SEOL:NAME THE SIGNATURE

설레임 N

테마별 **기출** 분석집

STORY 1. 도형 끝장내기 STYLE

01 도형 끝장내기 STYLE

도형 전부를 커버하지는 못할지언정 그래도 실전 행동 강령정도는 알고 가야 하지 않을까?

STYLE 01

보조선! 그래서 어디에 그으라고요...

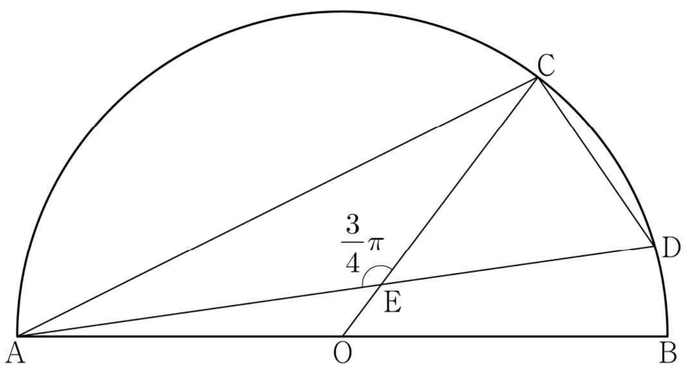
모두가 알겠지만 평가원은 전형적인 '교과서'를 신격화하는 존재야.
발상적인 것보다도 지금까지 배운 것으로 문제가 풀리도록 하는게 목적이지.
자, 보조선. 말만 들어도 어느 정도 발상적인 측면을 가지고 있어.
그렇기 때문에 도형 문제를 보았을 때 우선 보조선이 없는 상황의 분석이 끝난 뒤
가급적 마지막 수단으로 보조선을 활용할 필요가 있어.

[2023학년도 9월 모의평가 13번]

그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{\mathrm{CE}}=4,\quad \overline{\mathrm{ED}}=3\sqrt{2},\quad \angle\mathrm{CEA}=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}$의 값은? [4점]



① $6\sqrt{10}$　② $10\sqrt{5}$　③ $16\sqrt{2}$　④ $12\sqrt{5}$　⑤ $20\sqrt{2}$

우리만의 실전 풀이

THINKING!

일단 우리가 지금 할 수 있는 것들을 해보자. AC와 CD의 길이를 각각 구하는 것이 일단 목표일 것 같지?
자, 근데 $\overline{\mathrm{CE}}$, $\overline{\mathrm{ED}}$가 주어져 있고, 각 CED의 크기도 사실상 주어져 있지? 그럼 선분 CD의 길이를 구하는 건 정말 어렵지 않아. (이 과정이 어렵게 느껴졌다면 조금만 더 쉬운 문제를 풀고 오는 게 정신건강에 이롭다)
자, 난관은 선분 AC의 길이를 구하는 건데, 사인법칙을 쓰자니 다른 각도들에 대한 정보를 아무것도 모르고, 그렇다고 코사인법칙을 쓰자니.. 선분 AE의 길이를 구해야 하는데 이마저도 그렇게 쉬워보이진 않다..

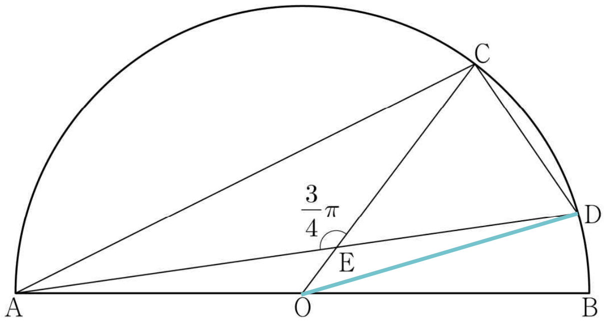
STEP 1 해석의 핵심!

자 위와 같이 여러 시도를 해봤는데도 답이 없다? 그럼 보조선을 그어볼만한 생각을 해보자.
보조선, 어디에 그어야 하는가? 평가원은 갑자기 엉뚱한 위치에 보조선을 긋는 발상적인 사고를 하지 않는다.
수능은 영재성을 평가하는 시험이 아니기 때문에 어느 정도 예측이 가능한 곳에 보조선을 긋도록 유도를 한다.
보조선을 긋는 것은 보통 다음과 같은 선호도에 따라 하는 경우가 많다.

1) 해당 보조선을 그음으로써 이등변삼각형, 직각, 각의 이등분선, 길이 등의 정보를 얻는가?
2) 해당 보조선이 그어지는 위치가 상대적으로 다른 곳들보다 비어 보이는가?

1)이야 뭐 당연한 얘기일 것이다. 추가적인 정보를 얻을 수 있는데 굳이 안 할 이유가 있겠는가?
2)의 경우는 일종의 **'심리'**와 관련되어 있다.
원래 출제자가 의도했던 도형에는 보조선이 다 그어져 있는 상태였을 것이다.
하지만 출제자가 **난이도를 높이기 위해 보조선을 뺀 것**이기 때문에 '예술적인 관점(?)'에서 보았을 때 분명 비어보이는 곳이 생기기 마련이다. 보조선이 다른 직선들을 막 교차하면서 그릴 정도면 정말 어려운 문제가 맞지만, 보통 보조선은 **그림이 더러워지지 않는 곳**에 그리는 것이 옳다.

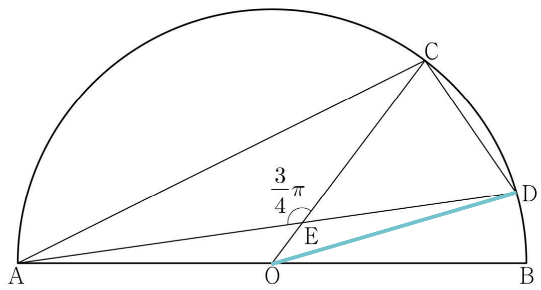
이를 동시에 만족하는 보조선은 다음과 같다. 사실 위의 기준에 따르면 $\overline{\mathrm{OD}}$ 외에도 $\overline{\mathrm{BD}}$에 그어도 되긴 하다.
하지만 그려보면 알겠지만 막상 **선분 AD, BD, AB에 대한 길이 관계 같은 걸 아무것도 모르기에** 의미 없다.



STEP 2 보조선 그리기 전에 생각했나요?

물론 보조선이 항상 '어떠한 완벽한 규칙'에 의해 그어지는 것은 아니다.

위의 방법대로 그었을 때 확률이 높아진다는 것 뿐! 일단 그려보고 생각해보는 게 인지상정!



자, 보조선을 그은 다음에 다시 THINKING! 에서 했던 과정을 반복한다.

코사인법칙은 쓸 수 없는지, 사인법칙은 쓸 수 없는지, 아니면 추가적인 조건 활용이 가능한지 검토한다.

이 검토 과정에서는 각 변들의 길이 관계, 각도들 사이의 관계를 중심으로 검토한다.

여기서 하나 알 수 있는 점은 $\overline{\mathrm{OE}}$와 $\overline{\mathrm{OD}}$ 사이의 길이 관계는 이미 나와 있다는 점이다.

$$R=\overline{\mathrm{OE}}+4=\overline{\mathrm{OD}}\ \ (R\text{은 원의 반지름})$$

자, 그럼 뭔가 새로운 정보를 얻은 것 같으니 이 상태에서 코사인/사인법칙을 쓸 수 없는지 검토하자.

네, 쓸 수 있습니다.

$$(R-4)^2+(3\sqrt{2})^2-2\times(R-4)\times3\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=R^2$$ ← 각 OED에 대해 코사인법칙

➜ $R^2-8R+16+18+6R-24=R^2$

➜ $R=5$

자, 새로운 정보를 얻었다. 난관이 풀려가고 있다. 자, 이제부터 자신감을 가지면 된다.

STEP 3 계산으로 마무리짓기!

어? 잘 탐색하다보면 AE의 길이를 구할 수 있을 것 같지 않니?

선분 AO, OE의 길이, 각 AEO의 크기 모두 알고 있잖아? 게임 끝났네.

$$\overline{\mathrm{AE}}^2+1^2-2\times\overline{\mathrm{AE}}\times1\times\frac{1}{\sqrt{2}}=5^2$$

➜ $\overline{\mathrm{AE}}^2-\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{AE}}-24=0$

➜ $(\overline{\mathrm{AE}}+3\sqrt{2})(\overline{\mathrm{AE}}-4\sqrt{2})=0$

➜ $\overline{\mathrm{AE}}=4\sqrt{2}$

아, 다 왔다. 우리가 그렇게 구하고 싶었던 $\overline{AE}$가 구해졌다. 코사인 한 번만 더 쓰자.

$$\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{EC}^2-2\times\overline{AE}\times\overline{EC}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=32+16+32=80$$

➜ $\overline{AC}=4\sqrt{5}$

한편,

$$\overline{CD}^2=\overline{CE}^2+\overline{ED}^2-2\times\overline{CE}\times\overline{ED}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=16+18-24=10$$

에서 $\overline{CD}=\sqrt{10}$ 이므로 $\overline{AC}\times\overline{CD}=20\sqrt{2}$ 이다!

