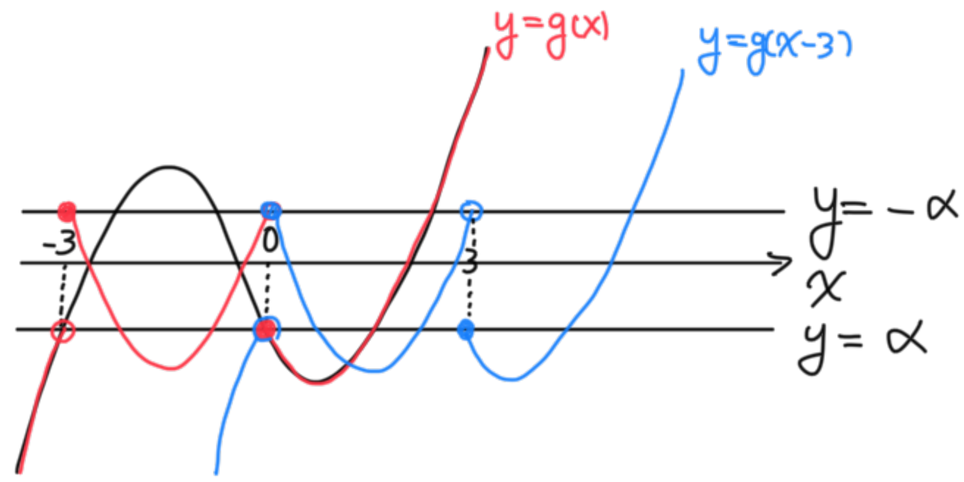
즉, (ex)



등은 딱히 상관이 없다.



$\langle\ \alpha > 0\ \rangle$



$\langle\ \alpha < 0\ \rangle$

ㄱ. 함수가 굉장히 복잡해보이고 억겹지만 $x=0$ 주변을 보면

$\alpha>0$ 인 경우는

$\lim_{x\to0-} g(x) = -\alpha$, $\lim_{x\to0-} g(x-3) = \alpha$ 이므로 $\lim_{x\to0-} g(x)g(x-3) = -\alpha^2$ (좌극한)

$\lim_{x\to0+} g(x) = \alpha$, $\lim_{x\to0+} g(x-3) = -\alpha$ 이므로 $\lim_{x\to0+} g(x)g(x-3) = -\alpha^2$ (우극한)

$g(0)g(-3) = -\alpha\times\alpha = -\alpha^2$ (함숫값)

연속!

$\alpha<0$ 인 경우도 마찬가지로 좌극한 = 우극한 = 함숫값 = $-\alpha^2$ 이므로 연속이다.

즉, ㄱ은 옳다.

ㄴ. $y=g(x)g(x-3)$의 불연속의심점 $x=-3$, $x=0$, $x=3$ 중 $x=0$인 경우가 ㄱ을 통해 연속이라는 것이 증명되었으므로 ㄴ은 남은 $x=-3$과 $x=3$인 경우에 대한 선지라는 것이 예측된다. 아님 말고 ~

i) $x=-3$에서 $y=g(x)g(x-3)$이 연속일 경우 ($x=3$에서 불연속)

불연속 × 연속이 연속이 되기 위해서는 불연속함수가 불연속인 지점에서 각기 다른 극한이나 함숫값들을 연속함수가 상쇄해야하므로 연속함수의 함숫값 = 0이 되어야 함

즉, $x=-3$에서 $g(x)$가 불연속이므로 $g(x-3)$가 $x=-3$에서 함숫값 0이 되어야 한다.

$\therefore g(-6) = f(-6) = 0$

ii) $x=3$에서 $y=g(x)g(x-3)$이 연속일 경우 ($x=-3$에서 불연속)

마찬가지로 $x=3$에서 $g(x-3)$이 불연속이므로 $g(x)$가 $x=3$에서 함숫값 0이 되어야 한다.

$\therefore g(3) = f(3) = 0$

둘 중 어느경우라도 $f(-6)\times f(3) = 0$ 이므로 ㄴ은 옳다.

ㄷ은 다음 page

만든 놈 : ⓘ crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

ㄷ. 주어진 조건은 $k=-3$인 경우를 말하고 있으므로 ㄴ에 의해 $f(3)=0$은 확정이다.

즉, 삼차함수 $f(x)$은 $(x-3)(x^2+px+q)$으로 쓸 수 있고, x^2+px+q의 실근 여부에 따라 case 분류가 가능하다.

실근의 합이 $-1 \neq 3$ 이므로 당연히 x^2+px+q은 실근을 가져야 하고, case 분류를 하면

실근의 합 4

i) x^2+px+q가 $x=3$이 아닌 서로 다른 두 실근을 가질 경우

근과 계수의 관계에 의해 $-p=-4$이므로 $p=4$이고 $f(-3)=f(0)$을 대입하면 $q=6$이다.

하지만 막상 x^2+4x+6의 판별식 <0 이므로 실근을 가지지 않아 모순이다.

ii) x^2+px+q가 중근을 가질 경우

$x^2+px+q=(x+4)^2$이 되어야 하는데 이는 $f(-3)=f(0)$을 만족하지 않는다.

iii) x^2+px+q가 $x=3$을 포함한 실근을 가질 경우

$f(x)=0$의 실근의 합이 -1이므로, 나머지 실근은 -4이다. $\therefore x^2+px+q=(x-3)(x+4)$

즉 $f(x)=(x-3)^2(x+4)$이고, ㉠ $g(-1)=-f(-1)=\boxed{-48}$

따라서 ㄷ은 옳다.

정답은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

관점의 중요성. 조건 해석 잘해야 함

15. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1 < 300$
> (나) 모든 자연수 n 에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} \frac{1}{3}a_n & (\log_3 a_n \text{ 이 자연수인 경우}) \\ a_n+6 & (\log_3 a_n \text{ 이 자연수가 아닌 경우}) \end{cases}$$
> 이다.

$\sum_{k=4}^{7} a_k = 40$ 이 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은? [4점]

① 315 ② 321 ③ 327 ④ 333 ⑤ 339

$\log_3 a_n$ 이 자연수인 경우는 $a_n = 3^k$ (k는 자연수) 꼴이라는 것을 의미하는데,
여기서 주목해야 할 점은 결국 a_n이 3의 거듭제곱꼴이면 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$ 과정을 반복하다가 언젠가는 1로 간다는 것이다.
즉, a_{n+1}이 3^k꼴이면 a_n은 3^k-6 (이 경우 a_n은 3^m 꼴이면 안된다) 이거나 3^{k+1} 중 하나일 것이고, a_{n+1}이 3^k꼴이 아니면 a_n은 $a_{n+1}-6$ 꼴이다.

왜? $a_n = 3^m$ 꼴이면 당연히 $a_{n+1}=3^{m-1}$

정리하면

$$\begin{tikzcd} 3^k-6 \ (3^m \text{ 꼴 아니면}) \arrow[r, "a_{n+1}=a_n+6"] & 3^k \\ 3^{k+1} \arrow[ur, "a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n"'] & \\ a_n & a_{n+1} \end{tikzcd}$$

< a_{n+1}이 3^k꼴 >

$$\begin{tikzcd} a_{n+1}-6 \arrow[r, "a_{n+1}=a_n+6"] & a_{n+1} \\ a_n & a_{n+1} \end{tikzcd}$$

< a_{n+1}이 3^k꼴 × >

어쨌든 a_n의 값이 한 번 1로 간 이후로는 $a_{n+1}=a_n+6$의 과정을 반복하게 되는데,
이는 절대로 $a_n=3^k$ 꼴을 다시 만들 수 없다는 것을 의미한다.
($\because$ 1, 7, 13, 19 ⋯ 즉 $a_n=6n+1$ 꼴인데 $6n+1=3\times 2n+1$ 이므로 소인수 3 가질 수 없다)
즉, 어느 순간 a_n이 1이 되는지 (언제까지 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$의 과정을 따르는지)를 파악하는 게 이 문제의 핵심이라 할 수 있다.
(사실 학생분들은 조금 억지라고 생각할 수도 있지만, $\begin{cases} 27+9+3+1=40 \\ 1+7+13+19=40 \end{cases}$ 을 미리 생각해놓고 있으면 문제 푸는데 도움이 될지도?)

이제 다음 page 에서 본격적으로 case 분류를 하겠다.

단답형

로그방정식은 결국 ① 진수조건 check ② 밑 OR 진수 통일

16. 방정식 $\log_2(x-5)=\log_4(x+7)$ 을 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오. [3점]

진수조건에서 $x-5>0$, $x+7>0$ → $x>5$

$\log_{2^2}(x-5)^2 = \log_{2^2}(x+7)$ 이므로 $(x-5)^2=(x+7)$

이를 계산하면 $(x-2)(x-9)=0$ 인데 진수조건에 의해

㉠ $x=\boxed{9}$

부정적분을 이용한 함수 결정

17. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x)=9x^2-8x+1$ 이고 $f(1)=10$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

주어진 $f'(x)$을 가지고 적분하면 $f(x)=3x^3-4x^2+x+C$ 이고, $f(1)=10$을 대입하면 $C=10$을 얻는다.

$\therefore f(x)=3x^3-4x^2+x+10$

㉠ $f(2)=\boxed{20}$

15번 이어서

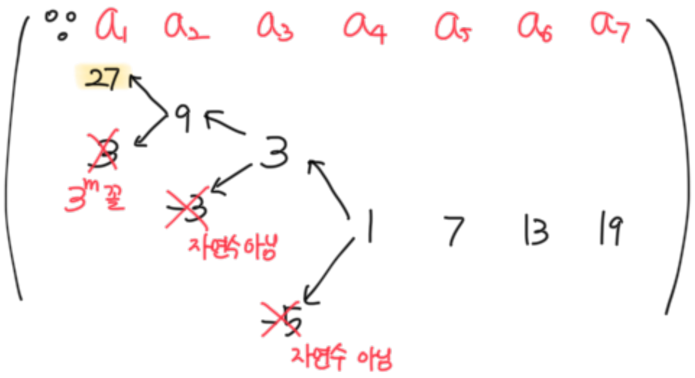
만든 놈 : ⓘ crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

i) $a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=1$ 인 경우 : 계산해보면 싹 다 불가능

				a_4	a_5	a_6	a_7	
① $a_1=1$이면	1	7	13	19	25	31	37	$\rightarrow \sum_{k=4}^{7} a_k = 112$
② $a_2=1$ 이면	□	1	7	13	19	25	31	$\rightarrow \sum_{k=4}^{7} a_k = 88$
③ $a_3=1$ 이면	□	□	1	7	13	19	25	$\rightarrow \sum_{k=4}^{7} a_k = 64$

ii) $a_4=1$ 인 경우

□ □ □ 1 7 13 19 이므로 성립하고, 이 경우 모든 항이 자연수라는 조건에 의해 $a_3=3,\ a_2=9,\ a_1=27$이다.



$\Rightarrow a_1 = 27$

㉠ $27+237+69$

$= \boxed{333}$

iii) $a_5=1$ 인 경우

□ □ □ □ 1 7 13 에서 $a_4=3$이므로 모순

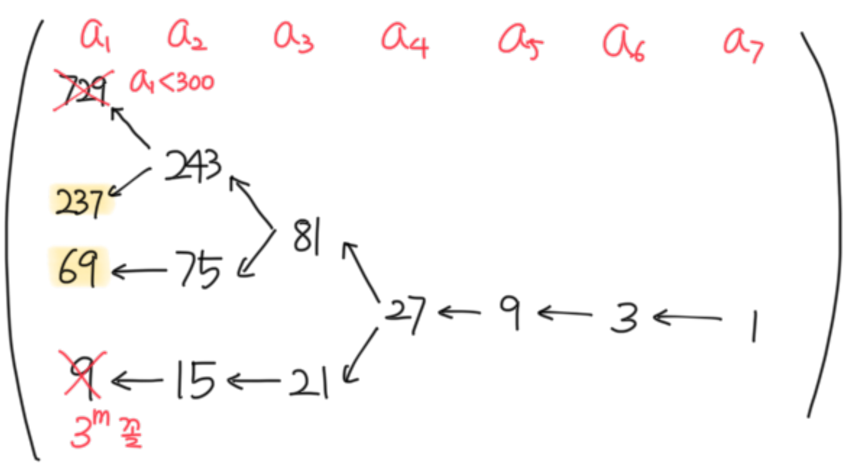
iv) $a_6=1$ 인 경우

□ □ □ □ □ 1 7 에서 $a_5=3$ 이고 $a_4=9$이므로 모순

v) $a_7=1$인 경우

□ □ □ □ □ □ 1 에서 $a_6=3,\ a_5=9,\ a_4=27$이므로 성립.

⇒ 이제 a_1, a_2, a_3 결정하면 된다.



$\Rightarrow a_1 = 237$ OR 69

vi) a_8 이상부터 1이 발생할 경우 OR 아예에 a_n에 3^k꼴이 존재하지 않아 1이 없는 경우

① a_7이 3^k꼴이라고 한다면 아무리 작은 값을 가져도 3인데, 이 경우 $a_6=9,\ a_5=27$에서 $a_4=1$을 만들 수 있는 방법 X

만약 $a_7 = 9, 27, \cdots$ 이면 더더욱 불가능.

② a_7이 3^k꼴이 아니면 무조건 $a_{n+1}=a_n+6$의 과정에 의해 a_7이 만들어졌을텐데, 이게 아까 구한 □ □ □ 1 7 13 19 이다.

즉 이 경우 a_8부터 그 어디에도 1인 경우는 존재 X

만든 놈: crazy_hansukwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

$\sum$는 시작과 끝이 같으면 ⊕, ⊖, 상수배가 자유롭다.

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} 3 \neq 3$ 임에 유의!

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=40,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=-10$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(b_k+5)$의 값을 구하시오. [3점]

$2\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{10}(2a_k-2b_k)=-20$ 이므로

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)-\sum_{k=1}^{10}(2a_k-2b_k)=40+20$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{10}(2b_k+3)=60$ 이므로 $\sum_{k=1}^{10}b_k=15$

㉠ $\sum_{k=1}^{10}(b_k+5)=15+50$
$=\boxed{65}$

항상 대칭성 염두!

19. 곡선 $y=x^3-10$ 위의 점 P$(-2,\ -18)$에서의 접선과 곡선 $y=x^3+k$ 위의 점 Q에서의 접선이 일치할 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

sol$_1$) 대칭성 이용

$y=x^3-10$과 $y=x^3+k$는 서로 y축 방향 평행이동 관계

$y=x^3-10$ 위의 점 $P(-2,-18)$에서의 접선의 방정식을 구하면

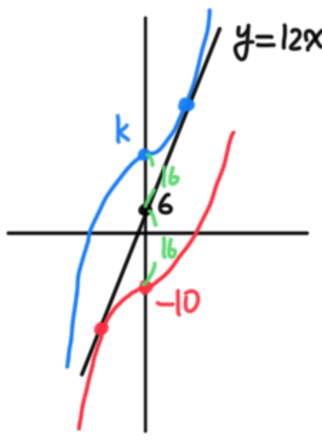
$y'=3x^2$에서 $y=12(x+2)-18$

$\Rightarrow y=12x+6$ 이고, 이는 이 접선의 y절편이 "6"임을 의미.

이제 대칭성에 대해 생각해보자.
삼차함수 $y=x^3-10$은 점 $(0,-10)$에, $y=x^3+k$은 점 $(0,k)$에 점대칭이다.
또한 직선 $y=12x+6$은 직선 위의 모든 점에 점대칭이므로 y절편 $(0,6)$에 점대칭이라고 볼 수 있다.

즉, 이는 $(0,6)\sim(0,-10)$ 까지의 거리와 $(0,6)\sim(0,k)$까지의 거리가 같다는 것을 의미하며 ㉠ $k=6+16=\boxed{22}$

※ 그래프를 그려보면



sol$_2$) 물론 그냥 풀어도 되긴하다.

접선의 기울기가 12이므로 $y'=3x^2=12$를 만족하는 x는 ±2인데, 그래프상으로 $x=2$

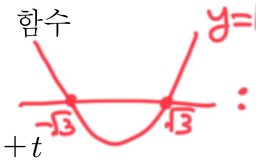
따라서 $y=x^3+k$ 위의 점 $Q(2, 8+k)$에서의 접선의 방정식은 $y=12(x-2)+8+k$

$\therefore k-16=6$ ㉠ $k=\boxed{22}$

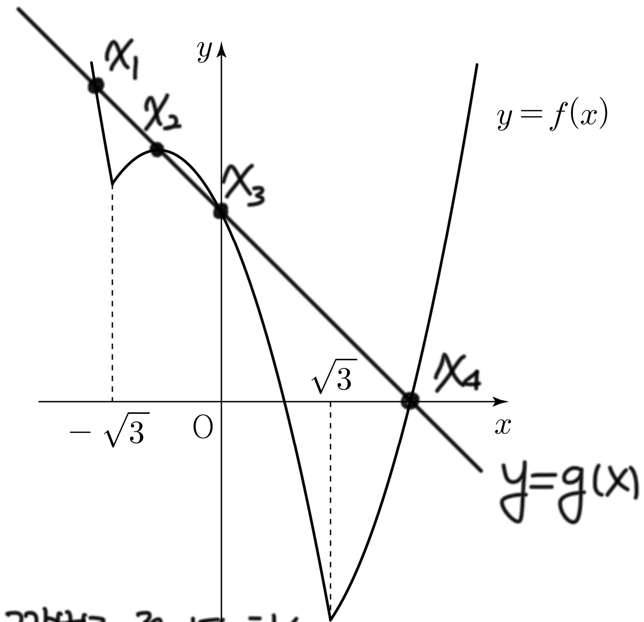
상황 자체는 깔끔한데 마지막 적분이 좀 귀찮음

20. 실수 $t\left(\sqrt{3}<t<\dfrac{13}{4}\right)$에 대하여 두 함수

$$f(x)=|x^2-3|-2x,\ g(x)=-x+t$$



의 그래프가 만나는 서로 다른 네 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_1, x_2, x_3, x_4라 하자. $x_4-x_1=5$일 때, 닫힌구간 $[x_3,\ x_4]$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 $p-q\sqrt{3}$이다. $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]



f(x)는 구간별로 정의된 함수.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x-3 & (x \geq \pm\sqrt{3}) \\ -x^2-2x+3 & (-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}) \end{cases}$$ 이다.

결국 그래프상에서 $f(x)$와 $g(x)$가 서로 다른 네 개의 점에서 만나려면 x_1, x_4는 $x \geq \pm\sqrt{3}$에서 발생해야 하고, x_2, x_3는 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$에서 발생

즉, x_1, x_4는 $y=x^2-2x-3$과 $y=-x+t$ 사이의 교점이므로 $x^2-x-3-t=0$의 두 실근이다.

