제 3 교시

2024학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수학 영역

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

나를 죽이지 못하는 고통은 나를 더 강하게 만든다.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

○ 공통과목 ····· 1~8쪽

○ 선택과목

기하 ····· 9~12쪽

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

만두 제작

제 3 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\log_2\frac{8}{9}+\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}18$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2$일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{f(x)+x}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

3. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_6=21S_2,\quad a_6-a_2=15$$

일 때, a_3의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

4. 함수 $f(x)=x^3+ax+b$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)}{h}=5$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

5. $\sin\theta<0$이고 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{5}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{21}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{21}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{21}}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{21}}{2}$

6. 모든 실수 t에 대하여 다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기가 $-6t^2+2t$이다. 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 1)$을 지날 때, $f(-1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 다음 조건을 만족시키는 모든 유리수 r의 값의 합은? [3점]

(가) $1<r<9$
(나) r을 기약분수로 나타낼 때, 분모는 7이고 분자는 홀수이다.

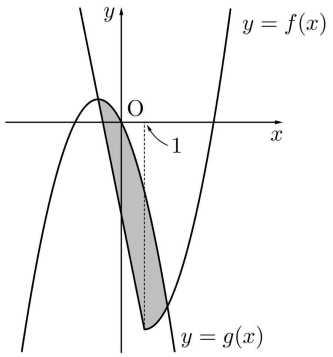
① 102 ② 108 ③ 114 ④ 120 ⑤ 126

8. 두 함수

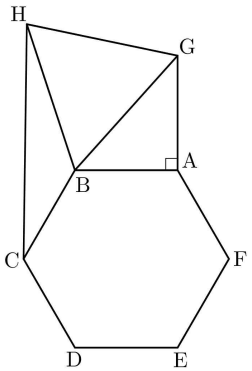
$$f(x)=\begin{cases} -5x-4 & (x<1) \\ x^2-2x-8 & (x\geq 1) \end{cases}, \quad g(x)=-x^2-2x$$

에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{34}{3}$ ② 11 ③ $\frac{32}{3}$ ④ $\frac{31}{3}$ ⑤ 10



9. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF에 대하여 점 G를 $\overline{AG}=\sqrt{5}$, $\angle BAG=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 점 H를 삼각형 BGH가 정삼각형이 되도록 잡는다. 선분 $\overline{CH}$의 길이는? (단, 점 G는 정육각형 외부에 있고, 두 선분 $\overline{AF}$, $\overline{BH}$는 만나지 않는다.) [4점]



① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{22}$ ④ $\sqrt{23}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

10. 함수

$$f(x)=\int_a^x (3t^2+bt-5)dt \quad (a>0)$$

이 $x=-1$에서 극값 0을 가질 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

11. 함수 $f(x)=-2^{|x-a|}+a$의 그래프가 x축과 두 점 A, B와 만나고 $\overline{AB}=6$이다. 함수 $f(x)$가 $x=p$에서 최댓값 q를 가질 때, $p+q$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

12. 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ a-f(-x) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=-4$

(나) 함수 $g(x)$의 극솟값은 0이다.

$g(-a)$의 값은? [4점]

① -40 ② -36 ③ -32 ④ -28 ⑤ -24

13. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=-3$, $a_{20}=1$이고, 3 이상 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n-1}$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{50} a_n$의 값은? [4점]

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

14. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-kx$$

라 하고, 실수 a와 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a \text{ 또는 } x>a+1) \\ -f(x) & (a\le x\le a+1) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 두 실수 k, a의 값과 관계없이 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $k=4$일 때, 함수 $g(x)$가 $x=p$에서 불연속인 실수 p의 개수가 1이 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 3이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 순서쌍 (k, a)의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

15. 0이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\log_4(-x) & (x<0)\\ 2-\log_2 x & (x>0)\end{cases}$$

이 있다. 직선 $y=a$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, $x_2(x_1<x_2)$라 하고, 직선 $y=b$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 두 점 C, D의 x좌표를 각각 x_3, $x_4(x_3<x_4)$라 하자. $\left|\frac{x_2}{x_1}\right|=\frac{1}{2}$이고 두 직선 AC와 BD가 평행할 때, $\left|\frac{x_4}{x_3}\right|$의 값은? (단, a, b는 $a\neq b$인 상수이다.) [4점]

① $3+3\sqrt{3}$ ② $5+2\sqrt{3}$ ③ $4+3\sqrt{3}$
④ $6+2\sqrt{3}$ ⑤ $5+3\sqrt{3}$

단답형

16. $a^4-8a^2+1=0$일 때, a^4+a^{-4}의 값을 구하시오. [3점]

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^3-2x)f(x)$$

라 하자. $f(2)=-3$, $f'(2)=4$일 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 y절편을 구하시오. [3점]

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{7}(a_k+k)=50,\quad \sum_{k=1}^{7}(a_k+2)^2=300$$

일 때, $\sum_{k=1}^{7}(a_k)^2$의 값을 구하시오. [3점]

19. x에 대한 방정식

$$x^3-\frac{3n}{2}x^2+7=0$$

의 1보다 큰 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [3점]

20. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 가속도 $a(t)$가

$$a(t)=3t^2-8t+3$$

이다. 점 P가 시각 $t=1$과 시각 $t=\alpha\,(\alpha>1)$에서 운동 방향을 바꿀 때, 시각 $t=1$에서 시각 $t=\alpha$까지 점 P가 움직인 거리는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 p는 서로소인 자연수이다.) [4점]

21. 두 양수 a, b에 대하여 함수

$$y=3a\tan bx, \quad y=2a\cos bx$$

의 그래프가 만나는 점 중에서 x좌표가 0보다 크고 $\frac{5\pi}{2b}$보다 작은 세 점을 x좌표가 작은 점부터 x좌표의 크기순으로 A_1, A_2, A_3이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$을 지름으로 하는 원이 점 A_2를 지나고 이 원의 넓이가 π일 때, $\left(\frac{a}{b}\pi\right)^2=\frac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 p는 서로소인 자연수이다.) [4점]

22. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=x|f(x)|$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 극한

$$\lim_{h\to 0+}\left\{\frac{g(t+h)}{h}\times\frac{g(t-h)}{h}\right\}$$

가 양의 실수로 수렴하는 실수 t의 개수는 1이다.