도형 문제, 특히 보조선을 그리는 문제에서의 행동 강령은 다음과 같이 짜두면 유용하다.
적어도 필자는 다음과 같은 강령을 통해 후회하진 않았다.

구할 수 있는 정보들 모두 구하기
(코사인법칙, 사인법칙, 길이, 각 관계)

↓

정 안 구해진다면 비어 있거나 정보를 얻을 수 있는 곳에 보조선 그어보기
(특히 이등변삼각형, 직각, 원의 지름 같은 요소들은 매력적인 보조선)

↓

다시 추가적으로 구할 수 있는 정보들 모두 구하기
(코사인법칙, 사인법칙, 길이, 각 관계)

↓

안 풀린다면 지우고 다른 곳에 보조선 그어보기

↓

충분히 정보들을 탐색하고 답에 가까워졌다 판단되면 그대로 밀어붙이기

중요한 것은 보조선을 긋는 행위는 가능하면 정 안 될 때 하는 것이 좋다는 점이다.
물론 어느 정도 숙련한 학생들은 **'이 정도 보조선은 긋고 시작한다'**라는 기준이 있다.
그것이 바로 위에서 언급한 **이등변삼각형, 직각, 원의 지름 같은 매력적 보조선 요소**들인데 그림이 과하게 복잡해지는 것이 아니라면 이런 요소들을 미리 그려놓고 생각하는 것이 시간 단축에 도움이 될 수 있다.

가능하면 각자 루틴은 확실하게 정해두자!

'이 정도 보조선은 미리 긋고 시작한다'

'이건 생각해보고 보조선을 긋는다'

무지성으로 보조선만 긋다가 시험이 끝나는 대참사를 겪지 않도록 주의하자!

STYLE 02

원래 둥글둥글한게 가장 무섭거든

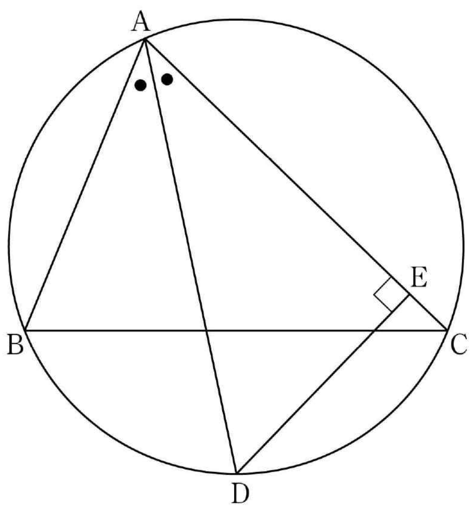
원과 관련된 문제는 별 곳에다가 닮음 찾고, 길이 관계 쓰고 해서 더욱 어려운 편이다.
하지만 실질적으로 원과 관련된 문제가 어려운 이유는 거의 두 가지이다.

첫 번째, **원주각 활용이 어렵기 때문이다.**
하지만 이건 원주각을 표시하면서 필요한 각들을 전부 찾아간다는 개념으로 접근하는 것이 좋다
두 번째, **지름이나 접선 등에 대한 정보가 나오면 까다로워진다.**
지름의 경우 직각의 정보나 반지름의 길이와 관련된 정보를 주기 딱 좋은 조건이다.

그럼 이러한 정보를 중심으로 분석하면 된다. 특히 접선은 말 그대로 원의 중심과 연결하면 직각이니 이용하라는 뜻일 가능성이 높다. 중학교 때 배웠던 원의 기하학적 요소들을 잘 활용해보도록 하자.

[2021학년도 10월 학력평가 21번]

$\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$인 예각삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 D, 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하자. 선분 AE의 길이를 k라 할 때, $12k$의 값을 구하시오. [4점]



우리만의 실전 풀이

THINKING!

선분 AC의 길이가 주어져있으니 가능하면 선분 CE의 길이를 조금 알고 싶다.

그런데 $\overline{\mathrm{CE}}$를 구해보려 하니 생각보다 잘 안 풀린다. 주변에 아는 정보가 아무것도 없기 때문이다.

그럼 조금 다른 방향으로 접근해보자.

(안 풀린다고 무지성 보조선 긋지 말자. 아직 우리는 접근해볼만한 정보들이 몇 군데 더 있다.)

$\triangle \mathrm{ADE}$는 **직각삼각형**이다. 선분 AD와 각 DAE에 대한 정보만 알 수 있다면 어떻게든 해 볼 수 있지 않을까?

STEP 1 어려워보여도 한 스텝만에 풀린답니다

사실 이 문제의 함정은 삼각형에 대한 정보가 두 가지밖에 주어지지 않았기에 삼각형이 정해지지 않는다*는 점이다. (다시 말해, 정말 극한의 상황이라면 각 A의 크기를 대충 60도로 두고 풀어도 상관없다는 뜻이겠지..?)

하지만 우리는 배우는 입장이니 정석적으로 풀어보자. 말했듯 정보의 개수가 부족하기 때문에 선분 AD의 길이와 각 DAE의 크기가 어떠한 관계 형태로 나올 가능성이 굉장히 높다. (애당초 도형이 정해지지 않으니까)

출제자도 그걸 노리고 문제를 만들었기에 관계식이 나온 순간 다 풀었다고 생각해도 좋을 것이다.

중학교 도형을 성실하게 학습한 학생이라면 **원주각이 같을 때 현의 길이도 같다는 점**이 떠오를 것이다.

이것에 대한 식을 한 번 세워보자.

$\overline{\mathrm{AD}} = l$이라 하면, $\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{CD}}$이므로 코사인법칙에 의해

$$6^2 + l^2 - 12l\cos \bullet = 8^2 + l^2 - 16l\cos \bullet$$

$$\rightarrow 4l\cos \bullet = 28$$

잠시만, 잠시만... 생각해보니 $\overline{\mathrm{AE}} = l\cos \bullet$ 잖아?

그럼 그냥 $\overline{\mathrm{AE}} = 7$이겠네? 끝!

출제자의 의도 파악이 정말 중요한 문제였다.

또한, 도형 문제의 경우 평가원에서 나온 도형 관련 스킬들을 잘 기억해두는 것이 좋다. 원이 생각보다 단순하지만 어렵게 내려면 어떻게든 어렵게 낼 수 있는 부분이기 때문에 기본적인 스킬들은 기억해두자.

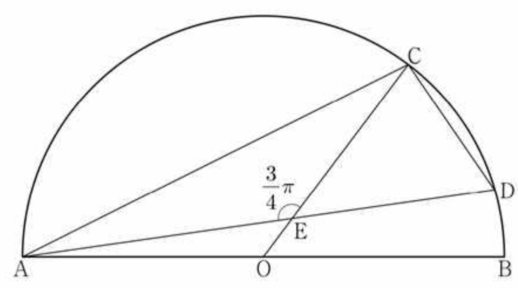
물론 여러분들에게 도형 관련 스킬들을 안 알려준 채로 떠나기에는 너무 아쉬워서
다음 페이지에 약간의 정리 노트를 만들어보았다. 잘 활용해주길 바란다.

* 삼각형이 정해지기 위해서는 최소한 3개의 정보(각, 길이, 넓이 등)가 필요하다.

도형 관련 실전 행동 강령 모음

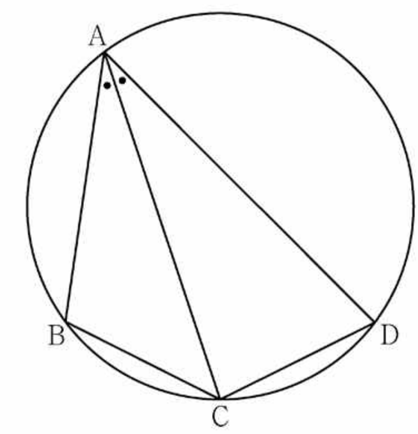
1 보조선을 그을 때 직각이 될만한 부분은 항상 1순위 후보이다.

아까 봤던 그 도형이다. 원래 정석 풀이대로라면 선분 OD를 연결하는 게 맞지만, 필자는 가장 먼저 연결하고 볼 것은 사실 선분 BD를 연결하는 것이 맞다고 본다. 보조선 1순위는 항상 같은 길이, 같은 각도, 직각 같은 매력적인 곳에 그어야 함을 유념하자. 물론 보조선을 그어놓고 나서 얻을만한 정보가 없으면 치고 빠지는 것도 요령이다. 일단 그어보고 얻을만한 정보가 없거나 아직 너무 정보들이 부족하다 판단되면 빠져나와 다른 곳을 노려보자.