이 때 근과 계수의 관계를 이용하면 $x_1+x_4=1$, $x_1x_4=-3-t$ 이므로
$(x_4+x_1)^2-4x_4x_1=13+4t=(x_4-x_1)^2$ 이고,
문제 조건에서 $x_4-x_1=5$ 이므로 $13+4t=25$이다. $\therefore t=3$
곧, 이를 이용해 x_4, x_1를 구해보면 $x_1=-2$, $x_4=3$이다.
또한 x_2, x_3은 $y=-x^2-2x+3$과 $y=-x+3$ 사이의 교점이므로 둘을 연립해보면 $x_2=-1$, $x_3=0$을 얻는다.

$\therefore$ 닫힌구간 $[x_3, x_4]=[0,3]$이고, $x=\sqrt{3}$을 기준으로 $f(x)$가 변동하므로 구간을 나눠서 적분하면

$\int_0^3 (g(x)-f(x))dx$

$=\int_0^{\sqrt{3}}((-x+3)-(-x^2-2x+3))dx+\int_{\sqrt{3}}^3((-x+3)-(x^2-2x-3))dx$

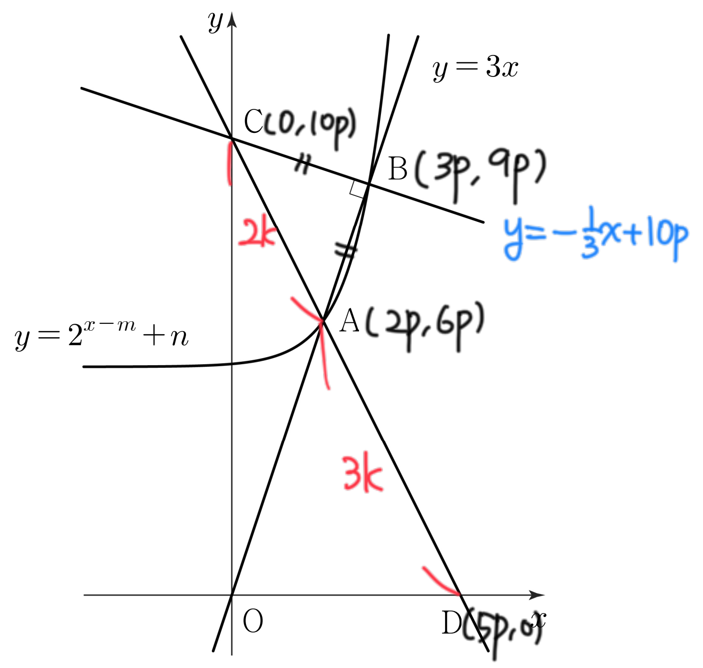
$=\int_0^{\sqrt{3}}(x^2+x)dx+\int_{\sqrt{3}}^3(-x^2+x+6)dx=\frac{27}{2}-4\sqrt{3}$

㉠ $pq=\frac{27}{2}\times4=\boxed{54}$

만든 놈: ⓘ crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

결국 △ABC가 직각이등변△인 것만 찾으면 된다.

21. 그림과 같이 곡선 $y=2^{x-m}+n\ (m>0,\ n>0)$ 과 직선 $y=3x$ 가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 점 B를 지나며 직선 $y=3x$ 에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 하자. 직선 CA가 x축과 만나는 점을 D라 하면 점 D는 선분 CA를 5 : 3으로 외분하는 점이다. 삼각형 ABC의 넓이가 20일 때, $m+n$ 의 값을 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]



$y=3x$ 에 수직인 직선의 기울기 : $-\frac{1}{3}$

점 D가 선분 CA를 5:3으로 외분하는 점이므로 $\overline{CA}:\overline{AD}=2:3$ 이다.

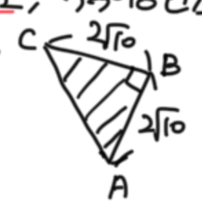
이 때 $y=3x$ 위의 점 A의 좌표를 $(2p, 6p)$ 로 두면

($\because$ $A(p, 3p)$ 로 안 놓는 이유는 그냥 숫자 깔끔하게 하려고.
A의 x좌표 : D의 x좌표 $= 2:5$ 니까 $2p$로 둔 것임)

점 $D(5p, 0)$, 점 $C(0, 10p)$ 를 구할 수 있다.

곧 직선 BC의 방정식은 기울기 $-\frac{1}{3}$, y절편 $(0, 10p)$ 이므로 $y=-\frac{1}{3}x+10p$ 인데,
이 직선과 $y=3x$ 사이의 교점이 점 B이므로 둘을 연립하면 $B(3p, 9p)$ 을 얻는다.

좌표 다아니까 ~

이제 $\overline{BC}=\overline{AB}=p\sqrt{10}$ 을 구할 수 있고, 직각이등변△ ABC의 넓이가 20이므로 $p\sqrt{10}=2\sqrt{10}$ 이다. ($\because$  $\Rightarrow \frac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times 2\sqrt{10}=20$)

$\therefore p=2$

따라서 $\left\{\begin{array}{l} A(2p, 6p)=A(4, 12) \\ B(3p, 9p)=B(6, 18) \end{array}\right.$ 을 $y=2^{x-m}+n$ 에 대입하면

① $12=2^{4-m}+n$

② $18=2^{6-m}+n=2^2(2^{4-m})+n$

$\Rightarrow 3\cdot 2^{4-m}=6$ 이므로 $m=3,\ n=10$ 이다.

㉠ $m+n=\boxed{13}$

기출 열심히 풀어봤으면 풀 만 했을걸? 근데 완벽하게 푸는건 좀 빡셀지도

22. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$ 가 있다. 실수 t 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=f(x)-x-f(t)+t$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$ 라 하자. 두 함수 $f(x)$ 와 $h(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{t\to -1}\{h(t)-h(-1)\}=\lim_{t\to 1}\{h(t)-h(1)\}=2$
>
> (나) $\int_0^{\alpha} f(x)dx=\int_0^{\alpha}|f(x)|dx$ 를 만족시키는 실수 α 의 최솟값은 -1 이다.
>
> (다) 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{d}{dx}\int_0^x \{f(u)-ku\}du \geq 0$ 이 되도록 하는 실수 k 의 최댓값은 $f'(\sqrt{2})$ 이다.

$f(6)$ 의 값을 구하시오. [4점]

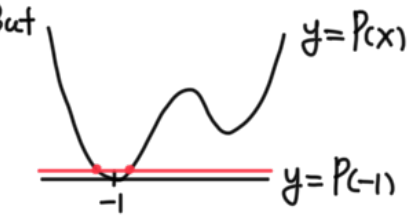
$g(x)=f(x)-x-(f(t)-t)$ 으로 생각하면
$g(x)=0$ 의 서로 다른 실근은 $f(x)-x=f(t)-t$ 의 서로 다른 실근의 개수 의미.
즉, 우리는 $f(x)-x$ 를 $P(x)$ 로 치환하면 (필수는 아님)
$P(x)=P(t)$ 의 실근의 개수가 $h(t)$ 이라는 것을 알 수 있다.
($y=P(x)$ 는 사차식 - 일차식이므로 최고차항의 계수가 양수인 사차함수)

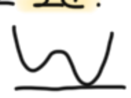
혹시 헷갈릴까봐 한번 더 언급하자면, 우리는 t를 움직여가며 t가 결정될때마다 같이 결정되는 'x축에 평행한 직선' $y=P(t)$ 를 관찰하는 것이고 이 직선과 $y=P(x)$ 사이의 교점의 개수를 세는 것이다.

t가 결정되면 그거 상수

조건 (가)에서 사차함수와 $y=$(상수)꼴의 함수가 서로 다른 점에서 만날 수 있는 개수는 최대 4개이므로 $h(t)$ 의 최댓값은 4이다.
즉, 조건 (가)를 만족할 수 있는 $h(-1)$ 와 $h(1)$ 은 각각 최대 2이다.

i) $h(-1)$ 이 1인 경우
$\lim_{t\to -1} h(t)=3$ 이 되어야 함.

But 

$\therefore \lim_{t\to -1} h(t)=2$ 이므로 모순.
다른 경우는 없다.  말고는...

ii) $h(-1)$ 이 0인 경우
$\lim_{t\to -1} h(t)=2$ 이 되어야 함.

이 경우는 해보면 알겠지만 극한을 잘 이해하고 있으면 무조건 $\lim_{t\to -1} h(t)=0$ 임을 알 수 있다.
$\therefore$ 모순

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

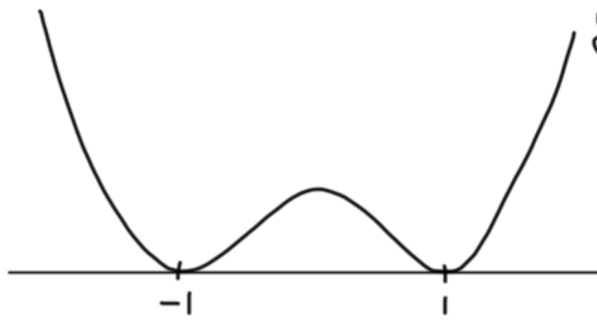
따라서 $h(-1)=h(1)=2$ 이고, 이 case를 다음 page에 다루도록 하겠다.

22번 이어서 … ①

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

곧 $h(-1)=h(1)=2$ 이고, $\lim_{t\to -1} h(t)=\lim_{t\to 1} h(t)=4$ 이다.

⇒ $x=-1$, $x=1$ 에서 $y=P(x)$는 dramtic한 변동이 있을 것으로 생각할 수 있고, 다양한 개형 중 해당 조건을 만족하는 개형은



뿐이다.

이로부터 우리는 $P(x)=f(x)-x=p(x+1)^2(x-1)^2+k$ 꼴로 둘 수 있다. ($k=P(-1)=P(1)$)

조건 (나)가 의미하는 것은
① $y=f(x)$의 함숫값은 구간 $[-1,0]$에서는 전부 양수라는 것
② 가능한 α의 "최솟값"이 -1이므로 $\lim_{x\to -1^-} f(x)<0$ 이라는 것
⇒ $f(-1)=0$

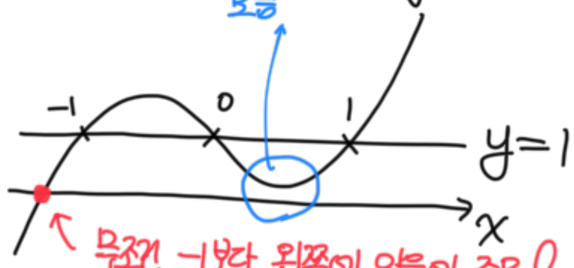
이를 $f(x)-x=p(x+1)^2(x-1)^2+k$에 대입하면 $f(-1)+1=k$ 이므로 $k=P(-1)=P(1)=1$을 구할 수 있다.

∴ $f(x)=p(x+1)^2(x-1)^2+x+1$

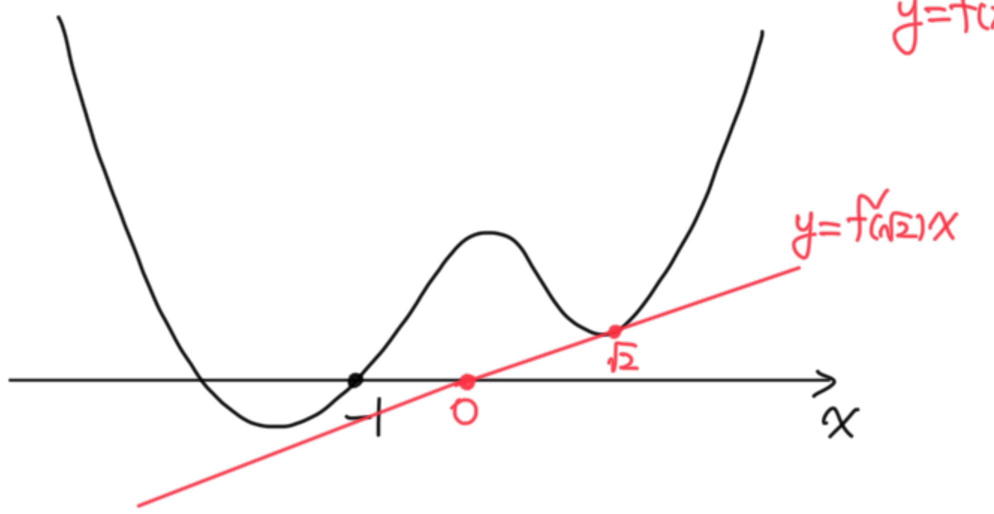
조건 (다)는 복잡해보이지만 결국 $\int_0^x \{f(u)-ku\}du$를 x에 대해 미분하라는 간단한 의미이고, 하라는대로 미분하면 모든 실수 x에 대해 $f(x)-kx\ge 0$, 즉 $f(x)\ge kx$ 이 되도록 하는 실수 k의 최댓값이 $f'(\sqrt{2})$ 임을 의미한다.

즉, 이는 접선과 관련이 있다.

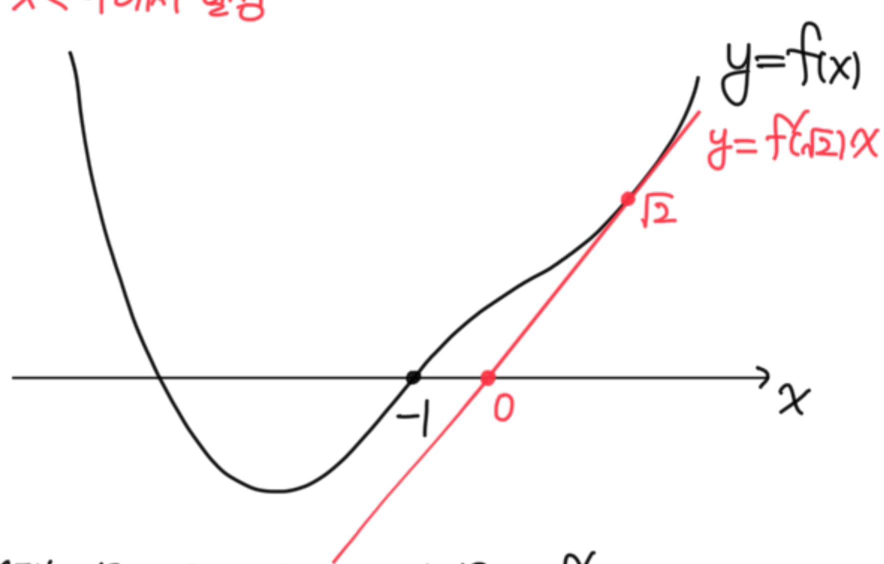
$f(x)=p(x+1)^2(x-1)^2+x+1$ 에서 $f'(x)=2p(x+1)(x-1)^2+2p(x+1)^2(x-1)+1$
$=2p(x+1)(x-1)(x-1+x+1)+1$
$=4px(x+1)(x-1)+1$ →



$f'(x)=4px(x+1)(x-1)+1$ 이므로 $f'(x)$의 부호변동점은 $x<-1$에서 발생하고, $f(-1)=0$과 연결해 생각하면 $y=f(x)$의 개형은 다음과 같다.
$y=f(x)$의 극점 $x<-1$에서 발생



OR



즉, $f(x)\ge kx$는 원점을 지나는 직선의 기울기를 점점 키우다보니 $y=f(x)$와 접하는 지점이 존재하고, 그 때의 기울기가 $f'(\sqrt{2})$이라는 것.

⇒ $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$ 에서의 $f(x)$의 접선이 원점을 지나고, 그 직선을 연장하더라도 무조건 $y=f(x)$가 접선보다 위에 존재한다고 해석가능. (※

이런거 X)

∴ $f'(\sqrt{2})=4p\sqrt{2}+1$, $f(\sqrt{2})=p+\sqrt{2}+1$ 이므로 접선의 방정식은 $y=(4p\sqrt{2}+1)(x-\sqrt{2})+p+\sqrt{2}+1$ 이고, 이 직선이 원점을 지나므로 이를 계산하면 $p=\frac{1}{7}$ 이다.

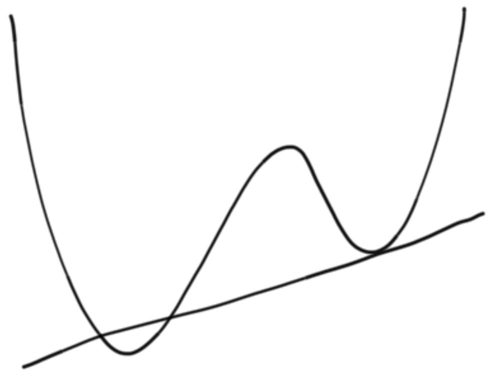
이 부분 부연설명이 다음 page

따라서 $f(x)=\frac{1}{7}(x+1)^2(x-1)^2+x+1$ 이므로 ⑦ $f(6)=\boxed{182}$

22번 이어서 … ②

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

구한 $f(x)=\frac{1}{7}(x+1)^2(x-1)^2+x+1$ 과 $y=f'(\sqrt{2})x$ 이 정말



과 같은 형태가 아닌지 점검 필요!

사실 이 문제 맞췄어도 이것까지 다 점검하신 분들은 많진 않을 것 같긴 함… 시간관계도 있고 하니까

이 경우 $y=f'(\sqrt{2})x$는 $y=\left(\frac{4\sqrt{2}}{7}+1\right)x$ 이므로 이 식을 $g(x)$로 두면 (문제에서의 $g(x)$와 당연히 다른 함수. 그냥 편의상 $g(x)$로 쓸게요)

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{7}(x+1)^2(x-1)^2-\frac{4\sqrt{2}}{7}x+1$$
$$=\frac{1}{7}(x^4-2x^2-4\sqrt{2}x+8)$$

이 사차식의 근을 어떻게 구하냐고 난리칠 수 있겠으나, 우리는 이미 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=\sqrt{2}$에서 접한다는 것을 알기 때문에

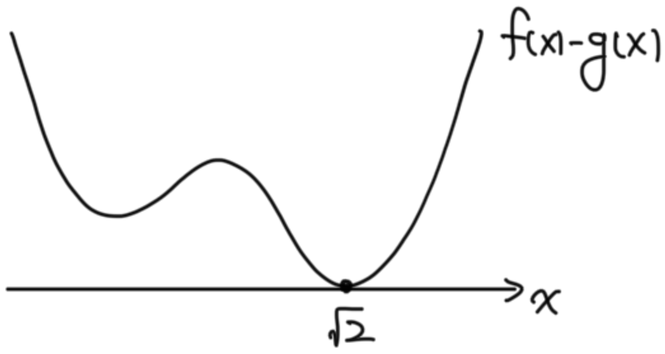
$\frac{1}{7}(x^4-2x^2-4\sqrt{2}x+8)$ 또한 $(x-\sqrt{2})^2$을 인수로 가진다.

