2024학년도 수능완성출제분석서(수.완.출)
- 수학 II -

by. 17학번머스크(OrbilD)

"이걸 활용한 넌 잘 될거야"

- 대상

수학 2-3등급 이상

- 배경과 목표

'풀 것도 많은데, EBS를 다 풀어야해?' '선별해준것만 풀어도 되려나? 찝찝한데?'

그래서 왜 선별했는지 그리고 어떻게 출제될 수 있는지까지
선별하였습니다. 또한, 6월부터 수학 또한 심심찮게 ebs에서 출제된 요소들과 표현들이 자주나오다보니
수능특강에 비해서 난이도가 비교적 높은 수능완성에서 더더욱 좋은 POINT들을 연구하여 문제 몇 놈이
출제될 수 있다고 판단하였습니다.

- 활용방안

좌측에는 문제들이 오른쪽에는 출제분석이 적혀있습니다.
문제푸는 속도가 정말 빠르신 분들은 그냥 수능완성 사서 다 풀고 이 칼럼을 읽어주면 좋고,
할 것이 산더미이신 분들은 해당 1) 문제를 풀어버리고, 2) 한번 더 출제 분석을 정독
하시면 도움이 될 것 같습니다. !

- 이상 예상 질문들

Q. 선별의 기준은?

A. 어디서든 볼 수 있는 문제들과 본인이 2등급 이상이고 정상적인 루틴 (개념서,기출서,인강교재 등을 '적당히' 풀어오며살았음)
으로 살아왔다면, 지금 당장 급하게 풀지 않아도 되는 것들은 제외하였습니다.

Q. EBS 선별을 너(17머스크)가 왜 해?

A. 본인은 문제 판매 타율이 좋은 편이고, 유명한 강사분들 밑에서 조교로 일하였기에(비밀조항) 오르비에서 많은 고수들이 계시지만,
현 수험생들에게 도움이 될 만한 자료를 일단 만들어 보고 싶었고, EBS를 단순 선별 이상으로 활용할 수 있겠다고 판단하여
자료를 만들어본것이고 무료로 배포하고자하니, 양해바랍니당

Q. 기하는?

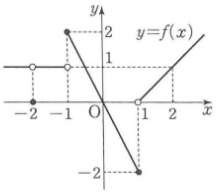
A. 안(못)해요

수능완성

수학Ⅱ. 1. 함수의 극한

[42page 2번]

1. 1)함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1+}\{f(x)-2\}+\lim_{x\to 2-}f(x-1)$의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

출제 포인트

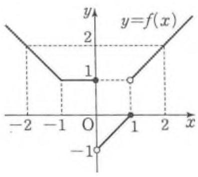
$x-1$정도는 합성함수로 안봄.

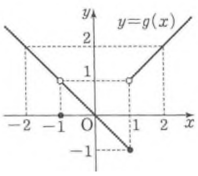
[42page 3번]

2. 2)두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.

$$\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 1+}g(x)=f(k)+\lim_{x\to -1}g(x)$$

를 만족시키는 상수 k의 값은? (단, $-2\le k\le 2$)





① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

출제 포인트

귀찮게해서 5~6번으로 낼수도

[44page 10번]

3. [3]일차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0} f(x)=2,\ \lim_{x\to 1}\frac{3(x^2-1)}{(x-1)f(x)}=2$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

출제 포인트

쉬운극한 하나는 넣어줘야지

[45page 14번]

4. [4]다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-ax^2}{x+1}=4$

(나) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x+2}=4$

$f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

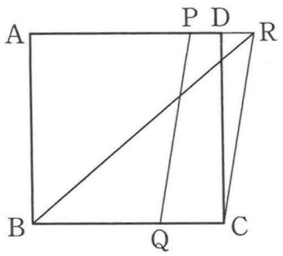
① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

출제 포인트

기본유형

[46page 15번]

5. 5)그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD의 변 AD 위에 $\overline{\mathrm{PD}}=t$ $(0<t<1)$인 점 P가 있다. 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점을 Q라 하고 점 C를 지나고 직선 PQ와 평행한 직선이 직선 AD와 만나는 점을 R라 하자. $\displaystyle\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PD}}}{5-\overline{\mathrm{BR}}}$의 값은?