2 문제가 원주각에 조금이라도 집중하고 있다면 다른 각도 또는 길이 관계에 대한 정보를 알려주고 있는 건 아닌지 생각해보자.

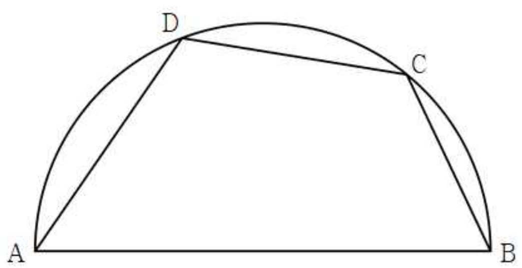
이 문제는 유명한 기출이다. $\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{DAC}$라는 것으로부터 선분 BC와 선분 CD의 길이가 같다는 점을 잘 캐치하는 것이 중요한 문제이다. 원주각에 대한 정보가 있다는 것은 곧 다른 각도나 길이에 대한 정보를 암시하고 있을 가능성이 높다. 잘 살펴보자.



3 우리는 사각형 분석법을 배운 적이 없다. 사각형은 가능하면 삼각형으로 쪼개는 것이 건강에 이롭다.

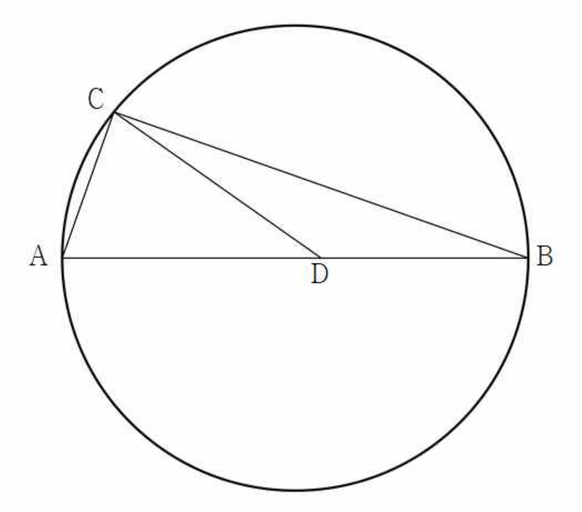
예를 들어 자신이 이 도형의 넓이를 구해야한다고 하면 어떤 선택을 하겠는가? 훈련된 학생들은 당연히 사각형을 쪼갤 것이다. 하지만 왜 그래야 할까?

그 이유는 우리는 생각보다 사각형이라는 도형에 대해 아는 게 없기 때문이다. 솔직히 말해서 마름모, 평행사변형, 직사각형 말고 우리가 넓이 구하는 방법을 아는 사각형이 얼마나 있겠는가?



하지만 삼각형은 어떤 삼각형이 나오더라도 정보만 충분하다면 넓이고 뭐고 다 구할 수 있다. 그렇기 때문에 사각형은 삼각형으로 쪼개는 것이 좋다고 하는 것이다.

4 **직각을 분석하는 방법에는 여러 가지 방법이 있지만 대표적으로 '피타고라스 정리', '넓이', '단순 삼각함수' 정도를 생각해두면 좋다.**



일단 이 문제의 전제는 선분 AB가 지름이고, $\cos(\angle \mathrm{CAB}) = \frac{1}{3}$라는 점이 주어져 있다.

이 문제에서 직각을 분석하는 방법은 **'단순 삼각함수'**에 해당할 것이다. 삼각형 ABC라는 친구에 대한 모든 각도 정보가 이미 주어져 있기 때문이다.

그 외에도 길이에 대한 정보가 중점적으로 주어져 있다면 **'피타고라스의 정리'**를 통해 다른 변의 길이를 구할 수 있을 것이고, 한 점에서 다른 변에 수선을 그어서 직각이 생긴 구조라면 **'삼각형의 넓이'**를 통해 분석이 가능할 것이다.

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta = \frac{1}{2}ah$$

이처럼 넓이가 같다는 점을 이용해서 푸는 스킬은 정말 많이 쓰인다.
내접원의 반지름을 구할 때도 이런 방식을 쓰지 않았는가?

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c) \quad (r\text{은 내접원의 반지름})$$

뭐 스킬이야 더 있기야 하겠지만 일단은 이 주간지가 50페이지가 넘는 걸 바라지는 않는 관계로 이 정도까지만 요약해본다! 추가적인 스킬들을 알고 싶다면 오르비에서 매주 주간지를 다운받아 끝까지 학습하도록 하자.

STYLE
03

연예인 닮은 거 찾는 건 참 잘하는데...

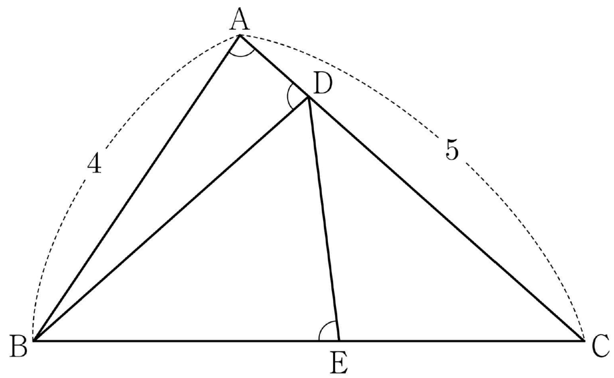
도형의 닮음 찾는게 생각보다 꽤 어렵다.
아래 기출의 경우야 닮음 없이도 풀 수 있지만 닮음이 중요시되는 문제의 경우에는 생각보다 빡세다.
닮음을 확인하는 것은 거의 1순위가 각도에 대한 정보이다.
길이에 대한 정보는 다소 작위적으로 보일 수 있기 때문에 가능하면 출제진들도 각도에 대한 정보를 통해 닮음임을 주는 편이다.

[2022학년도 6월 모의평가 12번]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=5$이고 $\cos(\angle\mathrm{BAC})=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BDA}=\angle\mathrm{BED}$$

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

우리만의 실전 풀이

THINKING!

각도가 굉장히 많이 주어져 있다. 뭔가 각도와 관련하여 암시하는 바가 있는 것 같다. 아무래도..
일단 지금의 정보만으로는 아직 바로 보이지 않으니 잠시 대기하자.
그런데 다른 걸 다 떠나서 선분 AD의 길이가 바로 보이지 않는가?
점 B에서 선분 AD에 수선을 내린 발을 H라 하면,

$$\overline{\mathrm{AD}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2\times 4\cos A=1$$

그럼 $\overline{\mathrm{CD}}=4$라는 것까지 얻을 수 있다! 아, 삼각형 BCD는 이등변삼각형이다!!
우리가 그렇게 열광하는 바로 그 이등변삼각형이 여기서 튀어나왔다!

STEP 1 해석은 신이야..

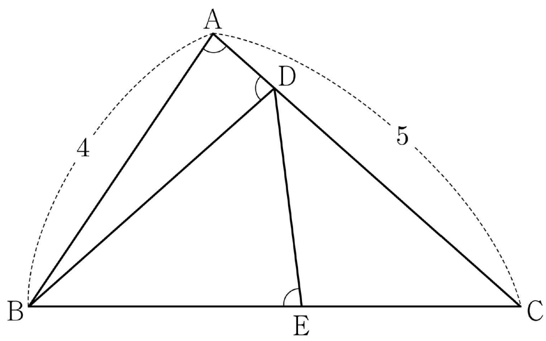
물론 닮음 없이 푸는 방법도 있지만 이 문제는 닮음으로 한 번 가보자!
삼각형 BCD가 이등변삼각형인데 잘 살펴보면 삼각형 CDE도 이등변삼각형같지 않니?
닮음처럼 보이거나 의심되는 부분에는 항상 실제로 닮음인지 체크하는 습관이 필요하다!

실제로 두 삼각형은 각 C가 공통이고, 각 CED와 각 BDC가 각각 같다.

끝났다. 두 삼각형이 닮음이므로 삼각형 CDE는 이등변삼각형이 되고 정보를 모두 얻는다.

STEP 2 해석말고 이번엔 계산!