조립제법!

$\sqrt{2}$	1	0	-2	$-4\sqrt{2}$	8
		$\sqrt{2}$	2	0	-8
$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	0	$-4\sqrt{2}$	$\boxed{0}$
		$\sqrt{2}$	4	$4\sqrt{2}$	
	1	$2\sqrt{2}$	4	$\boxed{0}$	

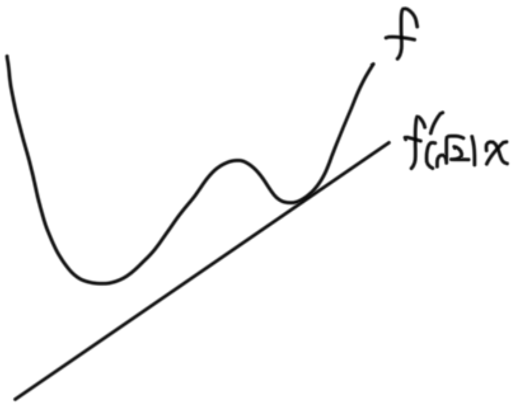
$\Rightarrow$ $\frac{1}{7}(x-\sqrt{2})^2(x^2+2\sqrt{2}x+4)$에서

$x^2+2\sqrt{2}x+4$의 판별식 $D<0$ 이므로



꼴.

따라서 $y=f(x)$와 $y=f'(\sqrt{2})x$ 사이의 관계는



이다.

∴ 문제 없음

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

만든 놈: crazy_hansuckwon
수란휘, 오르비: 한석원의눈물

5지선다형

한 문제씩은 거의 꼭 나오는 유형

23. 다항식 $(x^2+2)^6$의 전개식에서 x^8의 계수는? [2점]

① 30 ② 45 ③ 60 ④ 75 ⑤ 90

x^8을 만드려면 x^2가 4개 필요.

$\Rightarrow {}_6C_4 \cdot (x^2)^4 \cdot 2^2$

$\Rightarrow 15 \times 4 \cdot x^8$

$= 60x^8$

㉮ $\boxed{60}$

차분히 case 분류~

24. 한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. 네 수 a, b, c, d의 곱 $a\times b\times c\times d$가 27의 배수일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{4}{27}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{7}{27}$

주사위는 최대 6까지 나옴

⇒ 9와 같은 '소인수 3을 2개 이상 가지는 숫자' 존재 X

27은 3^3

⇒ 주사위를 4번 던져서 소인수 3 최소 3개는 모아야 함.

i) 3 3개 있는 경우

주사위의 눈 중 소인수 3을 포함하는 눈 : 3, 6

⇒ 나올 확률 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

⇒ 4번의 시행 중 3번은 3 OR 6 눈이 나와야하고, 1번은 나머지 눈 나와야 한다.

$\Rightarrow {}_4C_3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{81}$

ii) 3 4개 있는 경우

마찬가지로 생각해보면 4번의 시행 모두 3 OR 6 눈이 나와야 함.

$\Rightarrow {}_4C_4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

$\therefore$ ㉮ $\frac{8}{81} + \frac{1}{81} = \boxed{\frac{1}{9}}$

만든 놈: crazy_hansukwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

E(X²) 나왔다고 기계적으로 V(X) 구하는건 안됩니다!

25. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$a+b$	b	1

$\mathrm{E}(X^2)=a+5$일 때, $b-a$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

STEP 1. 확률의 전체 합은 1

$a+(a+b)+b=1$ 이므로 $a+b=\frac{1}{2}$

STEP 2. $E(X^2)$ 이용하기

$$E(X^2)=1^2\times(a)+2^2\times(a+b)+3^2\times b$$
$$=a+4a+4b+9b$$
$$=5(a+b)+8b$$
$$=\frac{5}{2}+8b$$

곧 $\frac{5}{2}+8b=a+5$에서 $a+b=\frac{1}{2}$을 대입하면

$\frac{5}{2}+8b=\frac{1}{2}-b+5$ $\therefore b=\frac{1}{3}$

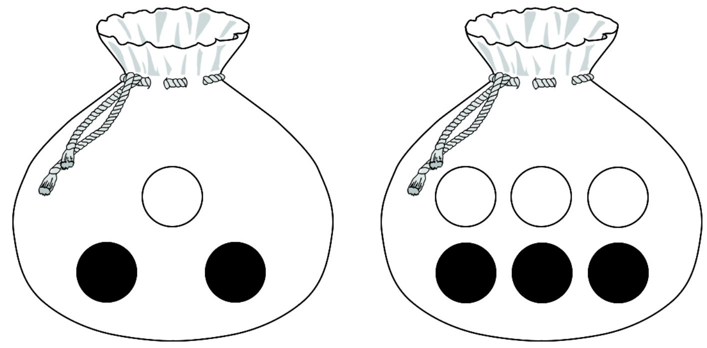
$\Rightarrow a=\frac{1}{6}$

㉠ $b-a=\boxed{\frac{1}{6}}$

얘도 뭐 꽤 간단한 확률 문제

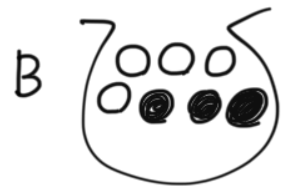
26. 주머니 A에는 흰 공 1개, 검은 공 2개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 3개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 주머니 B에서 꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 흰 공일 확률은? [3점]

① $\frac{6}{7}$ ② $\frac{92}{105}$ ③ $\frac{94}{105}$ ④ $\frac{32}{35}$ ⑤ $\frac{14}{15}$



A B

i) A에서 흰공을 꺼냈을 경우



⇒ 적어도 한 개 흰공
⇒ 여사건!

$\therefore \frac{1}{3}\times\left(1-\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3}\right)=\frac{34}{105}$

(흰공 확률) 7개 중 검은공만 뽑을 확률

ii) A에서 검은 공을 꺼냈을 경우

마찬가지로 계산하면

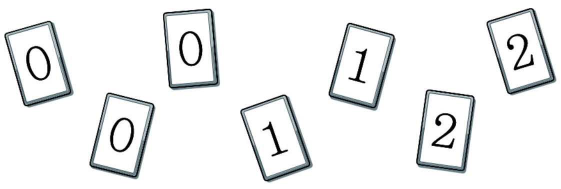
$\therefore \frac{2}{3}\times\left(1-\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3}\right)=\frac{62}{105}$

㉠ $\frac{34}{105}+\frac{62}{105}=\boxed{\frac{32}{35}}$

이외에도 먼저 [1] 2장을 배열한 뒤 푸는 방법도 있을듯?

27. 숫자 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2가 하나씩 적힌 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 이웃하는 두 장의 카드에 적힌 수의 곱이 모두 1 이하가 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 14　② 15　③ 16　④ 17　⑤ 18 ✓



곱이 1 초과라는 건 [2] 주변에서만 문제 발생한다는 뜻

⇒ [2] 옆에는 무조건 [0]이 와야 함!

결국 얘가 기준

그런데 [2]가 양끝에 있으면 얘를 커버치기 위해 [0]이 한 장만 있으면 되지만, (ex [2][0] _ _ _ _ _)
그렇지 않으면 [0]이 2장이 필요하다.
(ex. [0][2][0] _ _ _ _)

i) [2]가 양끝에 존재할 경우

[2][0] _ _ _ [0][2]

⇒ 빈칸에 0, 1, 1 배열 → 3가지

ii) [2] 중 하나만 끝에 존재할 경우

⇒ [2][0] _ _ _ _ _

[2][0] → 3가지
[0][2][0] → 1가지
[0][2][0] → 1가지
[0][2][0] → 1가지
} 6

왼쪽 끝에 위치할 경우의 수 = 오른쪽 끝에 위치할 경우의 수

∴ 6×2 = 12가지

iii) [2] 모두 양끝에 위치 X할 경우

⇒ 각각의 [2]를 커버치기 위해서는 [0]이 2개씩 필요한데 [0]이 3개밖에 없으므로 가능한 경우는 [0][2][0][2][0] 뿐

∴ ∨[0][2][0][2][0]∨　V에 [1] 중복허용해서 배열

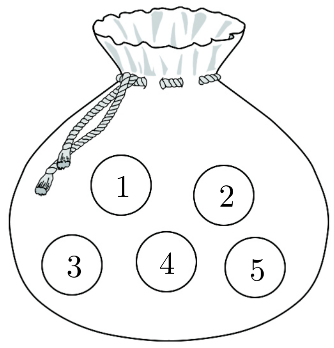
⇒ $_2H_2 = 3$가지

㉠ 3+12+3 = [18]

조건부확률도 결국 경우의 수. ⊕ 조건 해석이 중요함

28. 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 공을 임의로 한 개씩 5번 꺼내어 $n\,(1 \le n \le 5)$번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a_n이라 하자. $a_k \le k$를 만족시키는 자연수 $k\,(1 \le k \le 5)$의 최솟값이 3일 때, $a_1 + a_2 = a_4 + a_5$일 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) [4점]

① $\frac{4}{19}$ ✓　② $\frac{5}{19}$　③ $\frac{6}{19}$　④ $\frac{7}{19}$　⑤ $\frac{8}{19}$



공통 Mind "$a_k \le k$를 만족하는 자연수 k의 최솟값이 3이다."
→ 최솟값이 3이므로 $k=1, 2$일 때는 성립하지 않는다.

∴ $a_1 > 1,\ a_2 > 2,\ a_3 \le 3$

sol1) 조건부확률도 결국 경우의 수가 기본 Base

a_3을 기준으로 생각하자.

i) $a_3 = 1$

$a_1 > 1,\ a_2 > 2$가 되도록 만들수 있는 순서쌍 (a_1, a_2)는

① $a_1 = 2$일 때 a_2 3가지
② $a_1 = 3, 4, 5$일 때 a_2 2가지
} 3+3×2 = 9

ii) $a_3 = 2$

마찬가지로 생각해보면 남은 숫자가 1, 3, 4, 5이므로 그냥 3, 4, 5를 (a_1, a_2)에 배열하면 무조건 $a_1 > 1, a_2 > 2$ 만족

∴ 순서쌍 (a_1, a_2) : $_3P_2 = 6$

iii) $a_3 = 3$

① $a_1 = 2$일 때 a_2 2가지
② $a_1 = 4, 5$일 때 a_2 1가지
} 2+2×1 = 4

사실 각각의 경우에 대해 (a_4, a_5)의 경우는 2개씩 발생하므로 총 경우의 수는 구한 값에 ×2를 해줘야 하지만 어차피 각각 발생하는 순서쌍 (a_4, a_5)가 $a_4 + a_5$는 일정하게 유지되는 특징이 있으므로 분자에도 각각 ×2가 곱해지기 때문에 결과적으로 결과값은 변하지 않음 ⇒ 굳이 순서쌍 (a_4, a_5)를 신경쓸 필요 없다!

⇒ $a_1 + a_2 = a_4 + a_5$를 만족하는 경우는 a_3가 홀수여야 하므로 i)과 iii)만 보면 된다.

다음 page

28번 이어서

만든 놈: crazy_hansuckwon
수연회, 오르비 : 한석원의눈물

$a_1+a_2=a_4+a_5$를 만족하는 경우는 왜 a_3가 홀수여야 하나요?

$\because \underbrace{a_1+a_2}+a_3+\underbrace{a_4+a_5}=15$ ($=$)

$\Rightarrow 2(a_1+a_2)+a_3=15$인데 a_1+a_2는 자연수이므로 $2(a_1+a_2)=$ 짝수

$\Rightarrow$ 짝수 + 홀수(a_3) = 홀수

어쨌든 $a_3=1$과 $a_3=3$을 보면

i) $a_3=1$인 경우

$a_1+a_2+a_4+a_5=14$이므로 $(a_1+a_2)=(a_4+a_5)=7$이고, 이를 만족하는 순서쌍 (a_1, a_2)는 $\begin{cases}(2,5)\\(3,4)\\(4,3)\end{cases}$

$\therefore$ 3가지

ii) $a_3=3$인 경우

마찬가지로 $(a_1+a_2)=(a_4+a_5)=6$이고, 이를 만족하는 순서쌍 (a_1,a_2)는 $(2,4)$

$\therefore$ 1가지

따라서 ㉮ $\dfrac{3+1}{9+6+4}=\boxed{\dfrac{4}{19}}$

sol$_2$) 똑같은 풀이긴 한데 확률로 생각 (이번엔 연습삼아 sol$_1$)과 달리 순서쌍 (a_4, a_5)도 고려해보자)

i) $a_3=1,\ a_1>1,\ a_2>2$일 확률

$\Rightarrow a_1=2$면 a_2 3가지, $a_1=3,4,5$면 a_2 2가지

$\Rightarrow \dfrac{(3+3\times2)\times\boxed{2!}}{5!}$ (a_4, a_5) 순서쌍 개수 $=\dfrac{3}{20}$

ii) $a_3=2,\ a_1>1,\ a_2>2$일 확률

$\Rightarrow$ sol$_1$)과 동일하게 생각하면 $\dfrac{{}_3P_2\times2!}{5!}=\dfrac{1}{10}$

iii) $a_3=3,\ a_1>1,\ a_2>2$일 확률

$\Rightarrow$ sol$_1$)과 동일하게 생각하면 $\dfrac{4\times2!}{5!}=\dfrac{1}{15}$

$\dfrac{3}{20}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{19}{60}$

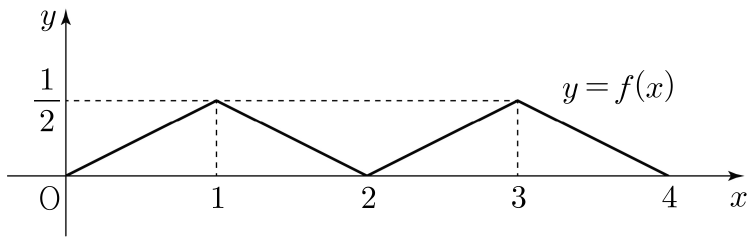
$\therefore$ 구하는 경우의 확률도 sol$_1$)과 똑같이 보면 $\dfrac{4\times2!}{5!}=\dfrac{4}{60}$

㉮ $\dfrac{\frac{4}{60}}{\frac{19}{60}}=\boxed{\dfrac{4}{19}}$

단답형

확통 문제라기보다는 걍 수II 아니냐 이건?

29. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 4$, $0 \le Y \le 4$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



확률변수 Y의 확률밀도함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0, 4]$에서 연속이고 $0 \le x \le 4$인 모든 실수 x에 대하여

$$\{g(x)-f(x)\}\{g(x)-a\}=0 \quad (a\text{는 상수})$$

를 만족시킨다. 두 확률변수 X와 Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(0 \le Y \le 1) < \mathrm{P}(0 \le X \le 1)$
(나) $\mathrm{P}(3 \le Y \le 4) < \mathrm{P}(3 \le X \le 4)$

$\mathrm{P}(0 \le Y \le 5a) = p - q\sqrt{2}$일 때, $p \times q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 자연수이다.) [4점]

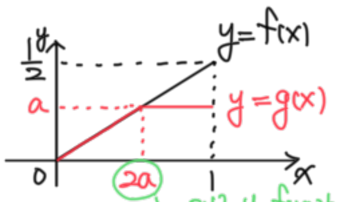
$(g(x)-f(x))(g(x)-a)=0$을 만족

$\Rightarrow$ 모든 실수 x에서 $g(x)=f(x)$ OR $g(x)=a$

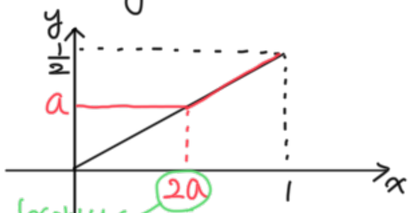
조건 (가)에서 $P(0\le Y\le 1)<P(0\le X\le 1)$을 어떻게 해석할지가 관건.

기본적으로 $g(x)$는 $f(x)$의 개형 또는 $y=a$ (~~상수함수~~)의 개형밖에 가지지 못하는 주제에 심지어 연속이기까지 하다.

$0\le x\le 1$에서 이 조건을 모두 만족하는 $g(x)$는 ($f=g$인 경우는 조건 (가)에 위배)



OR



왜? $y=f(x)$가 $0\le x\le 1$에서 $y=\frac{1}{2}x$이라서

둘 중 하나밖에 없고, 조건 (가)에서 $P(0\le Y\le 1)<P(0\le X\le 1)$이므로 왼쪽과 같은 개형을 가진다고 할 수 있다.

마찬가지로 조건 (나)에서 $P(3\le Y\le 4)<P(3\le X\le 4)$이므로 동일하게

의 개형을 가진다는 것을 알 수 있다.

다음 page

간만에 그래도 30번 같은 확통 30번인듯

30. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(7)-f(1)=3$
(나) 5 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $f(n) \le f(n+2)$이다.
(다) $\frac{1}{3}|f(2)-f(1)|$과 $\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{4} f(2k-1)$의 값은 모두 자연수이다.

조건 (가)에 의해 첫번째 case 분류.

$f(7)-f(1)=3$

$\Rightarrow (f(1), f(7)) = (1,4), (2,5), (3,6), (4,7)$

조건 (나)에 의해 함숫값 간의 대소비교.