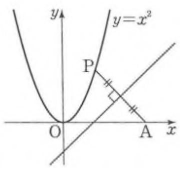
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

출제 포인트

$\overline{\mathrm{QC}}=1$, $\overline{\mathrm{BR}}$은 피타고라스를 통해 구한다.
이처럼 도형 또는 이차함수, 무리함수에서
단순 극한 문제로 출시 가능성도 높음

[46page 16번]

6. 6)그림과 같이 $t\neq4$인 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$과 x축 위의 점 A$(4,\ 0)$이 있다. 선분 PA의 수직이등분선의 x절편을 $f(t)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^3}$의 값은?



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

출제 포인트

$t>4$인 실수로 발문이 나와야 할 것 같은데..
발문이 어색하다만, 위와 마찬가지로 함수에서 극한의 식을
추출하여 연산 문제 출제 가능성 높은 편

[46page 19번]

7. [7]정의역이 $\{x | x \geq 0\}$인 함수 $y = f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \leq x < 2$일 때, $f(x) = |x-1|$이다.
> (나) $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2) = f(x)$이다.

양의 실수 t에 대하여 직선 $y = \frac{x}{t}$가 함수 $y = f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. $\lim_{t \to 4-} g(t) + g(6) + \lim_{t \to 8+} g(t)$의 값을 구하시오.

출제 포인트

실근의 개수 $g(t)$로 하여 함수의 극한 문제를 물어볼 수 있는데,
이때, 실근의 개수를 파악해야하는 함수개형은
2차, 1차, 주기함수, 유리함수, 무리함수, 구간함수 일 것이다.

참고로 다항함수 미분에서 방정식 $f(x) = t$의 실근의 개수를
물어볼 수 있는데, 이때는 극값 관련 이슈일 것이며,
문제와 같이 극한값을 물어보는 행위의 목적 자체가 다르다.

즉, 실근의 개수 문제는
함극 : 난이도가 쉽고, 그냥 값찾기 (또는 노가다)
미적 : 개형 추론하기
형태로 출제가능성이 역시 높다.

(이 문제는 사실 구린데, 수능완성 수2는 심각하다.)

[48page 22번]

8. [8]이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 두 상수 a, b에 대하여 함수 $g(x)$가 다음과 같다.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x + a}{x^2 - x} & (x < 0) \\ x + b & (0 \leq x < 2) \\ f(x) & (x \geq 2) \end{cases}$$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 $x \geq 2$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 0일 때, 닫힌구간 $[-5, 5]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 포인트

유치하다. 유치한데 뭐 뽑아야했어..
연속조건과 쌩뚱맞은 이차함수의 최솟값 . 수준이하.

[48page 23번]

9. 9)이차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2} & (x<1) \\ \dfrac{1}{f(x)} & (1 \le x \le 3) \\ \dfrac{1}{6} & (x>3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표를 $(0, k)$라 할 때, 자연수 k의 최댓값을 구하시오.

출제 포인트

좋은 문제.

연속이라는 개념정리와 분수함수의 정의역 범위는 한번씩 나오는데
이번 수능완성에 자꾸 강조하는 자연수(정수) 조건을 활용하여
심플하게 난이도를 조절하였다.

유리함수의 정의역설정은 가끔 문제 풀이과정속에 녹아든다.

[48page 24번]

10. 10)정의역이 $\{x|x \ge 0\}$인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 3$일 때, $f(x)=(x-1)^2$이다.
(나) 3 이상의 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-3)+3$이다.

$t \ne 1$인 실수 t에 대하여 직선 $y=tx+1$이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $g(0)=2$
ㄴ. $\lim_{t \to 1+} g(t)=\infty$
ㄷ. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 실수 a의 값을 작은 것부터 순서대로 나열한 것이 a_1, a_2, a_3, $\cdots$일 때, $a_3=-14+6\sqrt{6}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제 포인트

솔직히 너무 쉬운데. ㅋㅋㅋㅋㅋㅋㅋ
이렇게 안나옴. 근데 그냥 구간 반복함수니까..

내가 만든거 아니다.
지금도 최대한 무의미한 것은 제거 하고 쓰는데 현타온다.

[49page 26번]

11. [11]두 함수 $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=x-|3x|+4$에 대하여 함수

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)} & (x \neq -1,\ x \neq 2) \\ a & (x=-1) \\ b & (x=2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a \times b$의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{7}{8}$ ③ 1
④ $\frac{9}{8}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

출제 포인트

$g(x)$의 표현이 가지고 오고 싶어진다.

$$\rightarrow g(x)=\begin{cases} 4-2x & (x>0) \\ 4x+4 & (x<0) \end{cases}$$

분수함수인데, 분모 절댓값함수 표현을 기억해두자.