삼각형 CDE에서 각 E에 대해 코사인법칙을 쓰자! 구하려는 값인 선분 DE의 길이를 x라 두면



$$\overline{\mathrm{CD}}^2=x^2+x^2+2x^2\times\frac{1}{8}=\frac{9}{4}x^2$$

➜ $\overline{\mathrm{CD}}=\frac{3}{2}x=4$

➜ $x=\frac{8}{3}$

STYLE 04

코사인을 쓸까, 사인을 쓸까

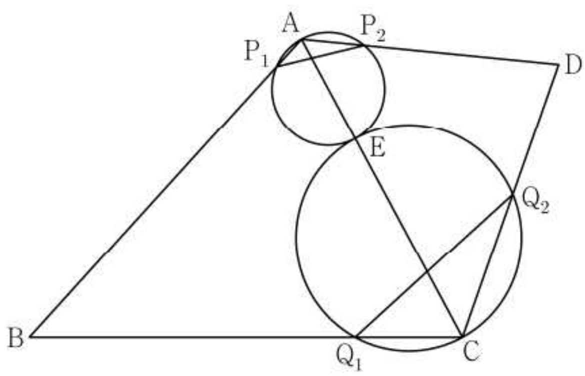
미분에서도 대칭성은 매우 중요한 개념이었다.
하지만 적분에서는 더더욱 이런 대칭 개념이 중요하게 여겨진다.
점대칭과 선대칭을 넓이에 적용하는 방법은 교과서에서 많이 배웠을 것이다.
거기에 주기성까지 같이 끼워주면 극한의 문제가 탄생하는 법! 잘 익혀두도록 하자.

[2024학년도 6월 모의평가 공통 13번]

그림과 같이

$$\overline{BC}=3,\ \overline{CD}=2,\ \cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3},\ \angle DAB>\frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자.
$\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이고, 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$) [4점]



① $\sqrt{21}$　② $\sqrt{22}$　③ $\sqrt{23}$　④ $2\sqrt{6}$　⑤ 5

우리만의 실전 풀이

THINKING!

전국의 수험생들을 멘붕에 빠지게 했던 희대의 13번이었다. 체감상 15번보다 어려울 정도였다.
사실 이 문제도 구해야 하는 게 무엇인지부터 출발하면 그렇게 어려운 문제도 아니긴 하다.

문제는 비주얼이 조금 장난 아니게 생겼다는 점이라는 것 정도..?
조금 무서워보이긴 하지만 본능적인 행동들을 중심으로 진행해보자.
일단 주어진 발문을 읽으면서 삼각형 ABD의 넓이가 나왔기 때문에 선분 BD를 이어보는 행동은 할 것이다.

* 출제자가 언급한 도형에 선이 모자르다면 가급적 그어주도록 하자.
이건 그 부분에 집중하라는 일종의 암시 신호일 수 있다. 이 문제의 경우 삼각형 ABD의 넓이가 나왔음에도 선분 BD가 그어져있지 않다.
이 말은 선분 BD를 긋고 그 부분에 다소 집중할 필요성을 상기시킨다.

STEP 1 해석은 신이야..

일단 선분 BD를 긋고 봤으니 분석은 해야 하겠지? 길이를 구할 수 있는지 먼저 살펴볼 것 같은데 다행히 선분 BC, 선분 CD, 각 BCD에 대한 정보가 모두 주어져 있으니까 구할 수 있다.

$$\overline{\mathrm{BD}}^2=3^2+2^2-2\times3\times2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\sqrt{17}$$

그런데 여기서 주목해야 할 점이 있다.
이 상태에서 우리가 구하고자 하는 선분 AB, 선분 AD에 대한 연립방정식이 탄생한다는 것이다.

* 도형을 분석할 때는 초점을 두고 있는 대상 외의 주변에도 계속해서 신경을 써야 한다. 구해보니 갑자기 어떤 것이 닮음이 되어 있다던가 어떤 것이 이등변삼각형이 되어 있다던가 하는 경우가 많기 때문이다. 특히, 고난도 문제의 경우 더더욱!

삼각형 ABD의 넓이가 2라고 했으므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin(\angle\mathrm{BAD})=2\ \cdots\ ㉠$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AD}}\cos(\angle\mathrm{BAD})=17\ \cdots\ ㉡$$

이다. 자, 그럼 이 문제는 결국 $\angle\mathrm{BAD}$에 대한 정보를 찾을 수 있는 지 없는지에 대한 문제로 바뀐다.

STEP 2 마지막까지 꾸준히 탐색하기!

아직 안 쓴 조건이 무엇이 있는지 생각해보니 $\overline{P_1P_2} : \overline{Q_1Q_2} = 3 : 5\sqrt{2}$ 라는 조건이 있었다!!

문제에서 $\overline{P_1P_2}$, $\overline{Q_1Q_2}$에 대해 분석해달라고 했으니 분석은 해야 하는데 문제는 여기서 코사인법칙을 써야 할지, 아니면 사인법칙을 써야 할지에 대한 여부가 되겠다.
그런데 코사인법칙을 쓰기 위해서는 삼각형을 어떻게 잡든 최소한 2개의 미지수가 생긴다.
거기에 $\overline{P_1P_2}$, $\overline{Q_1Q_2}$ 각각 미지수 2개씩이면 총 4개라... 약간 회의적으로 여겨진다.

그러기에 사인법칙을 써 볼 궁리를 할 것 같다.

$$\frac{\overline{P_1P_2}}{\sin(\angle BAD)} = \overline{AE}, \quad \frac{\overline{Q_1Q_2}}{\sin(\angle BCD)} = \overline{CE}$$

아마 대부분의 학생은 여기서 $\overline{AE}$, $\overline{CE}$가 지름이라는 사실을 줬다는 걸 까먹고 벽에 막힐 것 같다.
하지만 위에서 말하지 않았는가? **항상 주변을 중시해야 한다고!** 아무렇지 않아 보였던 조건이 해석을 하는 과정에서 새롭게 해석이 될 수 있기 때문에 항상 경계해야 한다!
이때, $\overline{CE} = 2\overline{AE}$ 라고 했으니까

$$\frac{\overline{Q_1Q_2}}{\sin(\angle BCD)} = \frac{2\overline{P_1P_2}}{\sin(\angle BAD)}$$

$$\rightarrow \frac{\sin(\angle BAD)}{\sin(\angle BCD)} = \frac{2\overline{P_1P_2}}{\overline{Q_1Q_2}} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

이때, $\sin(\angle BCD) = \sqrt{1-\cos^2(\angle BCD)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이므로

$$\sin(\angle BAD) = \frac{3\sqrt{2}}{5} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{5} \rightarrow \cos(\angle BAD) = -\frac{3}{5} \left(\because \angle DAB > \frac{\pi}{2}\right)$$

STEP 3 마무리는 하이라이트!

아까 STEP 1에서 ㉠, ㉡에서 연립방정식을 세웠던 것 기억나니? 그것 때문에 $\angle BAD$를 분석했잖아!
구했던 값들을 넣어보면

$$㉠ : \overline{AB} \times \overline{AD} = 5, \quad ㉡ : \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \frac{6}{5} \times \overline{AB} \times \overline{AD} = 17$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = 11$ 이므로

$$\left(\overline{AB} + \overline{AD}\right)^2 = \left(\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2\right) + 2\overline{AB}\,\overline{AD} = 11 + 10 = 21$$

따라서 $\overline{AB} + \overline{AD} = \sqrt{21}$ 이다!

SEOL:NAME, The Signature [테크닉 총정리]

CHECK 01 보조선을 긋는 기술

보조선을 그을 때는 항상 다음 규칙을 염두해두자.

1) 해당 보조선을 그음으로써 이등변삼각형, 직각, 각의 이등분선, 길이 등의 정보를 얻는가?

2) 해당 보조선이 그어지는 위치가 상대적으로 다른 곳들보다 비어 보이는가?

뿐만 아니라 보조선을 그을지 말지에 대한 어느 정도의 루틴이 필요하다. 예를 들어, '원의 지름'이나 '직각' 같은 요소들은 판단하지 않고 무조건 보조선을 긋고 시작하는 등의 자신만의 방법론을 구축해두면 도형 문제를 풀 때에 있어서 큰 도움을 받을 수 있다. 매번 보조선을 그어야 할지에 대한 판단을 하면서 생기는 번거로움을 줄일 수 있기 때문이다.

구할 수 있는 정보들 모두 구하기
(코사인법칙, 사인법칙, 길이, 각 관계)

↓

정 안 구해진다면 비어 있거나 정보를 얻을 수 있는 곳에 보조선 그어보기
(특히 이등변삼각형, 직각, 원의 지름 같은 요소들은 매력적인 보조선)

↓

다시 추가적으로 구할 수 있는 정보들 모두 구하기
(코사인법칙, 사인법칙, 길이, 각 관계)

↓

안 풀린다면 지우고 다른 곳에 보조선 그어보기

↓

충분히 정보들을 탐색하고 답에 가까워졌다 판단되면 그대로 밀어붙이기

CHECK 02 원이 포함된 도형 문제의 분석

원의 지름과 원주각, 접선 이 세 개의 포인트에 집중하면서 문제를 탐색하자.

원의 지름은 일반적으로 반지름에 대한 길이 정보를 알려주거나 원주각과 연계되어 직각을 암시하는 신호일 가능성이 매우 높다. 원주각의 경우에는 중심각을 알려주기도 하고, 원주각이 같으면 현이나 호의 길이가 같다는 정보를 알려주기도 한다. 마지막으로 접선은 대부분의 경우 직각을 암시하는 정보이다.