$n=1$ 대입 $\to f(1)\le f(3)$
$n=2$ 대입 $\to f(2)\le f(4)$
$n=3$ 대입 $\to f(3)\le f(5)$
$n=4$ 대입 $\to f(4)\le f(6)$
$n=5$ 대입 $\to f(5)\le f(7)$

① $f(1)\le f(3)\le f(5)\le f(7)$
② $f(2)\le f(4)\le f(6)$

조건 (다)에 의해 함숫값 간의 조건파악

$\frac{1}{3}|f(2)-f(1)| = k$ (k는 자연수)
$\Rightarrow |f(2)-f(1)| = 3k$ 꼴

$\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{4} f(2k-1) = m$ (m은 자연수)
$\Rightarrow f(1)+f(3)+f(5)+f(7) = 3m$ 꼴

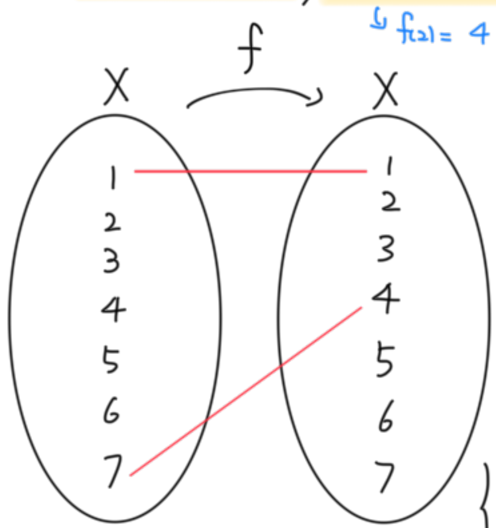
거의 모든 조건에 $f(1)$이 포함
$\Rightarrow$ $f(1)$ 기준으로 생각

i) $f(1)=1$

조건들에 의해

$f(7)=4$, $1\le f(3)\le f(5)\le 4$, $|f(2)-1|=3k$ 꼴, $f(3)+f(5)=3m-2$ 꼴 (k, m은 자연수)

$\hookrightarrow f(2) = 4$ OR 7



① $f(3), f(5)$ 관련 조건

$1\le f(3)\le f(5)\le 4$
$f(3)+f(5) = 1, 4, 7\cdots$
만족하는 $(f(3), f(5))$

$\Rightarrow (1,3), (2,2), (3,4)$: 3가지

② $f(2), f(4), f(6)$ 관련 조건

$f(2)=4$일 때 $(f(4), f(6))$: ${}_4\mathrm{H}_2$ 가지

$f(2)=7$일 때 $(f(4), f(6))$: 1가지

$\therefore 3\times({}_4\mathrm{H}_2+1) = 33$

나머지 경우는 다음 page

* 확인 사항

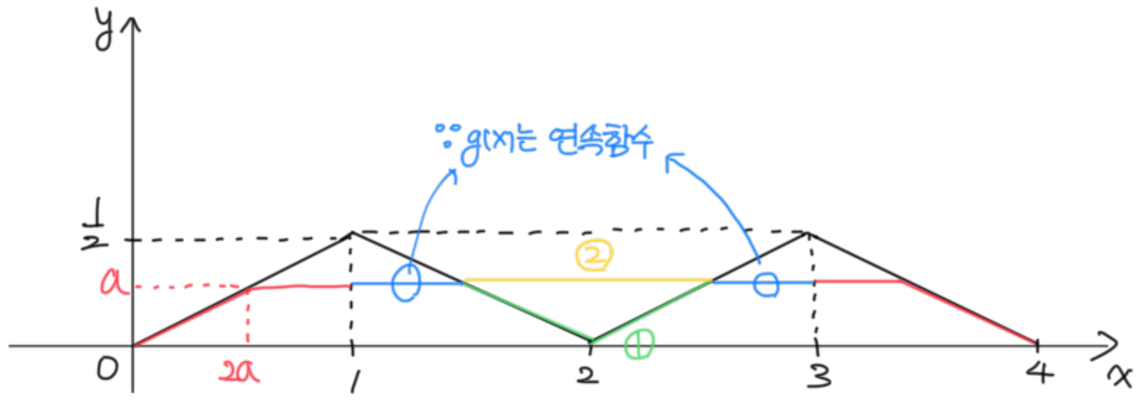
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

29번 이어서

만든 놈: crazy_hansuckwon
수험생, 오르비: 한석원의눈물

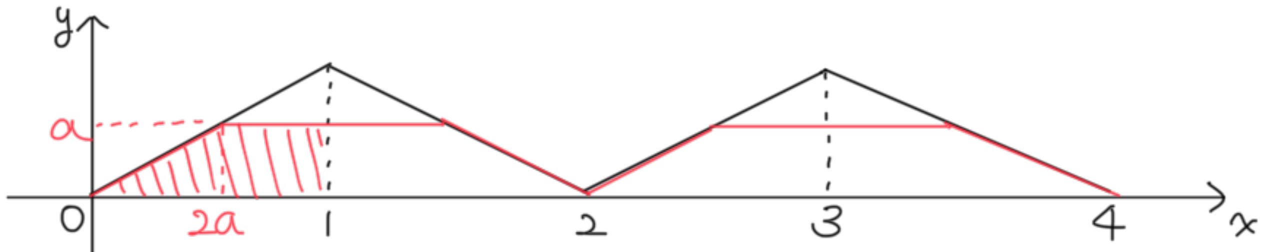
앞서 $0 \le x \le 1$, $3 \le x \le 4$ 에서의 $g(x)$ 그래프를 확정했으니 $1 \le x \le 3$ 의 범위를 확정해야 한다.

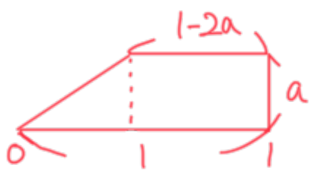


— 부분은 자연스럽게 그릴 수 있으나 문제는 $x=2$ 근방에서 ① 과 ② 두 가지 case가 존재할 수 있다.

i) ① 개형일 경우

$P(0 \le Y \le 4) = 1$ 을 이용한다.



$P(0 \le Y \le 4)$는 대칭성과 주기성에 의해  의 넓이 $\times 4$ 이므로 사다리꼴의 넓이 $= \frac{1}{4}$ 이다.

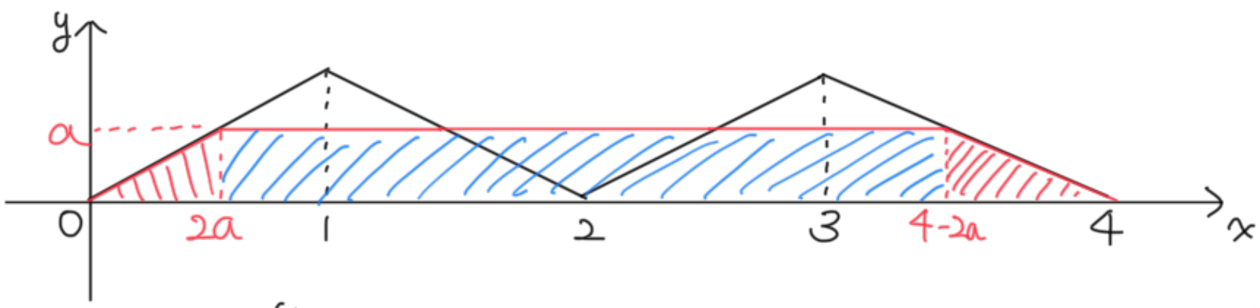
∴ 사다리꼴의 넓이 $= \frac{1}{2}(1+1-2a) \times a = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow a(1-a) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$ 이라서 아주 깔끔하게 답이 나온것 같지만 이건 모순이다. 왜? $a = \frac{1}{2}$ 이면 주어진 그래프 $g(x)$는 $f(x)$ 와 "완전히 동일한" 개형이 되어버리는데 이는 조건 (가),(나)에 모순된다.

ii) ② 개형일 경우

마찬가지로 $P(0 \le Y \le 4) = 1$을 이용한다.



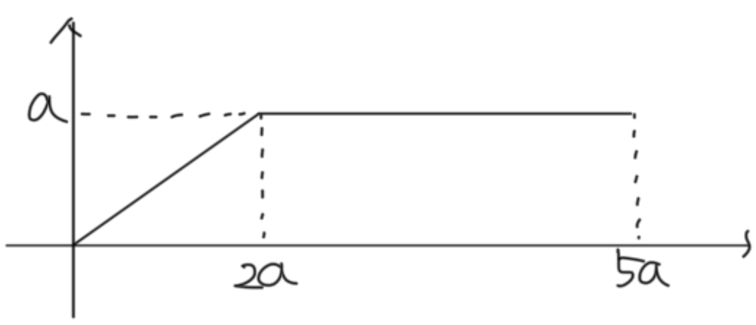
주어진 넓이는 $\underbrace{\left(\frac{1}{2} \times a \times 2a\right) \times 2}_{\text{삼각형 2개 넓이 합}} + \underbrace{(4-2a-2a) \times a}_{\text{사각형 넓이}} = 1$ 이므로 이를 계산하면

$\Rightarrow 2a^2 - 4a + 1 = 0$

$\Rightarrow a = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ($\because 2a < 1$)

곧 $P(0 \le Y \le 5a) = P\left(0 \le Y \le 5 - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow$

($0<2a<1$ 에서 $0<5a<\frac{5}{2}<3$ 이다)



$\Rightarrow$ 넓이 $= a^2 + 3a^2 = 6 - 4\sqrt{2}$

㉠ $pq = \boxed{24}$

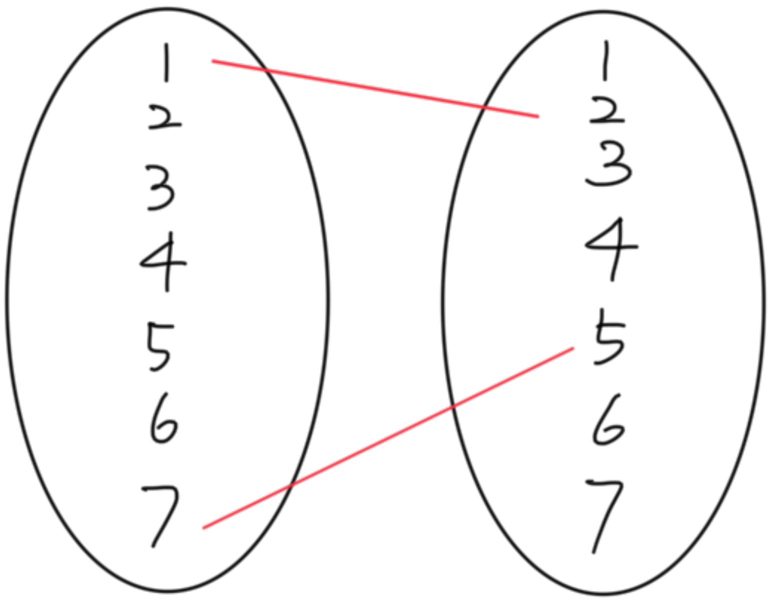
30번 이어서

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

ii) $f(1)=2$

$f(7)=5$, $2 \le f(3) \le f(5) \le 5$, $|f(2)-2| = 3k$ 꼴, $f(3)+f(5)=3m-1$ 꼴 (k, m은 자연수)

↳ $f(2)=5$



① $f(3), f(5)$ 관련 조건

$\begin{cases} 2 \le f(3) \le f(5) \le 5 \\ f(3)+f(5) = 2, 5, 8 \cdots \end{cases}$ 만족하는 순서쌍 $(f(3), f(5))$

⇒ $(2,3), (3,5), (4,4)$: 3가지

② $f(2), f(4), f(6)$ 관련 조건

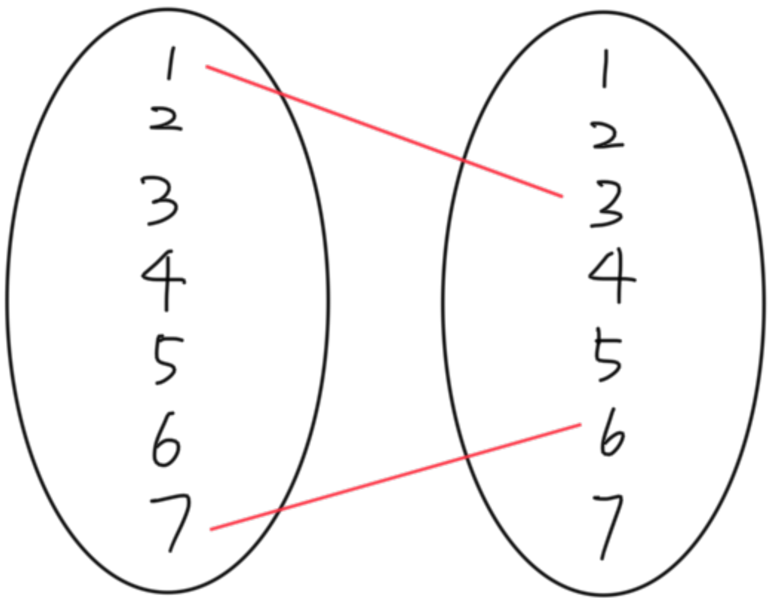
⇒ $f(2)=5$ 이므로 $(f(4), f(6))$는 ${}_3H_2 = 6$가지

∴ $3 \times 6 = 18$가지

iii) $f(1)=3$

$f(7)=6$, $3 \le f(3) \le f(5) \le 6$, $|f(2)-3| = 3k$ 꼴, $f(3)+f(5)=3m$ 꼴 (k, m은 자연수)

↳ $f(2)=6$



① $f(3), f(5)$ 관련 조건

$\begin{cases} 3 \le f(3) \le f(5) \le 6 \\ f(3)+f(5) = 3, 6, 9 \cdots \end{cases}$ 만족하는 순서쌍 $(f(3), f(5))$

⇒ $(3,3), (3,6), (4,5), (6,6)$: 4가지

② $f(2), f(4), f(6)$ 관련 조건

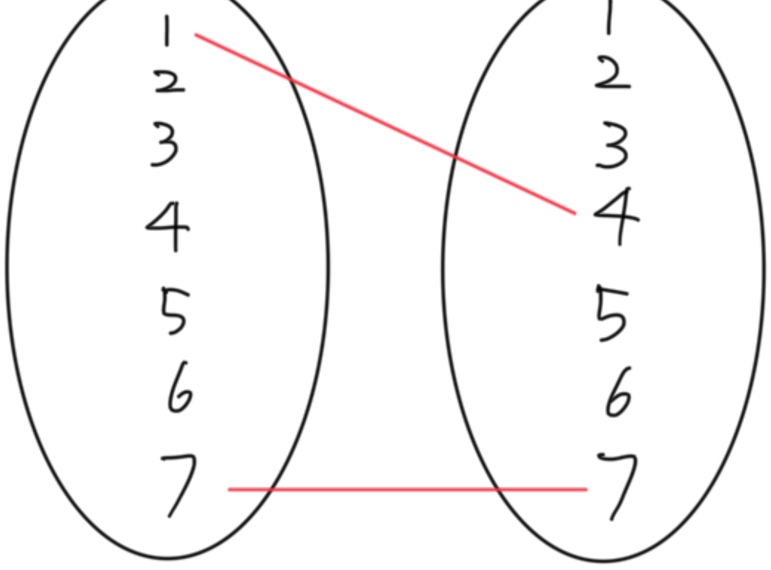
⇒ $f(2)=6$ 이므로 $(f(4), f(6))$는 ${}_2H_2$: 3가지

∴ $4 \times 3 = 12$가지

iv) $f(1)=4$

$f(7)=7$, $4 \le f(3) \le f(5) \le 7$, $|f(2)-4| = 3k$ 꼴, $f(3)+f(5)=3m-2$ 꼴 (k, m은 자연수)

↳ $f(2) = 1$ OR 7



① $f(3), f(5)$ 관련 조건

$\begin{cases} 4 \le f(3) \le f(5) \le 7 \\ f(3)+f(5) = 1, 4, 7 \cdots \end{cases}$ 만족하는 순서쌍 $(f(3), f(5))$

⇒ $(4,6), (5,5), (6,7)$: 3가지

② $f(2), f(4), f(6)$ 관련 조건

$\begin{cases} f(2)=1 \text{ 일 때 } (f(4), f(6)) \text{는 } {}_7H_2 \text{가지} \\ f(2)=7 \text{ 일 때 } (f(4), f(6)) \text{는 } 1 \text{ 가지} \end{cases}$

∴ $3 \times ({}_7H_2 + 1)$
$= 87$가지

㉠ $33+18+12+87 = \boxed{150}$

제 2 교시

수학 영역(미적분)

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

5지선다형

부정형처리

23. $\lim_{n\to\infty} 2n\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}\right)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\infty-\infty$꼴 (부정형)

⇒ 유리화

$$\lim_{n\to\infty} 2n \frac{(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1})}{(\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\times 3}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{6}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}$$

$$=\boxed{3}$$

24번치고 길어서 당황하긴 했는데... 결국 합성함수 미분

24. 함수 $f(x)=\ln(x^2-x+2)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)$를 $h(x)=f(g(x))$라 하자.

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-4}{x-2}=12$일 때, $h'(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-4}{x-2}=12$에서 알 수 있는 것

① 분모가 0인데 극한값 존재

⇒ $\frac{0}{0}$꼴 ⇒ $g(2)=4$

② $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$

⇒ 미분계수의 정의에 의해 $g'(2)=12$

$h(x)=f(g(x))$이므로

$h'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$

⇒ $h'(2)=f'(g(2))\cdot g'(2)$

이때 $f(x)=\ln(x^2-x+2)$이므로

$f'(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+2}$이고, 구하는 값은

㉠ $f'(g(2))\cdot g'(2)=f'(4)\cdot 12$

$=12\cdot\frac{7}{14}$

$=\boxed{6}$

만든 놈: [O] crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

음함수의 미분법 기본 문제

25. 곡선 $2e^{x+y-1}=3e^{x}+x-y$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

음함수의 미분 : x를 변수로!

$\Rightarrow 2e^{x+y-1}+2e^{x+y-1}\cdot\frac{dy}{dx}=3e^{x}+1-\frac{dy}{dx}$

이 식의 x와 y에 각각 0, 1을 대입하면

$2+2\cdot\frac{dy}{dx}=4-\frac{dy}{dx}$

$\therefore$ 구 $\frac{dy}{dx}=\boxed{\frac{2}{3}}$

부분적분 + 치환적분 같이 물어봄

26. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고

$$\int_{1}^{2}(x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx=2$$

를 만족시킨다. $f(1)=4$일 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

도함수가 연속이다 : 미분가능하다

대놓고 주어진 식에서 적분기호 안에 f'이 있으므로 부분적분 의심.