[52page 1번]

12. [12]다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to 2}\frac{f(x)-1}{x-2}=5$를 만족시킨다. 함수 $f(x)$에서 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율이 $\frac{1}{2}f'(2)$의 값과 같을 때, $f(4)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

출제 포인트

다른 건 평범해서 그냥 넣었다.

특별한건 없다. 평균변화율 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 정도.

[129page 12번]

13. 13)함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$를 만족시키고

$$f(x)=x-1 \ (0 \le x < 2)$$

이다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x) = 0$

ㄴ. 함수 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)f(x+1)$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제 포인트

ㄱ, ㄴ, ㄷ 소재는 의미가 없고
ㄴ,ㄷ 정도는 빈출유형으로 보임.

[144page 20번]

14. 14)실수 k에 대하여 두 함수 $f(x)=|x|+|x-2|$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2-x+k$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(k)$라 하자. $h\left(\frac{5}{2}\right)+\lim_{k \to a+} h(k)=9$일 때, 실수 a의 최솟값은 p이다. $h(p)$의 값을 구하시오.

출제 포인트

내신 스타일의 문제로 해당문제는 무한하게 만들 수 있다.
다만 현재 킬러기조를 없애기로 하였고, 변별은 해야하기에
이런식의 해결능력을 요구하는 실근개수 등의 문제는
4점라인에서 출제될 가능성이 높다. 연습을 해 둘 필요가 있다.

[153page 12번]

15. 15)최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\dfrac{x^3+x+1}{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim\limits_{x\to -1}|g(x)|=\infty$

(나) $\lim\limits_{x\to 3}g(x)=\infty$

$f(5)$의 값은?

① 24 ② 28 ③ 32
④ 36 ⑤ 40

출제 포인트

사실 눈치가 빠른 사람들은 함수 $f(x)$가 $x+1$, $x-3$ 인수를 가지는 것을 쉽게 알 수 있고

하나가 절댓값이므로 부호변화가 일어나는 것을 방지하는 장치하기에 $f(x)=(x+1)(x-3)^2$ 임을 한 번에 알 수 있다.

이런 논리 연습을 빈틈없이 해두자.

[163page 6번]

16. 16)두 함수

$$f(x)=x^2+ax+b,$$

$$g(x)=\begin{cases} 2x-1 & (x\le -1) \\ -x & (-1<x\le 1) \\ x+1 & (x>1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 포인트

두 함수의 곱이 연속일 때의 상황이다.
일반적으로는 하나가 0이 되면 된다고 하는데,

사설 등에서 간혹 그렇게 풀면 망하는 문제가 있었기에
안풀린다면, 좌극한, 우극한, 함숫값 세팅을
다시 해서 풀어보자. (사설 문제는 저작권 때문에 못적음 ㅠ)

수능완성

수학Ⅱ. 2. 다항함수의 미분

[53page 5번]

17. 17)함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x<0) \\ 1-x^3 & (0 \le x < 1) \\ 3-3x & (x \ge 1) \end{cases}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)+1}{x}=0$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. 함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제 포인트

이렇게 ㄱ,ㄴ,ㄷ 는 내지 않을 듯.
다만, ㄷ의 $|f(x)|$ 미분가능성 정도는 포인트로 풀자

[53page 6번]

18. 18)함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x \le k$일 때, $f(x)=x^3-6x^2+10x$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+k)=f(x)+f(k)$이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 포인트

$f(x+k)=f(x)$ => 주기
$f(x+k)=f(x)+f(k)$ => 주기 + 이동

[54page 9번]

19. 19)함수 $f(x)=2x^3+ax^2-5x+b$가

$$\lim_{x \to \infty} x\left\{f\left(2+\frac{3}{x}\right)-21\right\}=f(2)$$

를 만족시킬 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

출제 포인트

심플한 치환 문제.
함숫값과 미분계수를 통한 연립문제.

[55page 10번]

20. 20)다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

(가) $f(4)=10$ (나) $2<x<4$인 모든 실수 x에 대하여 $\lvert f'(x)\rvert \le 6$이다.

① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

출제 포인트

도함수는 원함수의 증감의 크기를 나타낸다.