CHECK 03 닮음을 찾는 요령

닮음은 어느 순간에 딱 하고 찾아야 하는 그런 존재가 아니다. 문제를 푸는 과정에서 계속해서 경계하고 이 과정에서 닮음이 생기지 않는지 관찰하는 것이 중요하다. 특히나, 주어진 정보를 해석하는 과정에서 어떤 두 대상의 **각도가 같거나 길이가 같은 등의 정보**를 얻게 된다면 이와 관련하여 닮음을 찾게 될 가능성이 굉장히 높으니 항상 이를 염두해둘 필요가 있다!

CHECK 04 문제에만 나와있고 그림에는 안 표시된 대상

출제자가 언급한 도형에 선이 모자르다면 가급적 그어주도록 하자.

이건 그 부분에 집중하라는 일종의 암시 신호일 수 있다. 예를 들어, 어떤 선분의 길이를 물어보거나 조건으로 주었는데 실질적으로 그 선분이 그림에 그려져 있지 않는 경우에는 그림에도 같이 표시해주는 편이 정신건강에 이롭다.

CHECK 05 주변 경계의 중요성

고난도 도형 문제의 전반적인 특징은 문제를 풀어나가는 과정에서 갑작스럽게 어떤 새로운 정보가 튀어나오는 경우가 많다는 것이다. 평가원은 문제 자체를 지나치게 발상적으로 만들기보다는 이와 같이 주어진 정보 여러 개를 조합해서 원하는 결과를 만들어야 하는 경우가 많다. 따라서 **자신만의 루틴이나 풀이 패턴**을 만들어놓는다면 어려운 문제도 충분히 풀 수 있을 것이다.

CHECK 06 집중해야 할 대상의 판단

고난도 도형 문제를 풀 때는 어느 정도의 역추적이 필요한 경우가 있다.

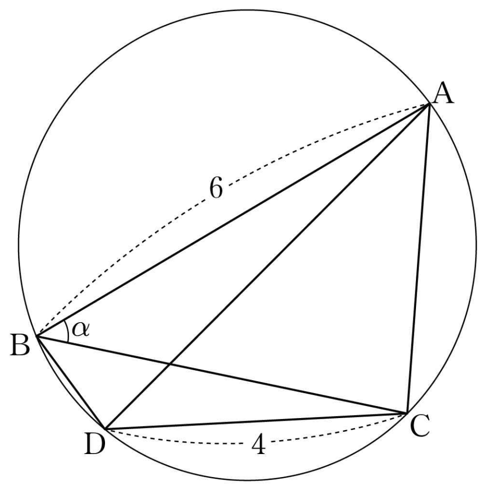
여기서 역추적이라 함은 구하고자 하는 정보를 구하기 위해 필요한 정보를 역으로 추적해나간다는 뜻이다.

예를 들어 삼각형의 두 변의 길이가 주어져 있고, 나머지 한 변의 길이를 구하는 문제가 나와 있다면 그 문제는 곧 두 변 사이의 끼인각을 구하는 문제로 바뀌게 된다.(코사인법칙) 이와 같이 필요한 정보나 미지수를 지나치게 늘리지 않는 선에서 문제를 역추적해나가다 보면 어느새 답에 다다른 자신의 모습을 관찰할 수 있을 것이다. 여기서 미지수를 늘리지 말라는 것은 **"자신이 감당 가능한"** 식을 세우라는 뜻이다. 일단 벌려놓는 자세는 수능에 있어 도움이 되는 자세인 건 맞지만 그렇다고 너무 일을 크게 만들어 놓았다간(ex. 미지수가 4개인 연립방정식 등) 큰 낭패를 본다.

PRACTICE
기출문제 ATTACK

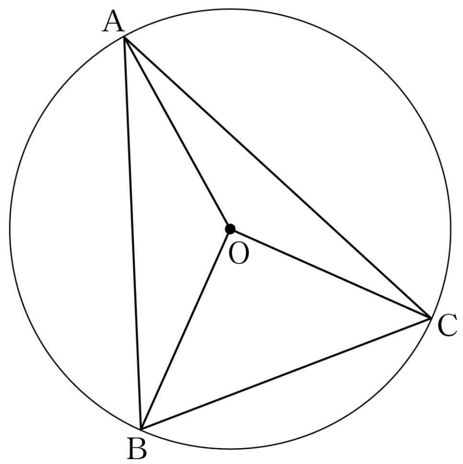
001 [2020학년도 3월 나형 29번]

그림과 같이 예각삼각형 ABC 가 한 원에 내접하고 있다. $\overline{AB}=6$ 이고, $\angle ABC=\alpha$ 라 할 때 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$ 이다. 점 A 를 지나지 않는 호 BC 위의 점 D 에 대하여 $\overline{CD}=4$ 이다. 두 삼각형 ABD, CBD 의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 할 때, $S_1 : S_2 = 9 : 5$ 이다. 삼각형 ADC 의 넓이를 S 라 할 때, S^2 의 값을 구하시오. [4점]



002 [2020학년도 3월 가형 19번]

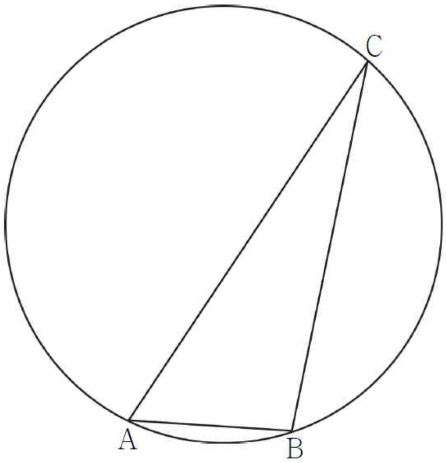
그림과 같이 중심이 O 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC 에 대하여 두 삼각형 OAB, OCA 의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 하자. $3S_1 = 4S_2$ 이고 $\overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{5}$ 일 때, 선분 AB 의 길이는? [4점]



① $2\sqrt{7}$　② $\sqrt{30}$　③ $4\sqrt{2}$　④ $\sqrt{34}$　⑤ 6

003 [2020학년도 4월 가형 19번]

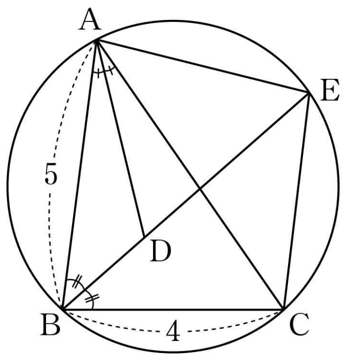
그림과 같이 원 C에 내접하고 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\angle \mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$일 때, 원 C 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.) [4점]



① $\frac{32}{3}\sqrt{3}$ ② $\frac{34}{3}\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$ ④ $\frac{38}{3}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{40}{3}\sqrt{3}$

004 [2021학년도 3월 공통 15번 + ㄱㄴㄷ 제거]

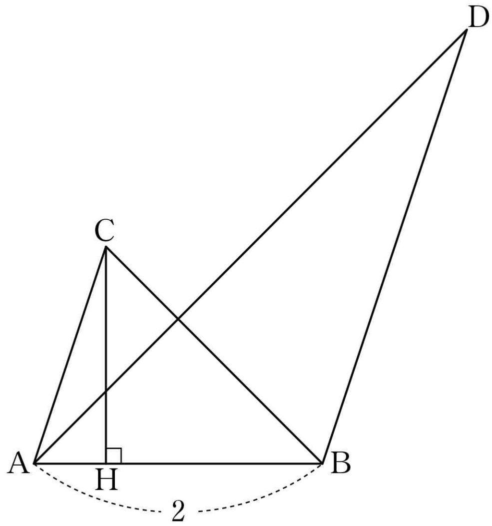
그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC$의 이등분선과 $\angle CAB$의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD의 연장선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 E라 할 때, 선분 ED의 길이는? [4점]



① $\frac{31}{8}$ ② 4 ③ $\frac{33}{8}$ ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{35}{8}$

005 [2021학년도 3월 공통 21번]

그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC} /\!/ \overline{BD}$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다.