$\int_{1}^{2}(x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx=2$

$=\left[(x-1)\cdot 2f\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{1}^{2}-\int_{1}^{2}2f\left(\frac{x}{2}\right)dx$

(∵ 합성함수 미분)

$=2f(1)-2\int_{1}^{2}f\left(\frac{x}{2}\right)dx$

이제 $\frac{x}{2}=t$로 치환하면 $\frac{1}{2}=\frac{dt}{dx}\Rightarrow dx=2dt$

$\therefore 2f(1)-4\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(t)dt=2$

조건에서 $f(1)=4$이므로

구 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(t)dt=\boxed{\frac{3}{2}}$

괜찮히… 쉽다. 닮음정리는 언제든 등장가능 ~

27. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=\overline{AC_1}=\sqrt{17}$, $\overline{B_1C_1}=2$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 AC_1 위의 점 C_2, 삼각형 AB_1C_1의 내부의 점 D_1을

$$\overline{B_1D_1}=\overline{B_2D_1}=\overline{C_1D_1}=\overline{C_2D_1},\ \angle B_1D_1B_2=\angle C_1D_1C_2=\frac{\pi}{2}$$

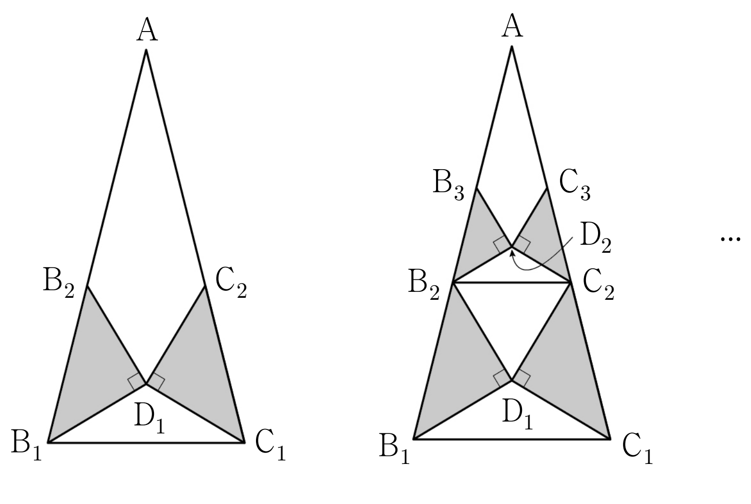
가 되도록 잡고, 두 삼각형 $B_1D_1B_2$, $C_1D_1C_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 AB_2 위의 점 B_3, 선분 AC_2 위의 점 C_3, 삼각형 AB_2C_2의 내부의 점 D_2를

$$\overline{B_2D_2}=\overline{B_3D_2}=\overline{C_2D_2}=\overline{C_3D_2},\ \angle B_2D_2B_3=\angle C_2D_2C_3=\frac{\pi}{2}$$

가 되도록 잡고, 두 삼각형 $B_2D_2B_3$, $C_2D_2C_3$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

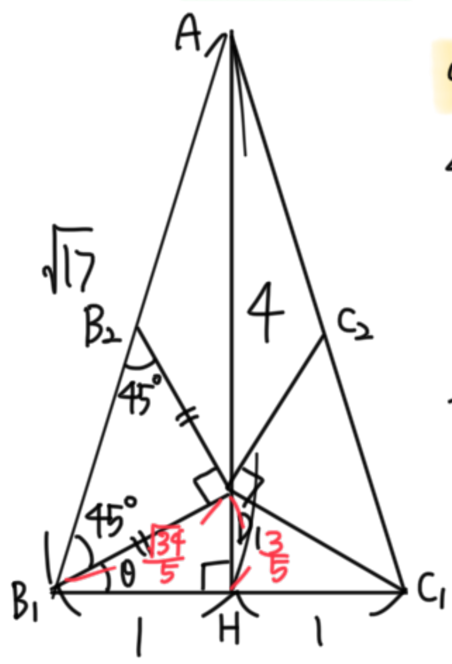
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



R_1 R_2 …

① 2 ② $\frac{33}{16}$ ③ $\frac{17}{8}$ ④ $\frac{35}{16}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

STEP 1. 초항 구하기



이등변삼각형은 밑변에 수선!

$\angle D_1B_1C_1=\theta$로 두면

$\tan(45^\circ+\theta)=4$ 이므로

($\because \triangle B_1B_2D_1$ = 직각이등변$\triangle$)

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=4$$

$\Rightarrow \tan\theta=\frac{3}{5}$ 이므로 $\overline{D_1H}=\frac{3}{5}$이고, 피타고라스 정리에 의해

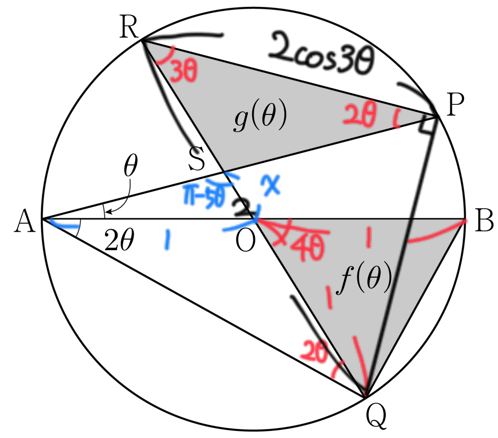
$\overline{B_1D_1}=\frac{\sqrt{34}}{5}$이다. $\therefore$ 초항: $\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{34}}{5}\times\frac{\sqrt{34}}{5}\right)\times 2=\frac{34}{25}$

삼각형이 2개

공비는 다음 page

원주각… 원주각… 또 원주각

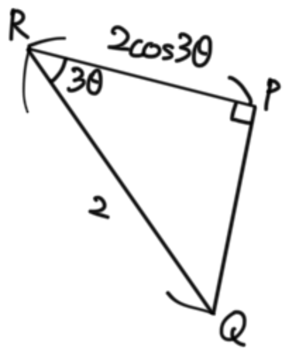
28. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 원 위에 점 P를 $\angle PAB=\theta$가 되도록 잡고, 점 P를 포함하지 않는 호 AB 위에 점 Q를 $\angle QAB=2\theta$가 되도록 잡는다. 직선 OQ가 원과 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R, 두 선분 PA와 QR가 만나는 점을 S라 하자. 삼각형 BOQ의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRS의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) [4점]



① $\frac{11}{10}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{13}{10}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

생각의 흐름을 — → — → — 으로 하면 좋을 듯 (필수는 아님!)

$\overline{AB}$, $\overline{RQ}$: 지름이므로 길이는 2



$\Rightarrow$ 원주각의 성질을 이용하면 $\angle QPR=90^\circ$

$\angle PAQ=3\theta$ 에서 이는 호 PQ의 원주각이다.

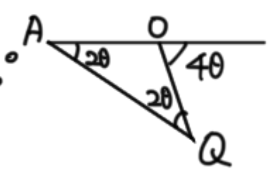
$\therefore$ 호 PQ의 원주각 $\angle QRP=3\theta$

$\Rightarrow \overline{PR}=2\cos3\theta$

또한, $\overline{OA}$와 $\overline{OQ}$는 반지름이므로 길이가 같고, 따라서 $\triangle OAQ$는 이등변$\triangle$이다. $\therefore \angle OQA=2\theta$

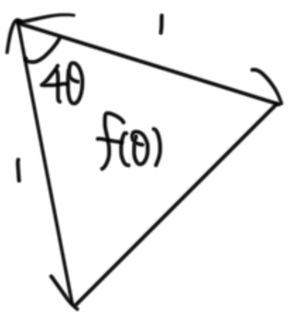
$\therefore$ 호 AR에 대한 원주각 : $\angle OQA=\angle APR=2\theta$

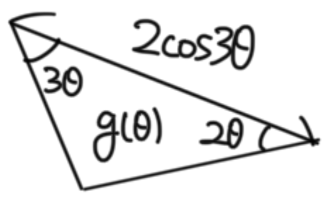
여기에 $\angle QOB=4\theta$ ($\because$



) 과

$\overline{OB}=\overline{OQ}=1$ ($\because$ 원의 반지름) 까지 구하면





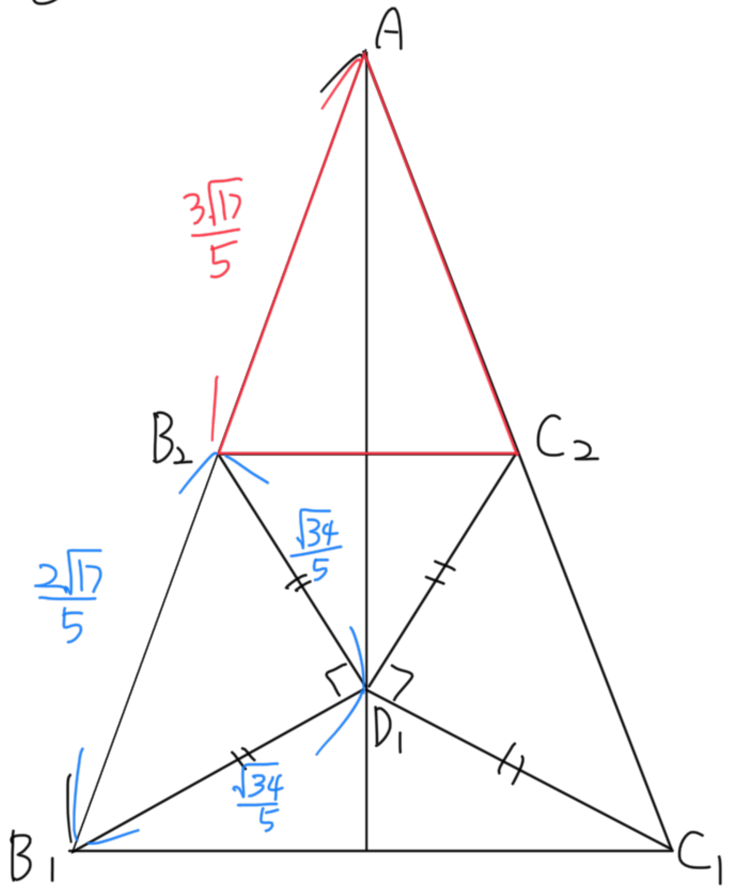
까지 알 수 있다.

여기까지가 — 과 — 의 설명이고, — 부터는 다음 page

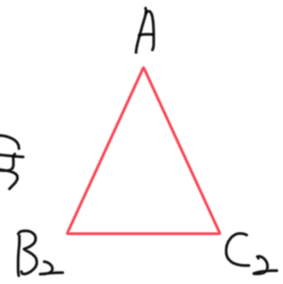
27번 이어서

만든 놈: ⓞ crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

STEP 2. 공비 구하기

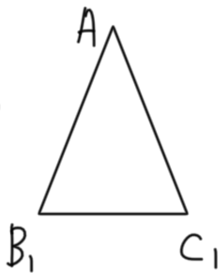


결국

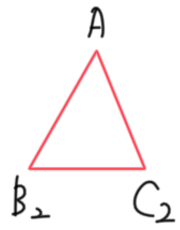


안에서 다음 그림이 그려지고, 그려지는 도형도 계속 2개씩이니 개수비도 1:1

⇒



과



의 길이비의 제곱이 넓이비. 즉 공비

$\overline{B_1D_1}=\frac{\sqrt{34}}{5}$ 이므로 $\overline{B_1B_2}=\sqrt{2}\,\overline{B_1D_1}=\frac{2\sqrt{17}}{5}$ 이고, 이는 $\overline{AB_2}=\frac{3\sqrt{17}}{5}$ 를 의미한다. ($\because\ \overline{AB_1}=\sqrt{17}$)

$$\therefore\ \overline{AB_1}:\overline{AB_2}=\sqrt{17}:\frac{3\sqrt{17}}{5}=1:\frac{3}{5}$$

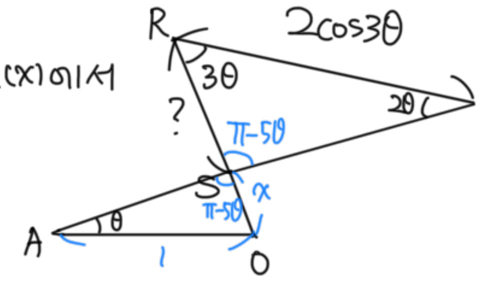
$$\Rightarrow \text{넓이비} = \text{공비} = \frac{9}{25}$$

㉠ $$\frac{\frac{34}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\boxed{\frac{17}{8}}$$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

28번 이어서

이제 g(x)에서



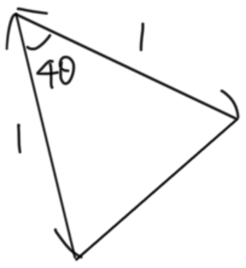
"?"을 구하면 넓이를 알 수 있을 것 같은데 그냥은 잘 안보이고... 반지름 − $\overline{OS}$로 구해볼까?

$\overline{OS}=x$로 두면 사인법칙에서 $\frac{x}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(\pi-5\theta)}=\frac{1}{\sin5\theta}$ $\quad\therefore x=\frac{\sin\theta}{\sin5\theta}$

곧 $\overline{SR}=1-\frac{\theta}{\sin5\theta}$을 얻는다.

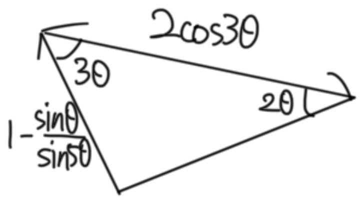
이제 넓이를 구하는데 필요한 길이와 각을 다 구했으니 계산해보자.

$f(\theta)$:



: $\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin4\theta=\frac{1}{2}\sin4\theta$

$g(\theta)$:



: $\frac{1}{2}\times2\cos3\theta\times\left(1-\frac{\sin\theta}{\sin5\theta}\right)\times\sin3\theta=\frac{\sin3\theta\cos3\theta(\sin5\theta-\sin\theta)}{\sin5\theta}$

㉠ $\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin3\theta\cos3\theta(\sin5\theta-\sin\theta)}{\sin4\theta\sin5\theta}$

$=2\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)$

$=\boxed{\frac{6}{5}}$

※ 물론 θ가 0인 지점 근처에서 $y=\sin\theta$와 $y=\theta$는 구별되지 않으니 $\sin\theta\to\theta$로 바꿔서 풀면 더 계산이 편해지긴 하지만 정석대로 풀도록 하겠습니다.

만든 놈: Ⓘ crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

단답형

치환적분을 거꾸로도 쓸 수 있어야

29. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x<1$일 때, $f'(x)=-2x+4$이다.
> (나) $x \ge 0$인 모든 실수 x에 대하여
> $f(x^2+1)=ae^{2x}+bx$이다. (단, a, b는 상수이다.)

$\int_0^5 f(x)dx=pe^4-q$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

도함수가 연속이다 ⇒ 미분가능하다 : 연속 보장

엥? $f(x)$가 연속이라는 언급이라는 말이 없는데요?

근거 ① "도함수"라는 표현 자체가 미분가능할 때 쓴다.
근거 ② '고등학교' 교육과정에서는 불연속함수의 적분은 다루지 X
⇒ $\int_0^5 f(x)dx$를 구하라는 것은 $f(x)$가 연속임을 반증.

먼저 연속여부부터!

(가) $x<1$에서 $f'(x)=-2x+4$ 적분하면 $f(x)=-x^2+4x+C$ (C는 적분상수)
⇒ $\lim_{x\to1-}(-x^2+4x+C)=C+3$

(나) $x\ge0$에서 $f(x^2+1)=ae^{2x}+bx$
⇒ $x=0$ 대입하면 $f(1)=a$

$C+3=a$ … ①

도함수 조건 check!

$f(x^2+1)=ae^{2x}+bx$
⇒ 미분하면 $2xf'(x^2+1)=2ae^{2x}+b$ $(x>0)$
⇒ $f'(x^2+1)=\dfrac{2ae^{2x}+b}{2x}$ $(x>0)$
⇒ $\lim_{x\to0+}f'(x^2+1)=\lim_{x\to0+}\dfrac{2ae^{2x}+b}{2x}$: $\dfrac{0}{0}$ 꼴이어야 도함수의 함숫값 존재

∴ $2a+b=0$ 이므로 $b=-2a$

곧 도함수 연속 조건에서 $\lim_{x\to1-}f'(x)=\lim_{x\to1+}f'(x)$

⇒ $2=\lim_{x\to0+}f'(x^2+1)=2a\left(\lim_{x\to0+}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\right)=2a$ ∴ $a=1$

$x^2+1=t$로 생각하면 $\lim_{t\to1+}f'(t)$

이로부터, $b=-2$이므로 $x\ge0$일 때 $f(x^2+1)=e^{2x}-2x$
①에 의해 $C=(-2)$이므로 $x\le1$일 때 $f(x)=-x^2+4x-2$를 얻는다.

다음 page

합성함수의 극대/극소

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\sin|\pi f(x)|$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 함수 $g(x)$와 자연수 m이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=a_4$와 $x=a_8$에서 극대이다.
> (나) $f(a_m)=f(0)$

$f(a_k)\le f(m)$을 만족시키는 자연수 k의 최댓값을 구하시오. [4점]

절댓값은 결국 0이 될 때가 경계!

$$g(x)=\begin{cases}\sin(\pi f(x)) & (f(x)\ge0)\\ \sin(-\pi f(x))=-\sin(\pi f(x)) & (f(x)<0)\end{cases}$$

$y=g(x)$의 x절편 중 x좌표 양수인 점 a_n
⇒ $y=\sin x$은 $x=\alpha\pi$ (α은 정수) 일 때 0이므로 $f(x)=\alpha$일 때 a_n발생
∴ $f(x)=$(정수)일 때를 보자.

$y=g(x)$는 $x=a_4$, a_8에서 극대이므로 결국 $g'(x)$을 구해야 한다.

$$g'(x)=\begin{cases}\pi f'(x)\cos(\pi f(x)) & (f(x)>0)\\ -\pi f'(x)\cos(\pi f(x)) & (f(x)<0)\end{cases}$$

여기서 우리는 $g(x)$의 극점 의심점으로
a_4, a_8를 보는 거니까 $f(x)=$ 정수인 지점이라는 건 전제됨
① $g(x)$에 절댓값이 있으므로 혹시 절댓값에 의해 꺾이는 지점이 극점인지?
② $\cos(\pi f(x))=0$인 지점
③ $f'(x)=0$인 지점
을 뽑을 수 있고, 이는 다음 page에 부연설명

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

29번 이어서

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

구하는 값이 $\int_0^5 f(x)dx$ 이므로 $x=1$을 기준으로 함수 분리 필요.

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx$

$\Rightarrow \int_0^1 (-x^2+4x-2)dx + \underline{\int_1^5 f(x)dx}$

얘가 문제! 우리가 알고 있는 건 $f(x)$가 아니라 $f(x^2+1)=e^{2x}-2x$ 이다.

$f(x^2+1)$을 알고 있다면 문제 식을 그에 맞춰 변형해주면 그만.

$\int_1^5 f(x)dx \longrightarrow \int_0^2 f(t^2+1)\cdot 2t\,dt$

x: t^2+1으로 치환

$x=t^2+1$에서 $2t=\frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow 2t\,dt=dx$

2: $5=t^2+1$에서 $t=\pm 2$이지만 x와 t^2+1 사이의 일대일대응관계를 깨지 않으면서 문제 조건에서 $x\geq 0$의 범위만 등장했으므로 적분할 수 있도록 $t=2$를 택했다. (if $t=-2$를 택하면 $0\sim -2$까지의 f를 우리는 모름)

0: $1=t^2+1$에서 $t=0$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(t^2+1)\cdot 2t\,dt = \int_0^2 2t(e^{2t}-2t)dt$$

$$= \int_0^2 2te^{2t}dt - 4\int_0^2 t^2 dt$$

곧 ㉠ $\int_0^5 f(x)dx = \int_0^1 (-x^2+4x-2)dx + \int_0^2 2te^{2t}dt - 4\int_0^2 t^2 dt$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-2x\right]_0^1 + \left[te^{2t}\right]_0^2 - \int_0^2 e^{2t}dt - \left[\frac{4}{3}t^3\right]_0^2$$

$$= -\frac{1}{3}+2e^4-1-\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^2 - \frac{32}{3}$$

$$= \frac{3}{2}e^4 - \frac{21}{2}$$

$\therefore p=\frac{3}{2},\ q=\frac{21}{2}$ 이므로 $p+q=\boxed{12}$

30번 이어서 ⋯ ①

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

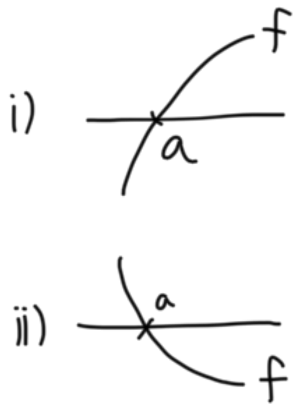
① $g(x) = \sin|\pi f(x)|$

절댓값 때문에 꺾이는 지점. 즉 $f(x)=0$ 에서 극점인지 check!