[55page 12번]

21. [21]좌표평면 위에 네 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(2,\ 2)$, $(0,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형이 있다. 실수 t에 대하여 직선 $y=t-x$의 아랫부분과 정사각형의 내부가 겹치는 부분의 넓이를 $f(t)$라 하자. 함수 $|f(x)-mx|$가 $x=0$에서만 미분가능하지 않도록 하는 양의 실수 m의 최솟값이 $a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)

출제 포인트

옛날 소재이지만
도형의 관찰 -> 식 구성하기 -> 특이점 찾기
(변곡점, 접선, 극값 등)
그리고 함수 $|f(x)-mx|$가 $x=0$에서만 미분가능하지 않으므로 $(0,\ 0)$을 지나고 미분계수는 0이 아니다.

[56page 14번]

22. [22]자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[n,\ n+2]$에서 정의된 함수 $f(x)=x^3-9x^2+24x+5$가 있다. 함수 $f(x)$가 일대일함수가 되도록 하는 10 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

출제 포인트

일대일함수 표현 안녕?

[56page 15번]

23. [23)]실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(x)=x^3+x^2+|x-a|+2$

의 역함수가 존재하도록 하는 실수 a의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

출제 포인트

절대값 중간에 껴서 역함수 안녕?

[57page 17번]

24. [24)]최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 0을 갖는다.
(나) 방정식 $f(x)=0$의 세 실근을 작은 것부터 차례로 나열하면 등차수열을 이룬다.

함수 $f(x)$의 극솟값이 -16일 때, $f(0)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

출제 포인트

등차수열을 아주 싸구려틱하게 준 문제이다.

[57page 18번]

25. [25]두 함수 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+18$, $g(x)=2x+3$에 대하여 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 3이다.
> (나) 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=3$에서 극소이다.

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은? (단, a, b는 상수이다.)

① 31 ② 32 ③ 33
④ 34 ⑤ 35

출제 포인트

f와 g는 미가이므로 조건 (가)에 해당하는 x의 값은
$f=g$이며, 사 $f-g$는 삼차식

$$\begin{cases} f'(x)=0 \\ f(3)=9 \end{cases}$$

[58page 20번]

26. [26]최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=x+3$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다.
> (나) 함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=1$에서만 미분가능하지 않다.
> (다) 함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$f(2)$의 값은?

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

출제 포인트

고인물에게는 당연한 내용이지만,
조건 (나)의 해석으로
$f(1)-g(1)=0$이고 두 함수의 그래프가 $x=1$에서 접하지 않고,
조건 (다)의 해석으로는 절댓값함수.. 즉
$|f(x)-g(x)|$가 극댓값을 가질 때는,
함수 $f(x)-g(x)$에서도 양수의 극댓값을 가지거나
음수의 극솟값을 가지는 것을 의미한다.

또한 절댓값함수는 0이라는 극솟값을 가지는 경우가 많다.
절댓값함수는 0이라는 극댓값을 가질 수 없다.

[58page 21번]

27. 27)함수 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+k$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$가 x축에 접한다.
(나) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 2이다.

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 상수이다.)

<보 기>

ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 극댓값은 0이다.
ㄷ. 조건을 만족시키는 모든 k의 값의 합은 5이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제 포인트

이문제는 ㄱㄴㄷ로 자격도 없고,
그냥 조건만 보고 떠오르는 개형이 존재하면 된다.
사차함수 $f(x)$에 대하여
함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수의 개수가
1일 때 -> 삼중근 (극댓값 존재하지 않는 함수)
2일 때 -> 극댓값 존재하는 함수 (이차함수개형은 시험에 안나와)
형태를 먼저 떠올린다.

[59page 23번]

28. 28)곡선 $C: y=2x^4-3x^2-2x+4$ 위의 x좌표가 양수인 점에서 접하는 직선 중 기울기가 최소인 직선의 y절편이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

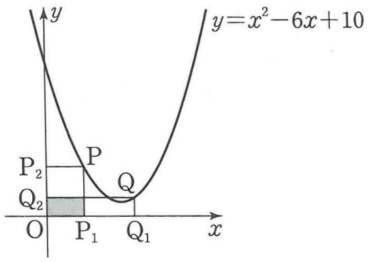
① 39 ② 41 ③ 43
④ 45 ⑤ 47

출제 포인트

삼차함수의 $x>0$에서 최솟값을 구하는 문제이다.
삼차함수의 최솟값이므로 사실상 이계도함수 또는 변곡점
등의 형태로 접근이 될 수 있다. (교과과정을 아주 침범하네 ㅋ)

[6Opage 24번]

29. 29)그림과 같이 양수 t에 대하여 곡선 $y=x^2-6x+10$ 위의 x좌표가 t인 점을 P, x좌표가 $t+2$인 점을 Q라 하자. 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 P_1, P_2라 하고, 점 Q에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q_1, Q_2라 하자. 원점 O에 대하여 두 사각형 PP_2OP_1, QQ_2OQ_1의 내부의 공통부분의 넓이를 $f(t)$라 하자. 구간 $(0, a]$에서 함수 $f(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 양수 a의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?