(나) x에 대한 방정식 $\{g(x)\}^2+4g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$g(3)$의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 3 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(4, 2, 3)$, $\mathrm{B}(-2, 3, 1)$과 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$일 때, 점 P의 x좌표는? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

24. 두 쌍곡선

$$x^2-9y^2-2x-18y-9=0,\quad x^2-9y^2-2x-18y-7=0$$

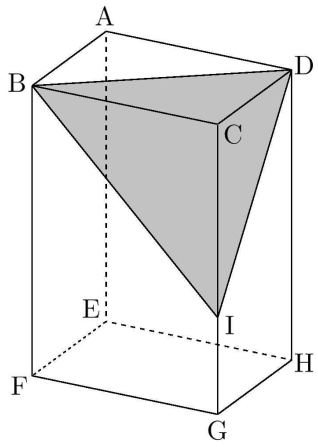
중 어느 것과도 만나지 않는 직선의 개수는 2이다. 이 두 직선의 방정식을 각각 $y=ax+b$, $y=cx+d$라 할 때, $ac+bd$의 값은? (단, a, b, c, d는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

25. 좌표평면의 점 A$(0, 2)$와 원점 O에 대하여 제 1사분면의 점 B를 삼각형 AOB가 정삼각형이 되도록 잡는다. 점 C$(-\sqrt{3}, 0)$에 대하여 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}|$의 값은? [3점]

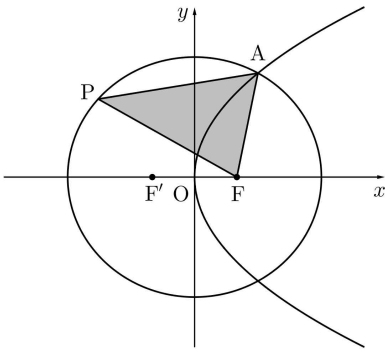
① $\sqrt{13}$ ② $\sqrt{14}$ ③ $\sqrt{15}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{17}$

26. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{AD}=2$, $\overline{AE}=3$인 직육면체 ABCD－EFGH가 있다. 선분 CG를 2 : 1로 내분하는 점 I에 대하여 평면 BID와 평면 EFGH가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]



① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

27. 두 점 $F(2,0)$, $F'(-2,0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 12인 타원이 직선 $x=-2$를 준선으로 하는 포물선이 제 1사분면에 만나는 점을 A라 하자. 타원 위의 점 P에 대하여 삼각형 APF의 넓이의 최댓값은?
(단, 점 P는 직선 AF 위의 점이 아니다.) [3점]



① $\sqrt{6}+3\sqrt{14}$ ② $2\sqrt{6}+3\sqrt{14}$ ③ $2\sqrt{6}+4\sqrt{14}$
④ $2\sqrt{6}+5\sqrt{14}$ ⑤ $3\sqrt{6}+5\sqrt{14}$

28. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|^2$

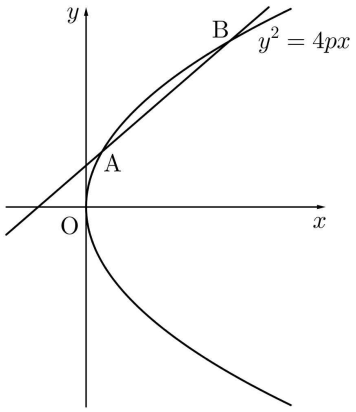
(나) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{2}{5}|\overrightarrow{AC}|^2$

점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 직선 AC가 만나는 점을 D라 하자. $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{42}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

① $\frac{\sqrt{14}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{14}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{14}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{14}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{14}}{2}$

단답형

29. 초점이 F인 포물선 $y^2=4px\,(p>0)$이 점 $(-p,\,0)$을 지나는 직선과 두 점 A, B에서 만나고 $\overline{FA}:\overline{FB}=1:3$이다. 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 BFH의 넓이는 $46\sqrt{3}$이다. p^2의 값을 구하시오. [4점]



30. 좌표평면에 두 개의 구

$$C_1:(x-1)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=1$$

$$C_2:(x-3)^2+(y-8)^2+(z-5)^2=4$$

가 있다. 구 C_1 위의 점 P와 구 C_2 위의 점 Q, zx평면 위의 점 R, yz평면 위의 점 S에 대하여 $\overline{PR}+\overline{RS}+\overline{SQ}$의 값이 최소가 되도록 하는 네 점 P, Q, R, S가 각각 P_1, Q_1, R_1, S_1이라 하자. 선분 R_1S_1 위의 점 X에 대하여

$\overline{P_1R_1}+\overline{R_1X}=\overline{XS_1}+\overline{S_1Q_1}$일 때, 점 X의 x좌표는 $\frac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

※시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.