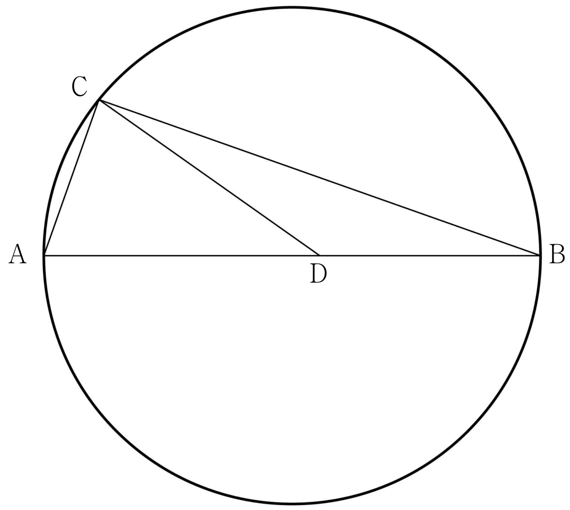
두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle CAB)=51$이다. $\overline{AC}^2$의 값을 구하시오. (단, $\angle CAB<\frac{\pi}{2}$) [4점]

006 [2021학년도 7월 공통 20번]

그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 C에 대하여

$$\overline{\mathrm{BC}} = 12\sqrt{2},\ \cos(\angle \mathrm{CAB}) = \frac{1}{3}$$

이다. 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점을 D라 할 때, 삼각형 CAD의 외접원의 넓이는 S이다. $\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오. [4점]

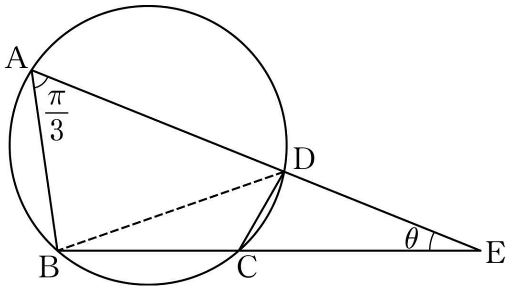


007 [2022학년도 3월 공통 15번 + 빈칸 제거]

그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD 에 대하여

$$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}} = 2, \quad \overline{\mathrm{AD}} = 3, \quad \angle \mathrm{BAD} = \frac{\pi}{3}$$

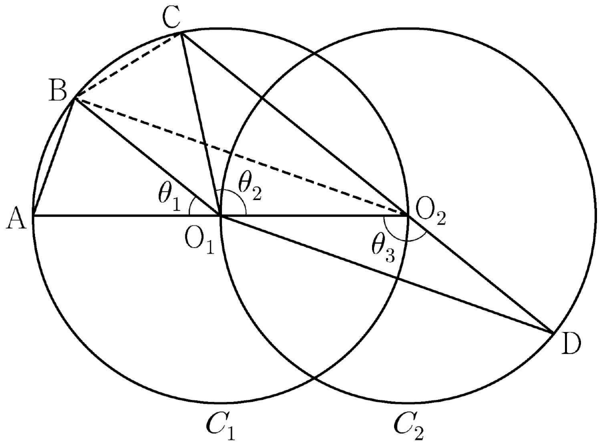
이다. 두 직선 AD, BC 의 교점을 E 라 하자.



$\angle \mathrm{AEB} = \theta$ 일 때, $196 \times \sin^2\theta$ 의 값을 구하시오. [4점]

008 [2022학년도 수능 공통 15번 + 빈칸 제거]

두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다. 이때, $\angle \mathrm{BO}_1\mathrm{A}=\theta_1$, $\angle \mathrm{O}_2\mathrm{O}_1\mathrm{C}=\theta_2$, $\angle \mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{D}=\theta_3$이라 하자.



$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{O}_1\mathrm{D}} = 1 : 2\sqrt{2}$이고, $\theta_3=\theta_1+\theta_2$일 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=k$라고 하자. $6k$의 값은? [4점]

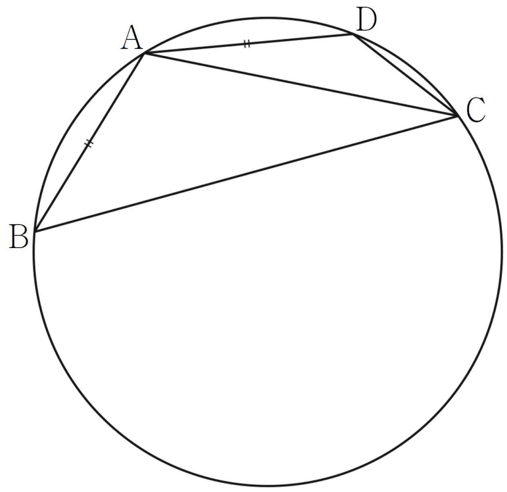
① 22 ② 23 ③ 24 ④ 25 ⑤ 26

009 [2022학년도 4월 공통 15번 + 빈칸 제거]

그림과 같이 반지름의 길이가 $R\ (5 < R < 5\sqrt{5})$ 인 원에 내접하는 사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AD}}$ 이고 $\overline{\mathrm{AC}} = 10$ 이다.
(나) 사각형 ABCD의 넓이는 40이다.

$60 \times \dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{R}$ 의 값을 구하시오. [4점]



010 [2022학년도 7월 공통 14번]

길이가 14인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C를 $\overline{\mathrm{BC}}=6$이 되도록 잡는다. 점 D가 호 AC 위의 점일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 D는 점 A와 점 C가 아닌 점이다.) [4점]

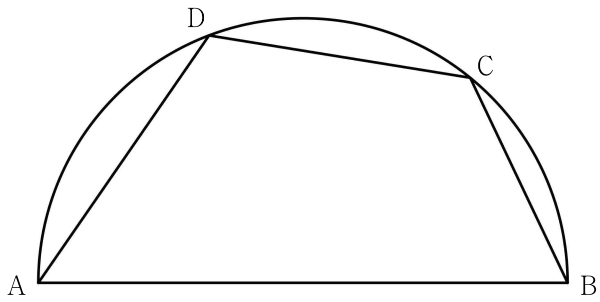
〈보 기〉

ㄱ. $\sin(\angle \mathrm{CBA})=\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$

ㄴ. $\overline{\mathrm{CD}}=7$일 때, $\overline{\mathrm{AD}}=-3+2\sqrt{30}$

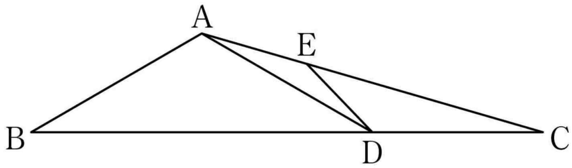
ㄷ. 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $20\sqrt{10}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



011 [2021학년도 10월 공통 13번 + 빈칸 제거]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{13}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위에 점 B가 아닌 점 D를 $\overline{\mathrm{AD}}=2$가 되도록 잡고, 선분 AC 위에 양 끝점 A, C가 아닌 점 E를 사각형 ABDE가 원에 내접하도록 잡는다.



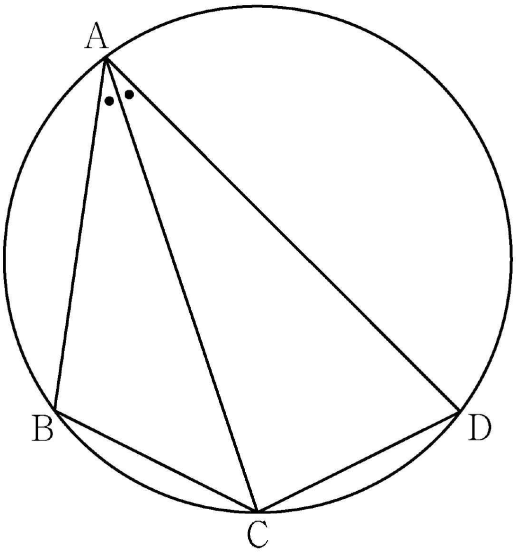
선분 DE의 길이를 l이라 하자. $13l^2$의 값을 구하시오. [4점]

012 [2023학년도 수능 공통 11번]

그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$$\overline{AB}=5,\ \overline{AC}=3\sqrt{5},\ \overline{AD}=7,\ \angle BAC=\angle CAD$$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는? [4점]



① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ ④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

기출문제 ATTACK 정답 및 해설

빠른 정답

1	63	2	③	3	①	4	②	5	15
6	27	7	27	8	②	9	96	10	⑤
11	12	12	①						

해 설

001

[정답] 63

$\angle\mathrm{BAD}$ 와 $\angle\mathrm{BCD}$ 는 같은 호에 대한 원주각이므로 그 크기가 같다.

$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BCD}=\theta$, $\overline{\mathrm{AD}}=a$, $\overline{\mathrm{CB}}=b$ 라 하면

삼각형 ABD 의 넓이 S_1 은

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times6\times a\times\sin\theta=3a\sin\theta$$

삼각형 CBD 의 넓이 S_2 는

$$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CB}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times b\times4\times\sin\theta=2b\sin\theta$$

$S_1:S_2=9:5$ 이므로 $3a:2b=9:5$

$a:b=6:5$ 이므로 $a=6k$, $b=5k\,(k>0)$라고 하자.