① $2+2\sqrt{2}$ ② $4+\sqrt{2}$ ③ $3+2\sqrt{2}$
④ $5+\sqrt{2}$ ⑤ $4+2\sqrt{2}$

출제 포인트

옛날 기출 또는 내신문제 스타일. 위에서 말했듯이, 도형의 넓이를 식으로 표현한 후 최댓값최솟값문제.
앞번호에 이런문제를 박아두어, 시간압박을 주면서
단순 노동을 늘리는 모의고사가 될 수 있다.

[6Opage 25번]

30. 30)실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1, t+1]$에서 함수

$f(x)=x^3-5x^2+2x+13$

의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 미분가능하지 않을 때 $g'(a-1)+g'(a+1)$의 값은?

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

출제 포인트

구간에 변수를 둔 최댓값(최솟값)
-> 문제는 어디서든 볼수 있고 많이 연습해두길...

[61page 29번]

31. 31)최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $|f(x)|$가 극소인 서로 다른 x의 값이 3개이고, 극솟값은 모두 0이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $|f(x)|$가 극대인 서로 다른 x의 값이 2개이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 극댓값은 0보다 크거나 같다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제 포인트

사차개형의 ㄱㄴㄷ 문제가 오랜만에 나올것인가.
사실 수능에서 ㄱㄴㄷ를 이런식으로 낼 리가 없다.
ㄱㄴㄷ는 결정되지 않는 상황에서 조건을 제한해가면서
특정적인 상황을 살펴보지만, 이문제는 그냥 사차함수개형
공부하는 문제일뿐. 수능완성 완성도는 역시 명불허전이다.

[61page 30번]

32. 32)최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근은 0, 3이다.
(나) x에 대한 방정식 $|f(x)|-mx=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 실수 m의 값은 $\frac{9}{2}$뿐이다.

함수 $|f(x)|$의 극댓값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

출제 포인트

직선 $y=\frac{9}{2}x$ 와 특수한 상황이 만들어지는
함수 $|f(x)|$ 를 추론해보자.

→ 특수한 상황이란?
변곡점 또는 접선 또는 원점과의 교점(미출제요소)

[62page 32번]

33. 33)두 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-9x^2+12x+1 & (x \geq 0) \\ 1-x & (x<0) \end{cases},$$

$$g(x)=mx+1$$

이 있다. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립하도록 하는 실수 m의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $\frac{11}{16}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{13}{16}$
④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{15}{16}$

출제 포인트

$f(x)$를 잘그리고 판단해도 되고..

$$f(x)-g(x)=\begin{cases} 2x^3-9x^2+(12-m)x & (x \geq 0) \\ (\ -1-m)x & (x<0) \end{cases}$$

가 항상 0보다 크거나 같다.
이므로 사실 $x<0$에서 일차함수가 큰 의미가 없는 문제이다.
다만, 함수를 좀 더 세련되게 바꿔서 부등식 문제는
출제될 수 있다.

[62page 33번]

34. 34)최고차항의 계수가 1이고 모든 항의 계수가 정수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)-f'(x)$$

라 하자. $f(0)=g(0)=0$이고, $x \leq k$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \leq 0$을 만족시키는 실수 k의 최댓값이 0일 때, $f(3)$의 최댓값은?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

출제 포인트

$f(0)=g(0)=0$으로 접선의 형태 파악 후
판별식과 정수 조건을 통하여 식 정리를 연습하는 문제.

[120page 20번]

35. 35)최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$는 서로 다른 두 점에서 만나고, 함수 $|f(x)-2x|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2x}{x^2}=16$
> (다) $f(1)>15$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

출제 포인트

유형편에서도 비슷한 형태의 식전개는 있었다.
절댓값함수의 그래프와 직선과의 관찰은
4점 초반대 문제로 나올 수 있다.

절댓값 함수의 미분가능성은 기출 등으로 이미 많이
훈련되어있을것이라 생각하고 이것이 무엇인가 ? 라는 생각들면
유명한 인강을 빨리 정독하길 바란다.