사실 $y=|\pi f(x)|$은 무조건 형태로 극소이고, 겉함수인 $y=\sin x$이 $x=0$ 주변에서 증가함수 이므로 극소가 그대로 유지된다... 긴 한데 이건 모르는 분들이 있을 수 있고, 설명하자면 길기에 그냥 도함수의 부호 관찰을 하면

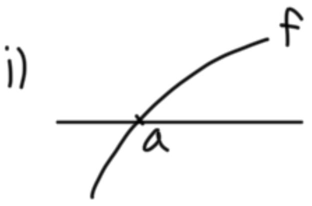
$$g'(x) = \begin{cases} \pi f'(x)\cos(\pi f(x)) & (f(x) \geq 0) \\ -\pi f'(x)\cos(\pi f(x)) & (f(x) < 0) \end{cases}$$

에서 $f(x)=0$인 경우는



두 가지이므로 따져보면

i)

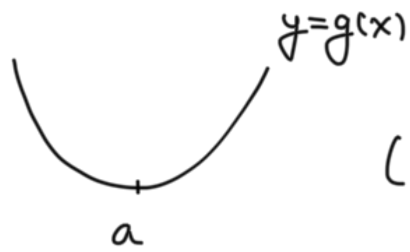


인 경우 : $x=a$ 주변에서 $f'(x) > 0$

$f(x) \geq 0$ 일 때 $\pi \underset{(+)}{f'(x)} \underset{\cos 0 \text{이므로 } 1}{\cos(\pi f(x))}$ ⇒ $x=a+$ 에서 $g'(x) = (+)$

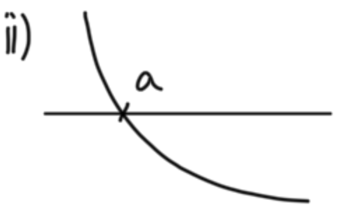
$f(x) < 0$ 일 때 $-\pi \underset{(+)}{f'(x)} \underset{\cos 0 \text{이므로 } 1}{\cos(\pi f(x))}$ ⇒ $x=a-$ 에서 $g'(x) = (-)$

⇒



(극소)

ii)

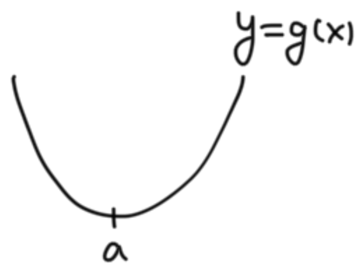


인 경우 : $x=a$ 주변에서 $f'(x) < 0$

$f(x) \geq 0$ 일 때 $\pi \underset{(-)}{f'(x)} \underset{\cos 0 \text{이므로 } 1}{\cos(\pi f(x))}$ ⇒ $x=a-$ 에서 $g'(x) = (-)$

$f(x) < 0$ 일 때 $-\pi \underset{(-)}{f'(x)} \underset{\cos 0 \text{이므로 } 1}{\cos(\pi f(x))}$ ⇒ $x=a+$ 에서 $g'(x) = (+)$

⇒



(극소)

∴ i), ii) 모두 극소이므로 $f(x)=0$인 지점은 a_4, a_8의 후보가 될 수 있다.

다음 page

30번 이어서 … ②

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

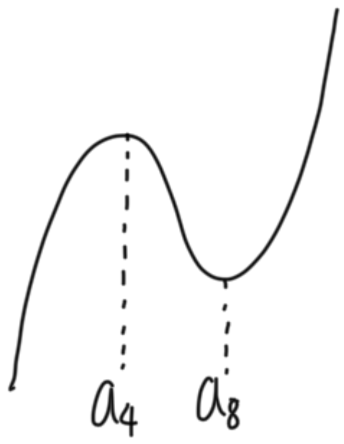
② $\cos(\pi f(x)) = 0$ 인 지점이 극대인지?

애초에 $\sin(\pi f(x)) = 0$ 인 지점, 즉 $f(x) = \alpha$ (α는 정수) 일 때만 a_4, a_8의 후보가 될 수 있다.
그런데 $f(x) = \alpha$ 이면 cos값은 ± 1 만 가능하므로 0이 될 수 없다.

∴ $\cos(\pi f(x)) = 0$ 자체가 $x = a_4$, $x = a_8$ 에서 불가능

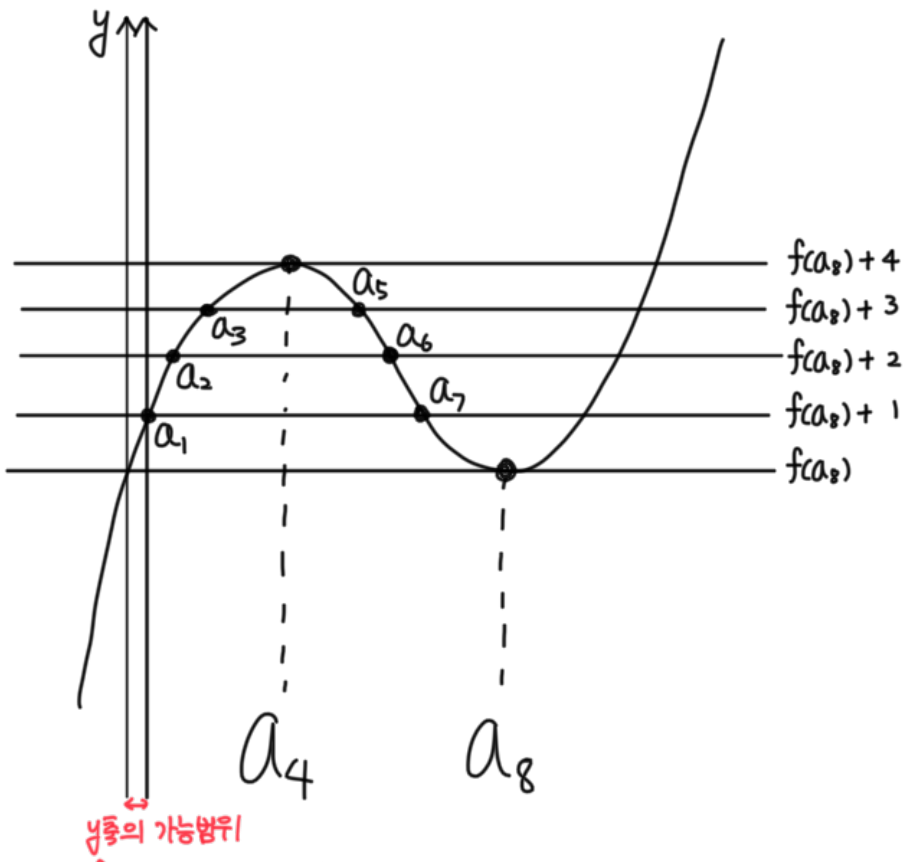
결국 극대점 후보군 ①, ②, ③ 중 ①, ②가 불가능하므로 ③인 경우, 즉 $f'(x) = 0$인 지점이 $x = a_4, a_8$ 이다.

∴ $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로



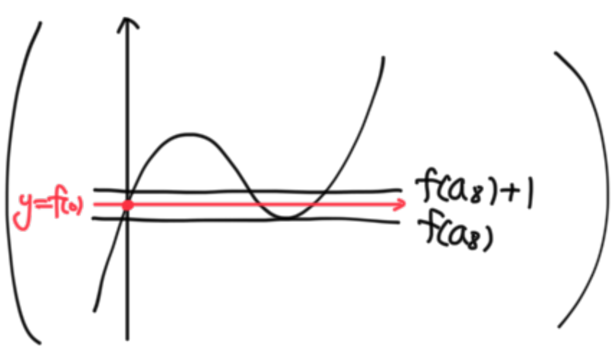
인데,

a_4, a_8은 문제 조건에 의해 $f(x) =$ 정수를 만족하는 x값 중 양수인 것을 순서대로 번호매긴 것이므로
$f(a_4)$과 $f(a_8)$ 사이에는 정수가 3개 존재하고, 그래프는 다음과 같다.



($y = f(a_8)$과는 교점이 발생해도 되지만, (그 왼쪽으로는 새로운 a_1이 발생하기 때문에 불가능)
$f(a_8)+1$ 과는 교점이 발생하면 안된다. ($\because a_1 = 0$ 이 되어버린다))

이때 조건 (나)에 의해 $f(a_m) = f(0)$ 이므로 if) y축이 애매하게 존재할 경우 ex)

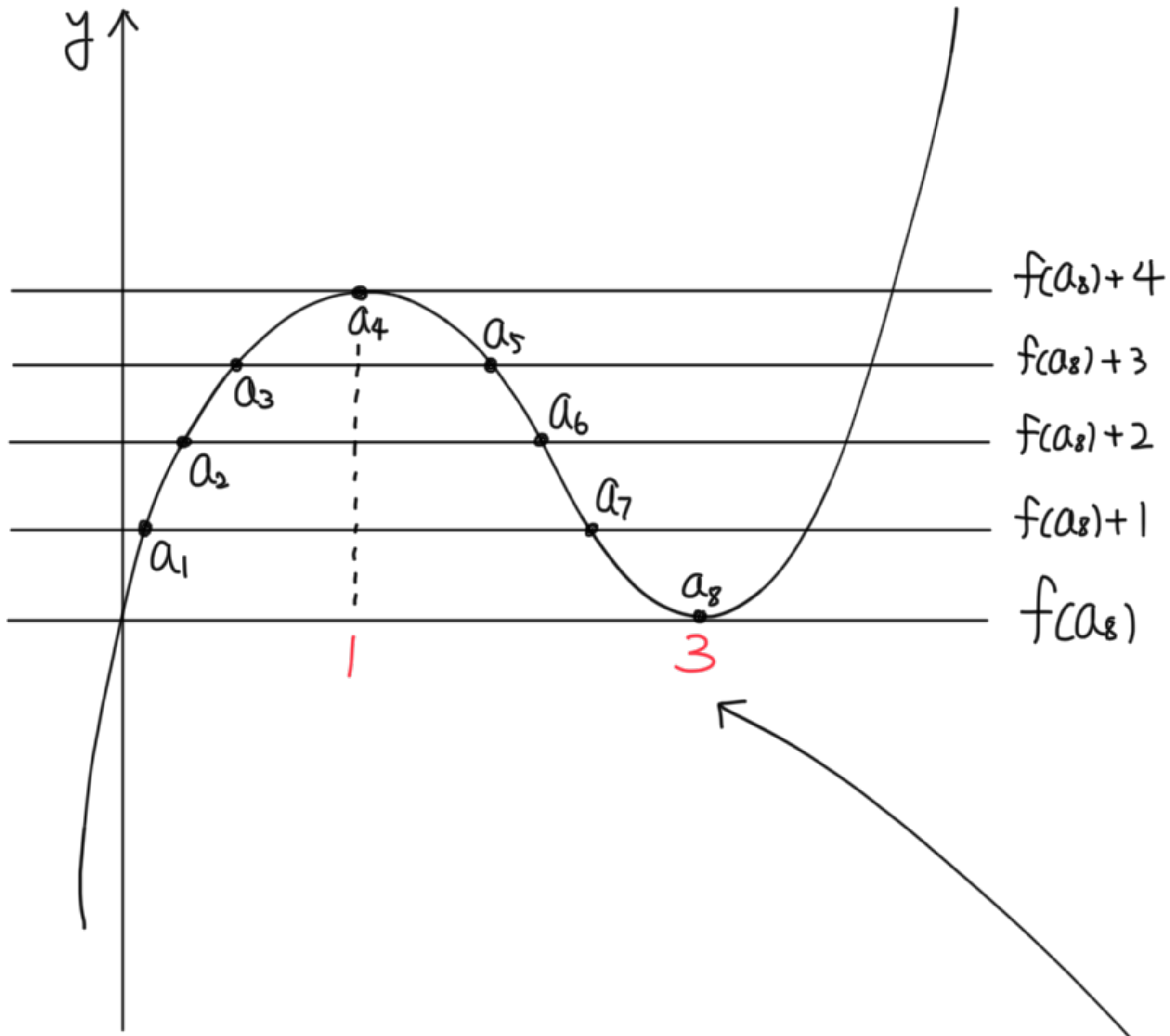


$f(a_m) = f(0)$을 만족하지 않는다. ($\because f(a_m) =$ 정수, $f(0) \neq$ 정수)

곧 정확한 개형은 다음 page

30번 이어서 … ③

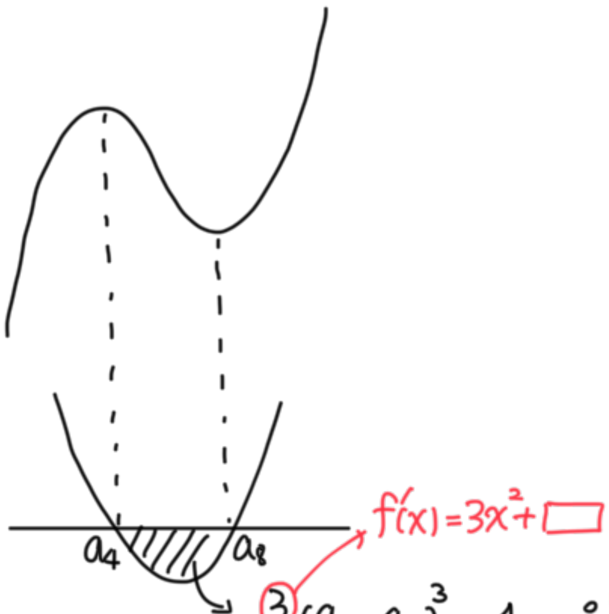
만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물



곧 $f(a_m)=f(0)$ 에서 $m=8$을 얻는다.

또한, $f(x)$의 극점에서의 함숫값의 차가 4이므로 이는 도함수의 정적분과 같다.

∴



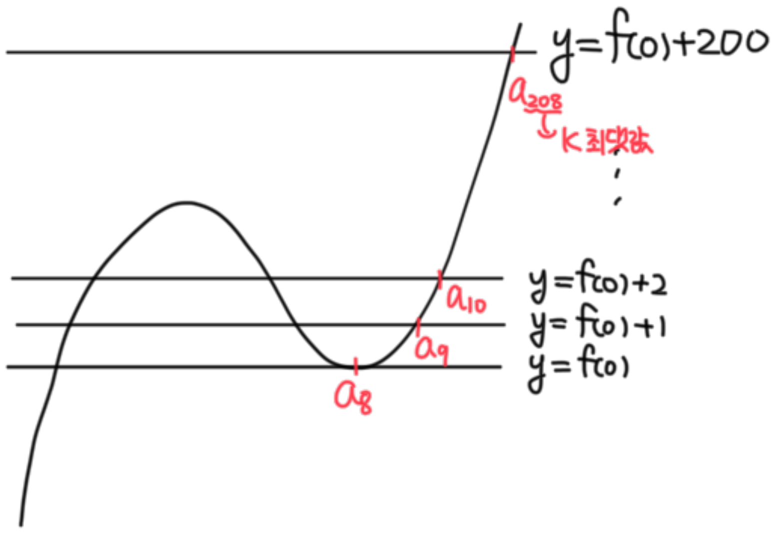
$\frac{3}{6}(a_8-a_4)^3=4$ ∴ $a_8-a_4=2$

⇒ 삼차함수의 비율관계에 의해 $a_4=1$, $a_8=3$

곧 $f(x)=x(x-3)^2+f(0)$ 꼴로 둘 수 있다.

㉠ $f(a_k)\le f(m)$ 을 만족시키는 자연수 k의 최댓값

⇒ $f(a_k)\le f(8)$ 이므로 $f(a_k)\le f(0)+200$ 을 만족하는 경우를 찾는다.



그림에서 a_k $(k\ge8)$은 차례대로 $y=f(0)$부터 1씩 올라가는 형태이므로

$f(0)+200$은 a_{208}에서 교점이 발생한다.