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{AC}}^2=6^2+(5k)^2-2\times6\times5k\times\cos\alpha$ …… ㉠

$\angle\mathrm{ABC}$ 와 $\angle\mathrm{ADC}$ 는 같은 호에 대한 원주각이므로

$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ADC}=\alpha$

삼각형 ADC 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=(6k)^2+4^2-2\times6k\times4\times\cos\alpha$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$11k^2+9k-20=0$, $(11k+20)(k-1)=0$

$k>0$ 이므로 $k=1$ 이고 $a=6k=6$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

삼각형 ADC 의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\alpha=\frac{1}{2}\times6\times4\times\frac{\sqrt{7}}{4}=3\sqrt{7}$$

따라서 $S^2=(3\sqrt{7})^2=63$

002

[정답] ③

$\overline{BC}=2\sqrt{5}$, $\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{10}$ 이므로 삼각형 OBC 는 직각이등변삼각형이고 $\angle BOC=\frac{\pi}{2}$ 이다.

$\angle AOB=\alpha$, $\angle AOC=\beta$라 하면
두 삼각형 OAB, OCA 의 넓이 S_1, S_2는 각각

$$S_1=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\alpha=5\sin\alpha$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\beta=5\sin\beta$$

주어진 조건에서 $3S_1=4S_2$이므로

$$\sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\beta$$

$\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}=2\pi$ 이므로 $\beta=\frac{3}{2}\pi-\alpha$

$$\sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\frac{4}{3}\cos\alpha \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 에서 $\frac{16}{9}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$$\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$$

$\sin\alpha>0$ 이므로 ㉠에서 $\cos\alpha<0$

따라서 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

코사인법칙에 의하여 구하는 선분 AB 의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\sqrt{(\overline{OA})^2+(\overline{OB})^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\alpha}\\&=\sqrt{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2(\sqrt{10})^2\times\left(-\frac{3}{5}\right)}\\&=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

003

[정답] ①

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면

원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$이므로

$$R^2\pi=\frac{49}{3}\pi,\ R=\frac{7}{3}\sqrt{3}$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R,\ \overline{BC}=2\times\frac{7}{3}\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7$$

삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=a$라 하면 코사인법칙에 의해

$7^2 = a^2 + 3^2 - 2 \times a \times 3 \times \cos\frac{\pi}{3}$

$a^2 = 3a - 40 = 0$, $(a-8)(a+5) = 0$

$a > 0$이므로 $a = 8$

$\overline{AC} = 8$이고 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

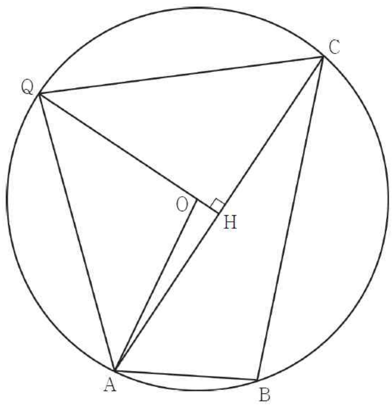
$\cos(\angle CBA) = \frac{3^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 3 \times 7} = -\frac{1}{7}$

이므로 $\frac{\pi}{2} < \angle CBA < \pi$가 되어 삼각형 ABC는 둔각삼각형이다.

삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점을 Q라 하면

점 Q는 선분 AC의 수직이등분선과 원 C의 두 교점 중 직선 AC로부터 멀리 떨어져 있는 점이다.

그림과 같이 점 Q에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 원 C의 중심 O는 선분 QH 위에 있다.



직각삼각형 AHO에서

$\overline{OH} = \sqrt{\left(\frac{7}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 4^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{QH} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$이므로 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2} \times 8 \times \frac{8}{3}\sqrt{3} = \frac{32}{3}\sqrt{3}$

004

[정답] ②

$\angle ABC = \theta$라 하자.

삼각형 ABD 에서 $\angle ADE = \angle DAB + \angle ABD$

한편, $\angle DAB = \angle CAD$, $\angle ABD = \angle EBC$

그러므로

$$\begin{aligned}\angle ADE &= \angle CAD + \angle EBC \\ &= \angle CAD + \angle EAC \\ &= \angle EAD\end{aligned}$$

즉, 삼각형 EAD 는 $\overline{EA} = \overline{ED}$ 인 이등변삼각형이다. 삼각형 EAC 에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{AC}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{EC}^2 - 2 \times \overline{EA} \times \overline{EC} \times \cos(\pi - \theta)$ 이고

호 EA 에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로 $\angle ACE = \angle ABE$

호 CE 에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로 $\angle EAC = \angle EBC$

한편, $\angle ABE = \angle EBC$ 이므로 $\angle ACE = \angle EAC$

즉, $\overline{EA} = \overline{EC}$ 이고,

삼각형 ABC 에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos\theta$

이므로 $\overline{AC}^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \frac{1}{8} = 36$

그러므로 $\overline{AC} = 6$

$36 = 2 \times \overline{EA}^2 - 2 \times \overline{EA}^2 \times \left(-\frac{1}{8}\right)$, $\overline{EA} = 4$

그러므로 $\overline{EA} = \overline{ED}$ 에서 $\overline{ED} = 4$

005

[정답] 15

$\overline{AC} = k$ 라 하면 $\overline{BD} = 2k$ 이고

$\overline{AH} : \overline{HB} = 1:3$ 이므로 $\overline{AH} = \frac{1}{2}$

$\angle CAB = \theta$ 라 할 때, 두 삼각형 ABC, ABD 에서 사인법칙을 이용하면

$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta} = 2r$, $\frac{\overline{AD}}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{\overline{AD}}{\sin\theta} = 2R$

즉, $\overline{BC} = 2r\sin\theta$, $\overline{AD} = 2R\sin\theta$

$4(R^2 - r^2) \times \sin^2\theta = (2R\sin\theta)^2 - (2r\sin\theta)^2$ 이므로

두 식을 $(2R\sin\theta)^2 - (2r\sin\theta)^2 = 51$ 에 대입하면

$\overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = 51$ $\cdots\cdots$ ㉠

삼각형 AHC 에서 $\cos\theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{CA}} = \frac{1}{2k}$ 이므로

두 삼각형 ABC, ABD 에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos\theta$

$= 4 + k^2 - 2 \times 2 \times k \times \cos\theta = k^2 + 2$ $\cdots\cdots$ ㉡

$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BD} \times \cos(\pi - \theta)$

$= 4 + 4k^2 + 2 \times 2 \times 2k \times \cos\theta = 4k^2 + 8$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 $\overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = 3k^2 + 6 = 51$

즉, $k^2 = 15$ 이므로 $\overline{AC}^2 = 15$

006

[정답] 27

선분 AB는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이므로
삼각형 ABC는 직각삼각형이다.

$\angle BCA = \frac{\pi}{2}$, $\angle CAB = \alpha$라 하면

$\cos\alpha = \frac{1}{3}$이고, $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{8}{9}$이므로

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overline{BC} = \overline{AB} \times \sin\alpha$이므로 $\overline{AB} = 18$이고, $\overline{AC} = 6$
점 D는 선분 AB를 $5:4$로 내분하는 점이므로
$\overline{AD} = 10$
삼각형 CAD에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{DC}^2 = 6^2 + 10^2 - 2\times6\times10\times\cos\alpha = 96$
$\overline{DC} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$
삼각형 CAD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면,
사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{DC}}{\sin\alpha} = 2R$에서 $R = 3\sqrt{3}$
삼각형 CAD의 외접원의 넓이 $S = 27\pi$

따라서 $\frac{S}{\pi} = 27$

007

[정답] 27

삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하여 선분 CD의 길이를 구하자.
삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2 = 3^2 + 2^2 - 2\times3\times2\times\cos\frac{\pi}{3} = 7$

이므로 $\overline{BD} = \sqrt{7}$이다.
$\angle BAD + \angle BCD = \pi$이므로 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$2^2 + \overline{CD}^2 - 2\times2\times\overline{CD}\times\cos\frac{2\pi}{3} = 7$

이므로 $\overline{CD} = 1$이다.
삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서 $\angle AEB$는 공통이고 $\angle EAB = \angle ECD$이므로
삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다.

라서 $\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$이다. 즉,

$$\frac{3+\overline{ED}}{\overline{EC}}=\frac{2+\overline{EC}}{\overline{ED}}=\frac{2}{1}$$

에서 $\overline{ED}=\frac{7}{3}$이다.

$$\angle DCE=\pi-\angle BCD=\angle BAD=\frac{\pi}{3}$$

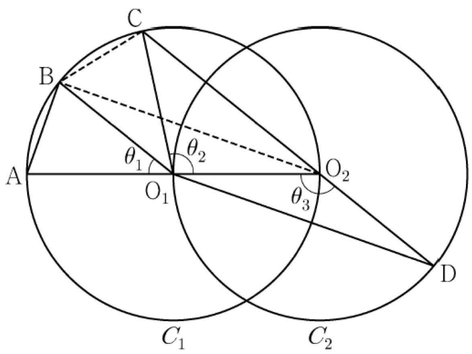
이므로 삼각형 ECD 에서 사인법칙을 이용하면

$$\frac{\frac{7}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\sin\theta}$$ 에서

$196\times\sin^2\theta=27$이다.