[121page 22번]

36. 36)최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)\times f'(x) & (x<1) \\ -f(x)\times f'(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 할 때, 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
> (나) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
> (다) $h(k)=2$이고 $\lim_{t\to k-}h(t)>\lim_{t\to k+}h(t)$를 만족시키는 실수 k가 존재한다.

$g(-1)=20$일 때, $g(0)\times g(3)$의 값을 구하시오.

출제 포인트

$f(x)f'(x)$는 출제하기 참 편한 함수이다. $f(x)$에 따라 $f'(x)$도
결정되니 케이스 관찰하기 좋다고 생각한다. 또한 이 문제에서는
아니지만, $\{f(x)\}^2$을 미분한 형태이기도 하다.
따라서 다양한 활용이 가능하며 특히 이차함수 $f(x)$는
수능완성뿐만아니라 다양한 사설에서도 단골 소재로 나올 것이다.
$f'(x)$는 이차함수의 극값을 가지는 곳에서 $f'(x)=0$의 실근이
존재할 것이고, $f(x)f'(x)$는 삼차함수 이기에, $f'(k)=0$일 때,
$(k, f(k)f'(k))$에서 점대칭을 이루는 삼차함수이다. 또한, 이차방정식
$f(x)=0$이 두 실근을 가지지 않으면 문제 상황이
시시(?)하기 때문에 두 실근을 가지고, 상황을 해석하는 문제가
나올 것이다.

+ 이 문제는 $x=1$을 기준으로 함수 $f(x)f'(x)$의 부호가 변하는데,
풀이에만 집중하면, $x=1$에서 어떤 특징이 있어야 사실 조건을
지정할 수 있다. 다만, 조건들이 어떤 값의 해석이 있다면
(ex> $g(0)=g(1)+2$) $x=1$은 특징이 크지 않을 수 있다.
-> 이 때는 값을 기반으로 연산하는 문제

[133page 22번]

37. 37)두 상수 a, b와 실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x+a & (x<k) \\ -x^2+13x+b & (x\ge k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 실수 c에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=c$의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값은 4이다.

x에 대한 방정식 $f(x)=c$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 실수 c의 값의 합이 8일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=d$의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 d의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

출제 포인트

$x=k$에서 미분가능하고, 현재 $f(x)$의 개형은
상수항만 모르는 상황이라서 개형을 완전하게 파악할 수 있다.

개형파악이 끝난다면 실근개수는 뻔하다.
그냥 내용만 길지 알맹이가 없는 문제이다.
근데 수능완성이라서 별 수 있나 풀어야지ㅎㅎ

[145page 22번]

38. 38)다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(3)$의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오.

(가) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=6$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)|\le|xg(x)|$, $g(0)=-6$인 연속함수 $g(x)$가 존재한다.

출제 포인트

꼭 살펴봐야할 문제이다.

$|f(x)|\le|xg(x)|$에서 $-|g(x)|\le\frac{f(x)}{x}\le|g(x)|$의
식 변환이 자연스러워야한다.
$f(x)$가 사차니까 $g(x)$는 삼차라고 생각하면 위험한 문제

해당 식의 형태는 2017학년도 수능 30번에서 나왔던 것처럼
다양한 관찰을 요구할 수 도 있는 문제이다.

[157page 22번] (미분)

39. [39]최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} xf(x) & (x \geq 2) \\ \dfrac{f'(x+2)-f'(x-2)}{x-2} & (x<2) \end{cases}$$

는 $x=2$에서 미분가능하다. $f(6)$의 값을 구하시오.

출제 포인트

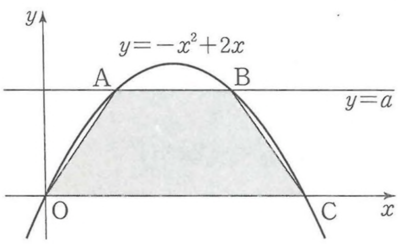
$f'(x)$는 이차함수이고, $f'(4)=f'(0)$이므로
$f'(x)=3(x-2)^2+c$
$f(x)=(x-2)^3+cx+d$
임을 쉽게 알 수 있다.
그리고 대입해서 미분가능으로 풀면 쉽게 풀린다.

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f'(x+2)-f'(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{f'(4+t)-f'(4)-f'(t)+f'(0)}{t}$$

형태로 이계도함수도 가능하기에
출제하지는 않을 듯.