∴ k의 최댓값: $\boxed{208}$

제 2 교시

수학 영역(기하)

만든 놈: crazy_hansuckwon
수민쿼, 오르비: 한석원의눈물

5지선다형

벡터의 사칙연산

23. 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(4,\ -2)$에 대하여 벡터 $2\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

$2\vec{a}+\vec{b}$
$=(4,6)+(4,-2)$
$=(8,4)$

㉠ 성분의 합 : $\boxed{12}$

이차곡선에서의 접선

24. 타원 $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 $(a,\ b)$에서의 접선이 점 $(8,\ 0)$을 지날 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

접선의 방정식 : $\frac{ax}{32}+\frac{by}{8}=1$

$\Rightarrow (8,0)$ 대입하면 $\frac{a}{4}=1$ 이므로 $a=4$

곧 $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}=1$ 이 $(4,b)$를 지난다는 것을 이용하면

$\frac{16}{32}+\frac{b^2}{8}=1$ $\therefore b=2$ (제 1사분면 위의 점이므로 $b>0$)

㉠ $a+b=\boxed{6}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

직선의 방향 vector

25. 좌표평면에서 벡터 $\vec{u}=(3,\ -1)$에 평행한 직선 l과 직선 $m: \frac{x-1}{7}=y-1$이 있다. 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{14}}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$
④ $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

직선 l의 방향벡터 : $(3,-1)$

직선 m의 방향벡터 : $(7,1)$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{|3\times7-1\times1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}\sqrt{7^2+1^2}}$$

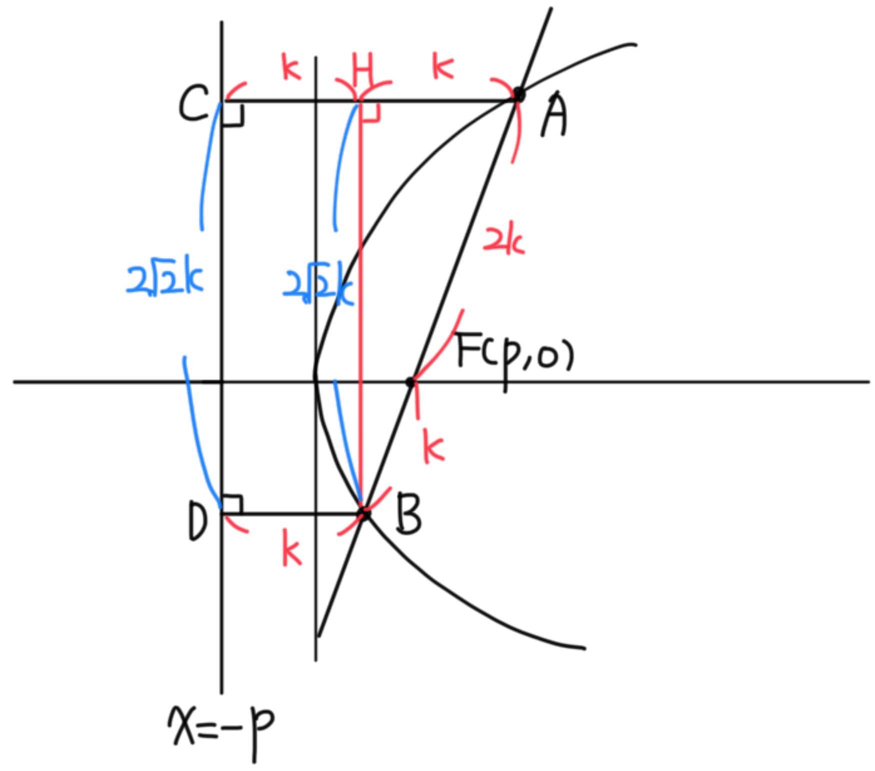
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{20}{\sqrt{10}\times\sqrt{50}}$$

$\therefore$ ㉠ $\cos\theta = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

결국 단순무식 계산보다는 이차곡선의 정의

26. 포물선 $y^2=4px\ (p>0)$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AC}:\overline{BD}=2:1$이고 사각형 ACDB의 넓이가 $12\sqrt{2}$일 때, 선분 AB의 길이는? (단, 점 A는 제1사분면에 있다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10



$\overline{AC}:\overline{BD}=2:1$ 임을 이용해 $\overline{AC}=2k$, $\overline{BD}=k$로 두면 그림에서

$\overline{CH}=\overline{HC}=k$이다.

또한, 포물선의 정의에 의해 $\overline{AF}=2k$, $\overline{BF}=k$이므로 $\overline{AB}=3k$이고,

$\Rightarrow \overline{BH}=\overline{CD}=2\sqrt{2}k$

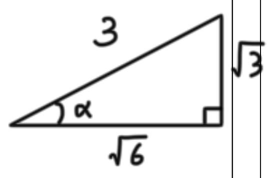
곧 $\square ACDB = \frac{1}{2}\times(2k+k)\times2\sqrt{2}k = 12\sqrt{2}$

$\therefore k=2$

㉠ $\overline{AB}=3k$
$=\boxed{6}$

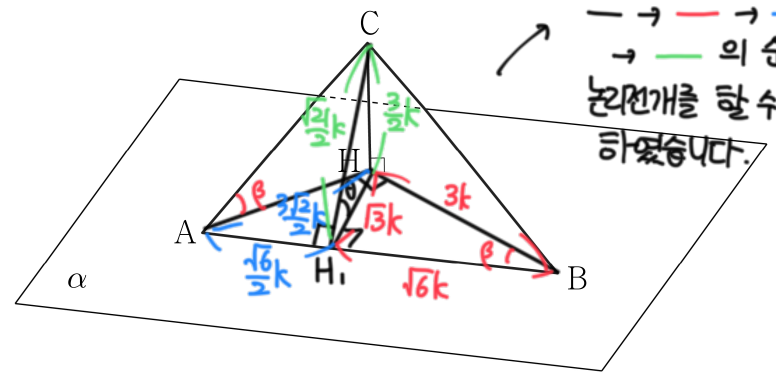
익숙한 삼수선의 정리 적용

27. 공간에 선분 AB를 포함하는 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\angle AHB = \frac{\pi}{2}$
>
> (나) $\sin(\underbrace{\angle CAH}_{\beta}) = \sin(\underbrace{\angle ABH}_{\beta}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
>
> 
>

평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, 점 H는 선분 AB 위에 있지 않다.) [3점]

① $\frac{\sqrt{7}}{14}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ③ $\frac{3\sqrt{7}}{14}$ ✓④ $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{7}}{14}$



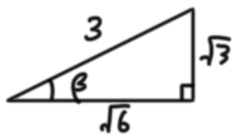
이해를 위해 — → — → — → — 의 순서로 논리전개를 할 수 있도록 하였습니다.

$\overline{CH} \perp \alpha$ 이므로 점 H에서 평면 α 위의 선 $\overline{AB}$에 수선을 내리고 그 수선의 발을 H_1으로 두면 삼수선의 정리에 의해 $\overline{CH_1} \perp \overline{AB}$이다.

⇒ $\angle CH_1H$은 평면 ABC와 평면 α의 교선인 $\overline{AB}$에 각각 내린 수선이 이루는 각이므로 이면각이다.

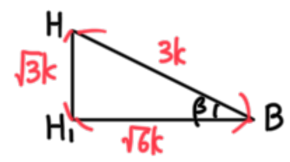
$\therefore \angle CH_1H = \theta$

조건 (나)에서 $\angle CAH = \angle ABH = \beta$로 두면



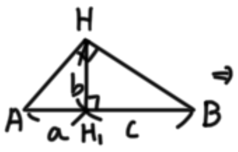
을 얻고,

이로부터



으로 둘 수 있다.

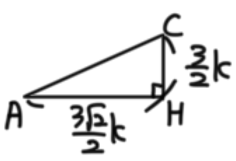
여기서



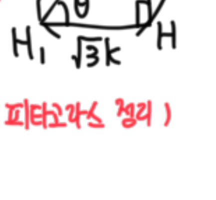
⇒ $b^2 = ac$를 이용하면 $\overline{AH_1} = \frac{\sqrt{6}}{2}k$이고, 연속해서

$\triangle AHB$ 넓이 $= \frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{HB} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{HH_1}$을 이용하면 $\overline{AH} = \frac{3\sqrt{2}}{2}k$이다.

결국 $\triangle ACH$에서 $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$을 이용하면



를 얻고,



(∵ 피타고라스 정리)

⇒ ㉠ $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}k}{\frac{\sqrt{21}}{2}k} = \boxed{\frac{2\sqrt{7}}{7}}$

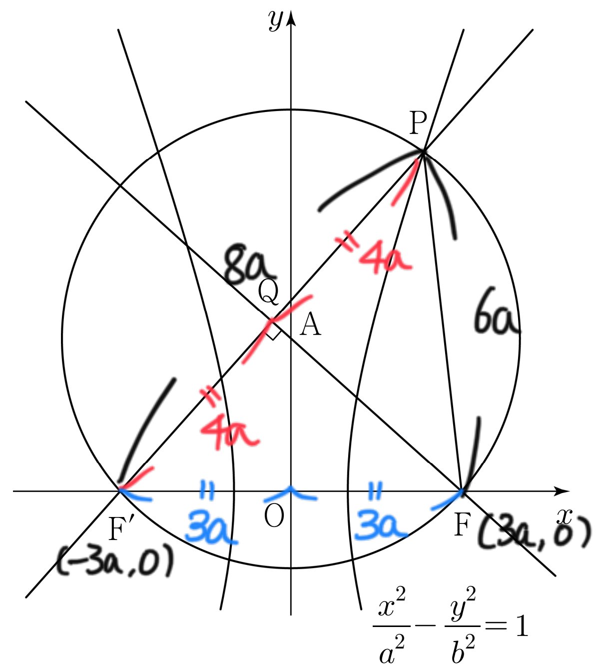
원이 등장하면 결국 그게 그거

28. 두 초점이 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$과 점 $A(0,\ 6)$을 중심으로 하고 두 초점을 지나는 원이 있다. 원과 쌍곡선이 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점 P와 두 직선 PF', AF가 만나는 점 Q가

$$\overline{PF} : \overline{PF'} = 3 : 4,\ \angle F'QF = \frac{\pi}{2}$$

를 만족시킬 때, $b^2 - a^2$의 값은? (단, a, b는 양수이고, 점 Q는 제2사분면에 있다.) [4점]

① 30 ✓② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50



$\overline{PF} : \overline{PF'} = 3 : 4$이므로 $\overline{PF} = 3k$, $\overline{PF'} = 4k$로 두면 쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{PF'} - \overline{PF} = k = 2a$이고 $\overline{PF} = 6a,\ \overline{PF'} = 8a$

이때 $\overline{AF'} = \overline{AP}$ (∵ 원의 반지름)이므로 $\triangle APF'$는 이등변삼각형인데 $\angle F'QF = \frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{PF'} \perp \overline{AQ}$이고, 따라서 이등변삼각형의 수선에 대한 성질에 의해 $\overline{F'Q} = \overline{PQ}$이다.

$\therefore \overline{F'Q} = \overline{PQ} = 4a$ (∵ $\overline{PF'} = 8a$)

이로부터 거꾸로 $\overline{PF'} \perp \overline{F'Q}$, $\overline{F'Q} = \overline{PQ} = 4a$이므로 $\overline{PF} = \overline{PF'} = 6a$

$\therefore F(3a,\ 0),\ F'(-3a,\ 0)$ (∵ $\overline{OF} = \overline{OF'} = 3a$)

곧 직각삼각형 FQF'에서 $\overline{QF'} = 4a$, $\overline{FF'} = 6a$이므로 $\overline{QF} = 2\sqrt{5}a$

⇒ 닮음을 이용하기 위해 $\angle AFO = \theta$로 두면 삼각형 AOF를 기준으로 했을 때 $\tan\theta = \frac{6}{3a} = \frac{2}{a}$이고, 삼각형 $F'QF$를 기준으로 했을 때 $\tan\theta = \frac{4a}{2\sqrt{5}a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \frac{2}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$이므로 $a = \sqrt{5}$ ⟶ $c = 3a = 3\sqrt{5}$

결국, 쌍곡선의 정의에 의해 $a^2 + b^2 = c^2$이므로 $a^2 = 5$, $c^2 = 45$를 대입하면 $b^2 = 40$이고 ㉠ $b^2 - a^2 = \boxed{35}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

단답형

개인적으로 30번과 바뀌었어야 한다고 생각함. 벡터의 합성 분해

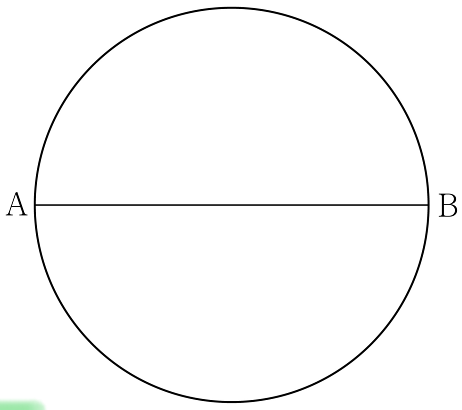
29. 좌표평면 위에 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 원 위의 서로 다른 두 점 C, D가

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=27,\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=9,\ \overline{CD}>3$$

을 만족시킨다. 선분 AC 위의 서로 다른 두 점 P, Q와 상수 k가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\frac{3}{2}\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$
(나) $\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QD}=3$

$k\times(\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{DP})$의 값을 구하시오. [4점]



$\overline{AB}$가 원의 지름임에 주목해보자.

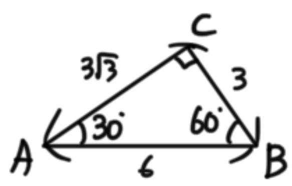
$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overrightarrow{AB}$를 $\overrightarrow{AC}$에 정사영하면 서로 일치한다.

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}|^2=27$

$\Rightarrow\ |\overrightarrow{AC}|=3\sqrt{3}$

곧 직각△ ABC에서 $\overline{BC}=3$이다.

∴ △ABC는 다음과 같은 △



마찬가지로, $\angle ADB=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overrightarrow{AB}$를 $\overrightarrow{AD}$에 정사영하면 서로 일치한다.

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AD}|^2=9$

$\Rightarrow\ |\overrightarrow{AD}|=3$

곧 직각△ ABD에서 $\overline{BD}=3\sqrt{3}$이다.

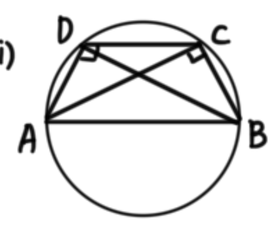
$\therefore\ \triangle ABC\equiv\triangle ABD$ (SSS합동)

방향만 다른

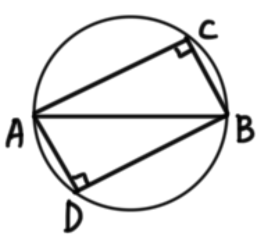
은 문제에 영향 X

이로써 □ABCD는 사다리꼴 OR 직사각형 둘 중 하나.

i)



ii)



다음 page

수직관계에 대한 정의의 완벽한 이해 및 논리 전개필요

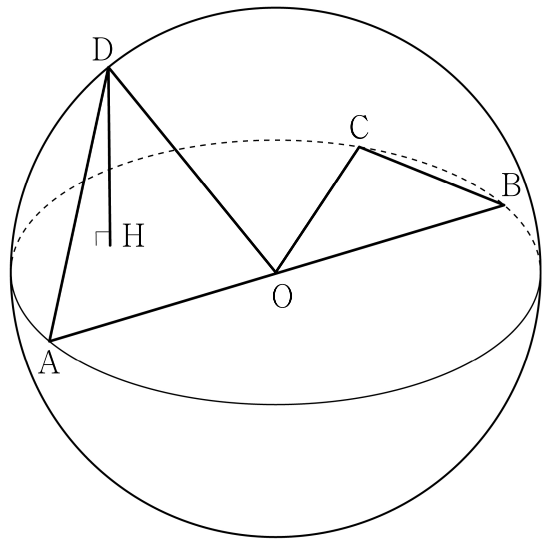
30. 공간에 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 구가 있다. 구 위의 서로 다른 세 점 A, B, C가

$$\overline{AB}=8,\ \overline{BC}=2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 평면 ABC 위에 있지 않은 구 위의 점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 직선 OC, OD가 서로 수직이다.
(나) 두 직선 AD, OH가 서로 수직이다.

삼각형 DAH의 평면 DOC 위로의 정사영의 넓이를 S라 할 때, $8S$의 값을 구하시오. (단, 점 H는 점 O가 아니다.) [4점]



공간도형 문제 중 특히 두 평면 사이의 정사영을 묻는 문제는 보조선 등을 이용해 다른 평면을 그리고, 그 평면을 이용해 우회적으로 두 평면 사이의 이면각을 구하는 경우가 많다.

문제에서 구하는 것이 △DAH의 평면 DOC 위로의 정사영의 넓이이므로 △DAH의 넓이를 구하고 두 평면 사이의 이면각을 구하라는 뜻인데, 두 평면을 연장해서는 교선이 눈에 잘 띄지 않는다.

⇒ 이면각을 우회적으로 구할 생각을 하고 있어야 한다.

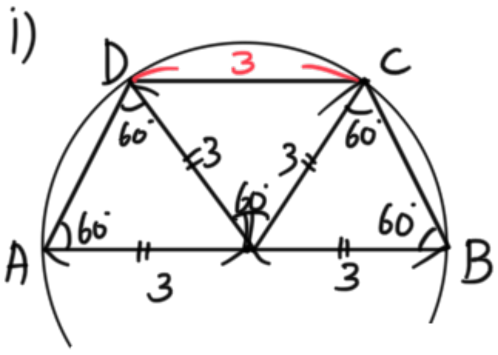
다음 page

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

29번 이어서

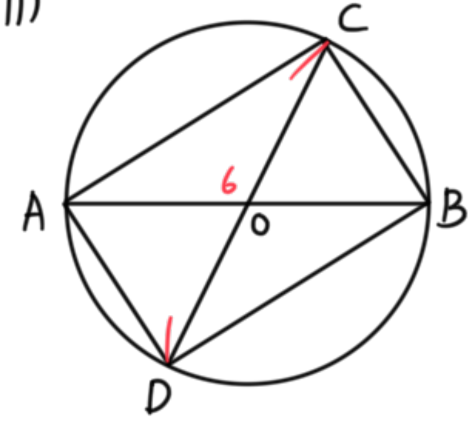
만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

i)



이므로 $\overline{CD}=3$. ∴ $\overline{CD}>3$ 이라는 조건에 모순

ii)



$\overline{CD}$는 원의 지름이므로 $\overline{CD}=6$ ∴ $\overline{CD}>3$ 만족!

조건 (가) 해석 $\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}\right)$

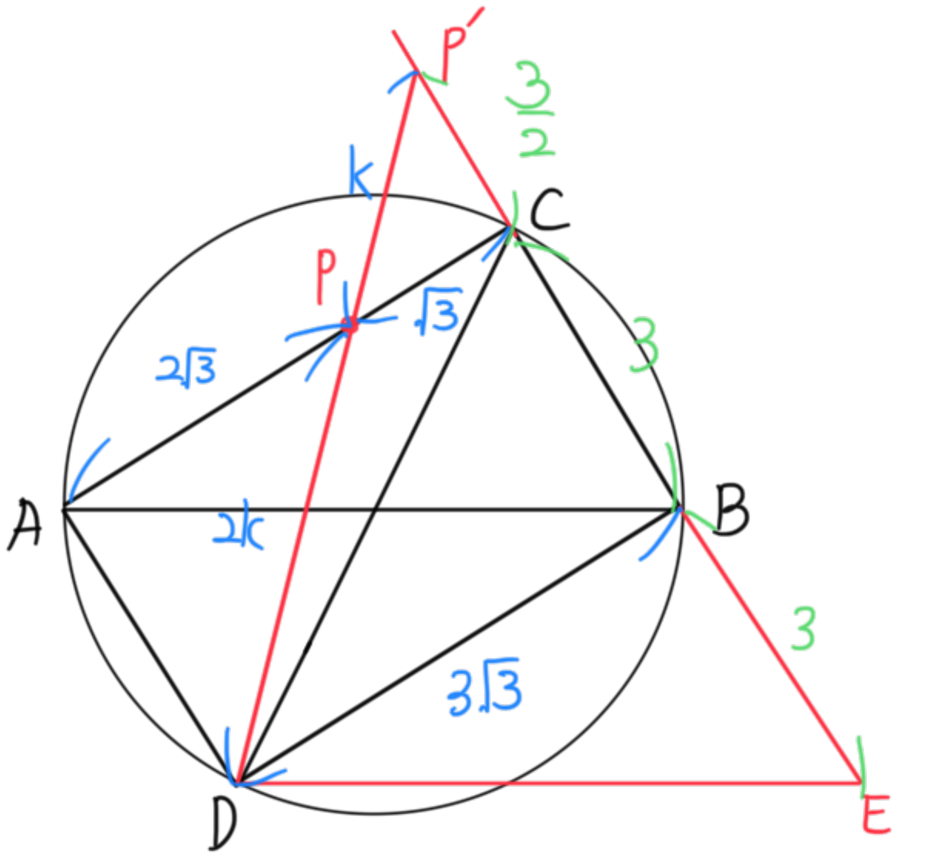
벡터의 합성을 위해 $\overrightarrow{AB}$의 시작점을 점 D가 되도록 옮긴 후, 점 B에 대응되는 끝점을 점 E로 둔 뒤 $\frac{3}{2}\overrightarrow{DP}$의 끝점을 P′로 두자.