008

[정답] ②



$\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$이므로 $\theta_3=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta_2}{2}$이고

$\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로

$\angle CO_1B=\theta_1$이다.

이때, $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로

삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.

$\overline{AB}=k$라 할 때,

$\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로

$\overline{AO_2}=\sqrt{k^2+(2\sqrt{2}k)^2}=3k$이고,

$\angle BO_2A=\frac{\theta_1}{2}$이므로

$\cos\frac{\theta_1}{2}=\frac{2\sqrt{2}k}{3k}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

삼각형 O_2BC에서

$\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\frac{\theta_1}{2}$이므로

삼각형 $\mathrm{BO_2C}$에서

$\overline{\mathrm{O_2C}} = x(0 < x < 3k)$라 하면

코사인법칙에 의하여

$$k^2 = x^2 + (2\sqrt{2}k)^2 - 2 \times x \times 2\sqrt{2}k \times \cos\frac{\theta_1}{2}$$

$$k^2 = x^2 + (2\sqrt{2}k)^2 - 2 \times x \times 2\sqrt{2}k \times \cos\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$3x^2 - 16kx + 21k^2 = 0$

$(3x - 7k)(x - 3k) = 0$

$0 < x < 3k$이므로

$x = \frac{7}{3}k$

즉, $\overline{\mathrm{O_2C}} = \frac{7}{3}k$이다.

$\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{O_2D}} + \overline{\mathrm{O_2C}} = \overline{\mathrm{O_1O_2}} + \overline{\mathrm{O_2C}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{CD}} = k : \frac{3k}{2} + \frac{7k}{3} = 1 : \frac{23}{6}$이다.

따라서 $6k = 23$

009

[정답] 96

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AD}} = k$라 할 때

두 삼각형 ABC, ACD에서 각각 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle\mathrm{ACB}) = \frac{10^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - k^2}{2 \times 10 \times \overline{\mathrm{BC}}} = \frac{1}{20}\left(\overline{\mathrm{BC}} + \frac{\boxed{100 - k^2}}{\overline{\mathrm{BC}}}\right),$$

$$\cos(\angle\mathrm{DCA}) = \frac{10^2 + \overline{\mathrm{CD}}^2 - k^2}{2 \times 10 \times \overline{\mathrm{CD}}} = \frac{1}{20}\left(\overline{\mathrm{CD}} + \frac{\boxed{100 - k^2}}{\overline{\mathrm{CD}}}\right)$$

이다.

이때 두 호 AB, AD에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\cos(\angle\mathrm{ACB}) = \cos(\angle\mathrm{DCA})$이다.

$$\frac{1}{20}\left(\overline{\mathrm{BC}} + \frac{100 - k^2}{\overline{\mathrm{BC}}}\right) = \frac{1}{20}\left(\overline{\mathrm{CD}} + \frac{100 - k^2}{\overline{\mathrm{CD}}}\right)$$

$$\overline{\mathrm{BC}} - \overline{\mathrm{CD}} = (100 - k^2) \times \left(\frac{1}{\overline{\mathrm{CD}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{BC}}}\right)$$

$$\overline{\mathrm{BC}} - \overline{\mathrm{CD}} = (100 - k^2) \times \left(\frac{\overline{\mathrm{BC}} - \overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{BC}} \times \overline{\mathrm{CD}}}\right)$$

$\overline{\mathrm{AC}} = 10 < 2R$이므로 $\overline{\mathrm{BC}} \neq \overline{\mathrm{CD}}$

그러므로 $\overline{\mathrm{BC}} \times \overline{\mathrm{CD}} = 100 - k^2$

사각형 ABCD 의 넓이는
두 삼각형 ABD, BCD 의 넓이의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2}k^2\sin(\angle\mathrm{BAD})+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin(\pi-\angle\mathrm{BAD})$$

$$=\frac{1}{2}\{k^2+(100-k^2)\}\sin(\angle\mathrm{BAD})$$

$$=50\sin(\angle\mathrm{BAD})=40$$

에서 $\sin(\angle\mathrm{BAD})=\frac{4}{5}$ 이다.

따라서 삼각형 ABD 에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle\mathrm{BAD})}=2R$에서 $\overline{\mathrm{BD}}=\frac{8}{5}R$이므로

$\overline{\mathrm{BD}}\ :\ R=\frac{8}{5}\ :\ 1$

따라서 $60\times\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{R}=96$

010

[정답] ⑤

ㄱ. $\angle\mathrm{BCA}=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\cos(\angle\mathrm{CBA})=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{3}{7}$$

$$\sin(\angle\mathrm{CBA})=\sqrt{1-\left(\frac{3}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$$ (참)

ㄴ. $\angle\mathrm{CBA}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\angle\mathrm{ADC}=\pi-\theta$

$$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{AB}\times\sin\theta=14\times\frac{2\sqrt{10}}{7}=4\sqrt{10}$$

$\overline{\mathrm{AD}}=k\ (k>0)$ 이라 하면
삼각형 ACD 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}(4\sqrt{10})^2&=k^2+7^2-2\times k\times 7\times\cos(\pi-\theta)\\&=k^2+49+14k\cos\theta\\&=k^2+6k+49\end{aligned}$$

$k^2+6k-111=0$ 이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=-3+\sqrt{9+111}=-3+2\sqrt{30}$ (참)

ㄷ. 삼각형 ACD 의 넓이가 최대일 때 사각형 ABCD 의 넓이가 최대이므로 점 D 는 선분 AC 의 수직이등분선이 호 AC 와 만나는 점이다. 그러므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}$

$\overline{\mathrm{AD}}=x\ (x>0)$ 이라 하면
삼각형 ACD 에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{10})^2 = x^2 + x^2 - 2 \times x \times x \times \cos(\pi - \theta) = 2x^2 + 2x^2 \times \frac{3}{7} = \frac{20}{7}x^2$

$x^2 = 56$ 이므로 $\overline{\mathrm{AD}} = 2\sqrt{14}$

사각형 ABCD 의 넓이의 최댓값은

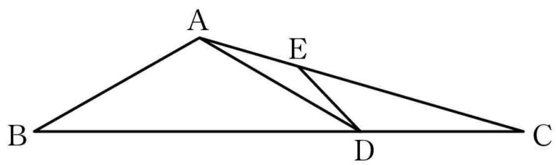
$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AD}} \times \overline{\mathrm{CD}} \times \sin(\pi - \theta) + \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AC}} \times \overline{\mathrm{BC}}$

$= \frac{1}{2} \times (2\sqrt{14})^2 \times \frac{2\sqrt{10}}{7} + \frac{1}{2} \times 4\sqrt{10} \times 6 = 8\sqrt{10} + 12\sqrt{10} = 20\sqrt{10}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

011

[정답] 12



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle \mathrm{ABC}) = \frac{2^2 + (3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \times 2 \times 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이다. 삼각형 ABD에서

$$\sin(\angle \mathrm{ABD}) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

이므로 사인법칙에 의하여 삼각형 ABD의 외접권의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2} \times \frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin(\angle \mathrm{ABD})} = \boxed{2}$이다.

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle \mathrm{CAD})} = \frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin(\angle \mathrm{ACD})}$$

이므로

$$\sin(\angle \mathrm{CAD}) = \frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AD}}} \times \sin(\angle \mathrm{ACD}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{13} = \frac{\sqrt{39}}{26}$$

이다. 삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{DE}} = 2 \times 2 \times \sin(\angle \mathrm{CAD}) = \frac{2\sqrt{39}}{13}$$

이다.

따라서 $13l^2 = 13 \times \frac{4 \times 39}{13^2} = 12$

012

[정답] ①

$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{CAD} = \theta$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 - 2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\theta$$
$$= 25+45-2\times5\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$$
$$= 70-30\sqrt{5}\,cos\,\theta$$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{CD}}^2 = \overline{\mathrm{AD}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 - 2\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\theta$$
$$= 49+45-2\times7\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$$
$$= 94-42\sqrt{5}\,cos\,\theta$$

이때 $\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{CAD}$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{CD}}^2$

$70-30\sqrt{5}\cos\theta = 94-42\sqrt{5}\cos\theta$에서 $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\overline{\mathrm{BC}}^2 = 70-30\sqrt{5}\cos\theta = 70-30\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5} = 10$

즉, $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{10}$

한편,

$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{5}$이므로 $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta} = 2R$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 2R$$

$$5\sqrt{2} = 2R$$

즉, $R = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$