[168page 20번]

40. [40]곡선 $y=-x^2+2x$와 직선 $y=a$ $(0<a<1)$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=-x^2+2x$가 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 C라 하자. 사각형 OCBA의 넓이의 최댓값을 S라 할 때, $27S$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작다.)



출제 포인트

위에서 언급했지만, 이처럼 상황을 설계하고
최댓값 또는 최솟값을 물을 수 있다.
여기서 상황이란, 기존에는 접선의 형태가 많았는데
도형의 넓이 및 길이 등도 출제될 요소가 있다.

[169page 22번]

41. [41] $t>0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수

$$f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$$

의 최댓값을 $g(t)$, 최솟값을 $h(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=a$ $(a>0)$에서 미분가능하지 않다. $g(2a)+h(3a)=pa+q$일 때, 두 유리수 p, q에 대하여 $p-q$의 값을 구하시오.

출제 포인트

특정구간에서 최댓값 최솟값의 문제가 수능완성에서 많이보인다.
$g(t)$, $M(t)$, $m(t)$ 등의 형태로
실수 t의 변화에 따른 최댓값 최솟값으로
신규함수를 추론하게 하는 문제는 단골 소재였는데
이번 수능완성에서 유난히 많이출제된 것이
9월이든 수능이든 어떤방식으로든 출제될 가능성이 높다.

수능완성

수학Ⅱ. 3. 다항함수의 적분

[66page 2번]

42. 42)함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int(5x-k)dx-\int(x+k)dx$$

이고 $f(1)=0$, $f'(1)=2$일 때, $f(2)$의 값은?
(단, k는 상수이다.)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

출제 포인트

부정적분이므로 두 식을 묶어서 연산이 가능하다.

$$\int(5x-k)dx-\int(x+k)dx=\int(4x-2k)dx$$

[67page 6번]

43. 43)$\int_0^3(x^2+x|1-x|)dx$의 값은?

① $\frac{83}{6}$ ② 14 ③ $\frac{85}{6}$
④ $\frac{43}{3}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

출제 포인트

Simple 절댓값

[68page 10번]

44. 44)양의 상수 k와

$f(x)=(x^2-4)(x+a)$

에 대하여 함수 $y=|f(x)|$가 $x=k$에서만 미분가능하지 않을 때, $\int_0^{2a} f'(x)dx$의 값을 구하시오. (단, a는 실수이다.)

출제 포인트

수1에 비해서 수2 유형은 그냥 넣고 있다.
문제 수준이 상당히 낮다.

[69page 13번]

45. 45)삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $4\int_{-1}^{1} f(x)dx+5\int_{-1}^{1} xf(x)dx=0$
(나) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$f(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

출제 포인트

우함수/기함수 기본조건 활용.

[71page 21번]

46. 46)함수 $f(x)=\int_0^x (3t^2-4)dt$에 대하여 함수 $g(x)$가 $g'(x)=f(x)$, $g(2)=0$을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 포인트

가벼운 적분문제1

[72page 22번]

47. 47)최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f'(t)dt+(x+1)f(x)+1$$

이라 할 때, $g(1)=8$이다. 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극솟값 3을 가질 때, $f(-1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 포인트

가벼운 적분문제2

[73page 26번]

48. 48)양수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3-ax$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 18일 때, $f(-1)$의 값은?

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5

④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

출제 포인트

함수 $f(x)$는 바로 기함수이기에,
대칭 하나짜리 넓이 가능이고 넓이공식까지는 과한 것 같다.
그냥 연산하자.

[73page 27번]

49. 49)함수 $f(x)=x^3-2x^2+k$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선과 이 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, k는 상수이다.)

① 1 ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

출제 포인트

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2$의 그래프와 x축과 둘러싸인 넓이는

$S=\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$이다.

$(0,\ f(0))$에서의 접선이므로 $\beta=0$이 된다.

$f'(0)(x-0)+f(0)=f(x)$의 $x=0$이 아닌 실근은 2이므로

$\frac{2^4}{12}=\frac{4}{3}$

[73page 29번]

50. 50)삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)=3x^2-2x+a$

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-1}{x}=-1$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $30S$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

출제 포인트

아 뽑을 거 더럽게 없다. 지금 뽑은것들만 풀어도 된다.
나머지문제들은 그냥 지금까지 개념서든 기출이든 뭐든 풀어본 친구들이라면 큰 의미가 없는 문제이니 걱정하지말자.

[74page 30번]

51. 51)실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 상수 a, b에 대하여

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & (-3<x<0) \\ x^2+ax+b & (0 \le x \le 3) \end{cases}$$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x-3)=f(x+3)$이다.