⇒ $\frac{3}{2}\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DP'}-\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EP'}=k\overrightarrow{BC}$

∴ 즉, $\overrightarrow{EP'}$와 $\overrightarrow{BC}$는 방향이 같다.

이때 □ABED는 평행사변형이고, $\angle DEB=\angle ABC=\frac{\pi}{3}$ 이므로 점 E, B, C는 한 직선 위에 있다.

∴ 점 P′ 또한 $\overline{BC}$를 연장한 직선 위에 존재한다.



여기서 $\frac{3}{2}\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{DP'}$ 이므로 $\overline{DP'}:\overline{PP'}=3:1$ 이다.

즉, △PP′C 와 △DP′B는 3:1 닮음이다.

∴ $\overline{BD}=3\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{PC}=\sqrt{3}$, $\overline{AP}=2\sqrt{3}$ 이다.

$\overrightarrow{EP'}=k\overrightarrow{BC}$에서 k를 구하기 위해 $|\overrightarrow{CP'}|=x$로 두면 $\overline{CP'}:\overline{BP'}=1:3$ 에서

$x:x+3=1:3$ ∴ $x=\frac{3}{2}$

따라서 $k=\frac{5}{2}$이다.

결국 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{DP}$는 $\overrightarrow{DP}$를 $\overrightarrow{AQ}$에 정사영해서 $|\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{AP}|=2\sqrt{3}$ 임을 이용해 구할 수 있고,
㉮ $k\times(\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{DP})=\frac{5}{2}\times\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=\boxed{15}$

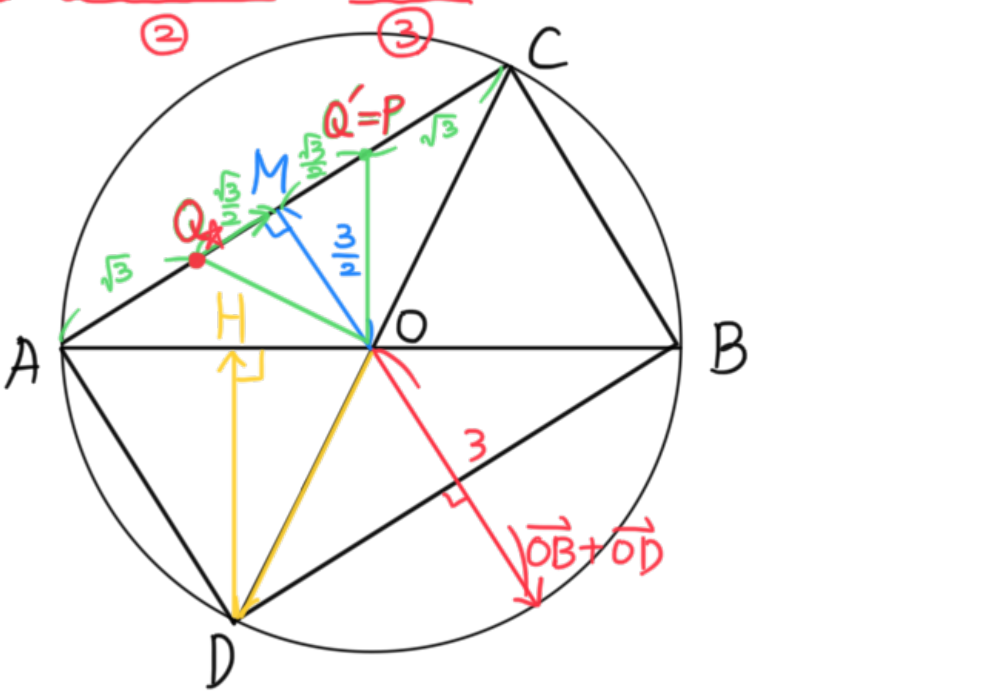
조건 (나) 해석 $(\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QD}=3)$

점 Q가 동점이기 때문에 이 상태로는 내적을 구하기 어렵다.
따라서 벡터의 분해를 통해 우회적으로 구해야 하는데, 보통 원이 등장했을 경우 벡터를 분해할 때는 원의 중심을 이용하는 경우가 많다.

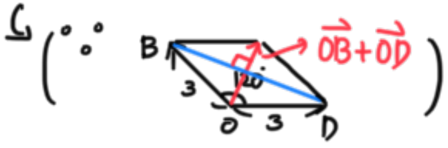
∴ $(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OD})$

⇒ $|\overrightarrow{QO}|^2+\overrightarrow{QO}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{QO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$

⇒ $\underbrace{|\overrightarrow{QO}|^2}_{①}+\underbrace{\overrightarrow{QO}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})}_{②}+\underbrace{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}}_{③}=3$



② 여기서 벡터의 덧셈의 정의를 통해 생각해보면 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$는 길이가 같은 두 벡터의 덧셈이므로 $\overline{BD}$에 수직일 수 밖에 없고, 길이가 3인 벡터다.

↳ (∵ ) ⇒ $\overline{AC}\,/\!/\,\overline{BD}$ 이므로 $(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})\perp\overline{AC}$

이 때 점 Q는 $\overline{AC}$ 위의 점이므로 $\overline{AC}$의 중점을 M으로 두면 $\overrightarrow{QO}$를 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$에 정사영한 벡터는 항상 $\overrightarrow{MO}$이고, 그 길이는 $|\overrightarrow{MO}|=\frac{3}{2}$으로 일정하다.

∴ $\overrightarrow{QO}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=|\overrightarrow{MO}||(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})|=\frac{3}{2}\times3=\frac{9}{2}$

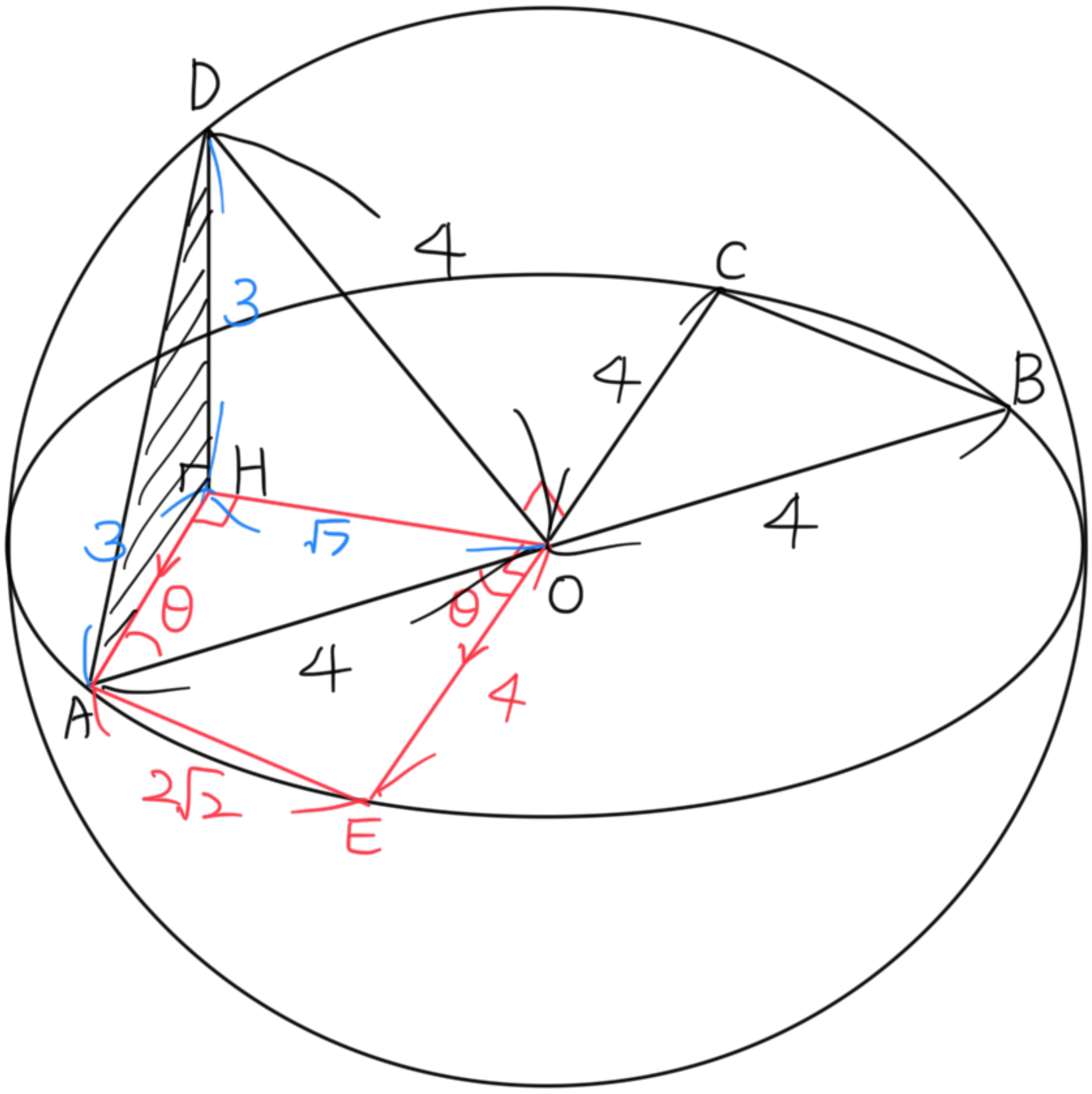
③ 또한, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$의 경우에는 $\overrightarrow{OD}$를 $\overrightarrow{OB}$로 정사영했을 때 길이가 $\frac{3}{2}$인 벡터로 정사영되므로 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=-|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OH}|$ (∵ 두 벡터 방향 서로 반대) $=-3\times\frac{3}{2}=-\frac{9}{2}$

∴ $|\overrightarrow{QO}|^2+\overrightarrow{QO}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=|\overrightarrow{QO}|^2+\frac{9}{2}-\frac{9}{2}=\underbrace{|\overrightarrow{QO}|^2=3}_{①}$

∴ $|\overrightarrow{QO}|=\sqrt{3}$

그러면 $\overline{QO}=\sqrt{3}$, $\overline{MO}=\frac{3}{2}$ 이므로 직각 △QMO 에서 $\overline{QM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이고, 점 P와 Q는 서로 다른 점이므로 위 그림처럼 Q′가 아닌 Q에 위치한다.

만든 놈 : [instagram] crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물



조건 (가) : $\overline{OC} \perp \overline{OD}$

점 H가 점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발이므로 $\overline{DH} \perp$ 평면 ABC 이고, 평면과 직선이 수직이면 평면에 속하는 모든 직선과 수직이라는 의미이므로 $\overline{DH} \perp \overline{OH}$

∴ 삼수선의 정리에 의해 $\overline{OH} \perp \overline{OC}$ 이다.

조건 (나) : $\overline{AD} \perp \overline{OH}$

조건 (가)에서 $\overline{DH} \perp \overline{OH}$ 이므로 $\overline{OH}$는 한 평면 위의 두 직선 $\overline{AD}$와 $\overline{DH}$ 모두에 수직이다.

⇒ 한 평면 DAH의 두 직선과 $\overline{OH}$가 수직이므로 평면 DAH와 $\overline{OH}$는 서로 수직이다.

⇒ $\overline{OH}$는 평면 DAH 위의 어떤 직선과도 서로 수직이다.

∴ $\overline{AH} \perp \overline{OH}$

곧, 조건 (가)와 (나)에 의해 $\overline{OH}$는 $\overline{OC}$와 $\overline{AH}$ 모두에 수직이므로 $\overline{OC} \parallel \overline{AH}$

이제 △DAH의 넓이를 구하기 위해서는 $\overline{OA} = \overline{OD} = 4$를 이용해야 하는데, 이를 이용하기 위해 $\angle OAH = \theta$로 두자.

이 때, $\overline{OC} \parallel \overline{AH}$ 이므로 $\overline{OC}$를 연장하여 구와 만나는 점을 E로 두면 $\angle OAH = \angle AOE$ 이므로 (∵ 엇각)
$\angle OAH = \angle AOE = \theta$

△OAE는 △OBC와 합동이고, (∵ $\angle AOE = \angle BOC$ (∵ 맞꼭지각) 이고, 두 변의 길이가 서로 같기 때문)
곧 $\overline{OA} = \overline{OE} = 4$, $\overline{AE} = 2\sqrt{2}$ 이므로 cos Law를 사용하면 $(2\sqrt{2})^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4\cos\theta$ ∴ $\cos\theta = \frac{3}{4}$

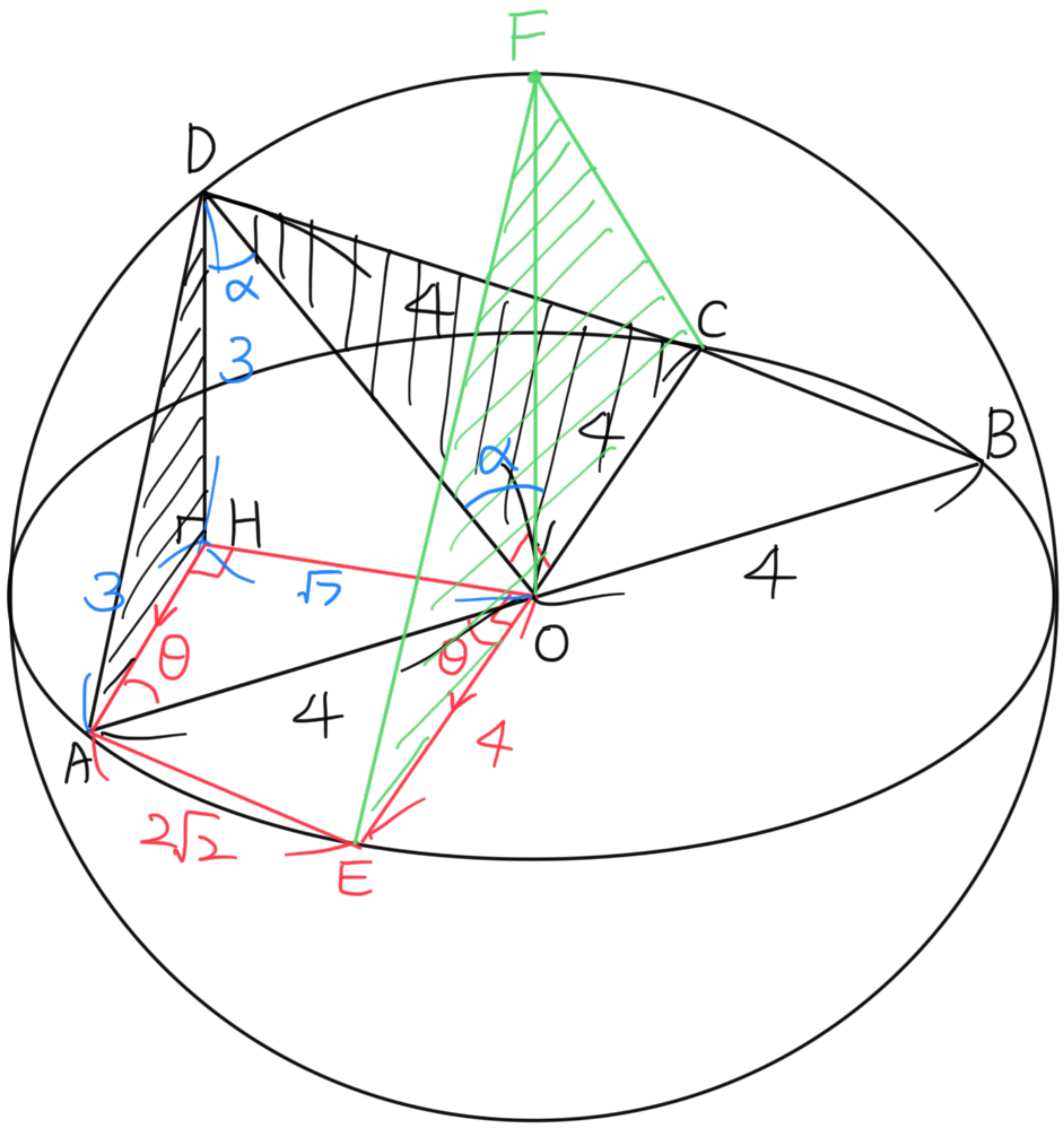
⇒ △AOH에서 $\cos\theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{OA}} = \frac{3}{4}$ 이므로 $\overline{AH} = 3$ 이고, 자연스럽게 피타고라스 정리에 의해 $\overline{OH} = \sqrt{7}$ 이다.

⇒ 마찬가지로 △OHD에서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{DH} = 3$ 이다.

∴ △DAH 넓이 $= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$

30번 이어서 ⋯ ②

$\triangle DAH$의 넓이를 구했으니 이제 평면 DAH와 평면 DOC 사이의 이면각을 구해보자.



$\overline{OC} \parallel \overline{AH}$ 에 착안해 생각해보면 구의 중심 O로부터 위로 수직인 점 (평면 DAH에서 점 D의 역할)을 F라고 두었을 때, 평면 DAH를 평행이동한 평면이 평면 FEC와 동일함을 알 수 있다.

즉, 평면 DAH와 평면 DOC 사이의 이면각은 평면 FEC와 평면 DOC 사이의 이면각이라고 해석할 수 있으며, 두 평면 사이의 교선은 $\overline{OC}$ 이고 그 교선에 수직인 각 직선은 $\overline{DO}$, $\overline{FO}$ 임을 알 수 있다.

$\therefore$ $\angle DOF$가 평면 DAH와 평면 DOC 사이의 이면각 (이하 α)

이때 $\overline{DH} \parallel \overline{FO}$ 이므로 마찬가지로 엇각의 성질에 의해 $\angle ODH = \angle DOF = \alpha$ 이다.

$\cos\alpha = \dfrac{\overline{DH}}{\overline{OD}} = \dfrac{3}{4}$ 이므로 구하는 값은

㉠ $\triangle DAH$의 넓이 $\times \cos\alpha$

$= \dfrac{9}{2} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{27}{8}$

$\Rightarrow 8S = \boxed{27}$