$\int_{-33}^{-29} f(x)dx-\int_{57}^{60} f(x)dx$의 값은?

① $\frac{5}{6}$ ② 1 ③ $\frac{7}{6}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

출제 포인트

자주 나오는 형태이다. 주기가 6임을 놓치지 말고
-3에서 3까지 $f(x)$의 정적분을 가지고 주기관찰을 하는 문제.

[74page 31번]

52. 52)역함수가 존재하는 삼차함수 $f(x)=-x^3+ax^2-3ax+10$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 실수 a가 최솟값을 가질 때, $\int_2^{10} g(x)dx$의 값을 구하시오.

출제 포인트

우리 킹BS는 발문공부를 안하시나봐요.
보신다면 보고 이렇게 발문 고쳐쓰세요^^

삼차함수 $f(x)=-x^3+ax^2-3ax+10$가 역함수가 존재하도록 하는 실수 a의 최솟값을 m이라 하자. $a=m$일 때, 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $\int_2^{10} g(x)dx$의 값을 구하시오.

[75page 33번]

53. 53)수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-4t+k$$

이다. 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치는 0이고 시각 $t=1$에서의 점 P의 위치는 -5이다. 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 움직이는 방향이 바뀔 때까지 움직인 거리는? (단, k는 상수이다.)

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

출제 포인트

“방향이 바뀔 때까지” 라는 워딩정도는 기억해두자.

[75page 34번]

54. [54]시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2+t,\ v_2(t)=2t^2+3t$$

이다. 두 점 P, Q가 동시에 원점을 출발한 후 다시 만나는 위치 x가 $x=k$일 때, $2k$의 값을 구하시오.

출제 포인트

속도문제들은 사실 비슷하다.
다만, 여러형태의 표현들은 기억해두자.
"원점을 출발한 후 다시 만나는 위치"

[117page 11번]

55. [55]다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

> (가) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}$
> (나) 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)=3x^2+ax-\int_0^1(2x-1)f(t)dt$이다.

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

출제 포인트

함수 식에서 정적분으로 계수표현 -> $\int_0^1(2x-1)f(t)dt$

+ 피적분함수 변수관찰 -> x와 t로 이루어진 형태

[127page 6번]

56. 56)수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 2t^2 + at + 2$$

이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량이 $\frac{100}{3}$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

출제 포인트

위치의 변화량은 6월도 그렇고 여기서도 나왔기에
속도 문제들은 '단어' '표현법' 등을 확실하게 숙지하자.

[128page 10번]

57. 57)삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$g(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt$$

이다. $f(0)=5$, $g(1)=12$일 때, $\int_0^2 g(x)dx$의 값은?

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

출제 포인트

$g(x)$는 다시 삼차함수가 됨.

$g(x)=\int_{-x}^{x}(at^n+\cdots)dt=\left[\frac{a}{n+1}t^{n+1}+\cdots\right]_{-x}^{x}$

$=\left(\frac{a}{n+1}x^{n+1}+\cdots\right)-\left(\frac{a}{n+1}(-x)^{n+1}+\cdots\right)$

n이 홀수이면 $g(x)$는 다시 n차가 되고

n이 짝수이면 $g(x)$는 $n+1$차식 되는 것을 확인!

[130page 14번] (적분)

58. 58)최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)-x=0$은 세 실근 0, 1, 2를 갖는다. 함수 $g(x)$가 $0\le x\le 2$에서 $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)+2$를 만족시킬 때, $\int_0^{2n} g(x)dx=72$를 만족시키는 자연수 n의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

출제 포인트

또 직선과 삼차함수 그래프의 교점이다.

그리고 평행이동하는 주기함수이다.

정적분에서 평행이동 주기는 “대칭성”으로 접근한다.

[132page 19번]

59. [59]다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=x^2-2x+x\int_0^1 f(t)dt$$

를 만족시킨다. 곡선 $y=(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

출제 포인트

그냥 한번 풀자. 너무 문제가 적다

[164page 10번]

60. [60]다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$2\int_p^x f(t)dt-\int_p^x \{f'(t)\}^2 dt=2-3x$$

를 만족시킨다. $f'(1)=-2$일 때, $p+f(2)$의 값은? (단, p는 상수이다.)

① -1 ② $-\frac{5}{6}$ ③ $-\frac{2}{3}$

④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

출제 포인트

$$\int_p^x 2f(t)-\{f'(t)\}^2 dt=2-3x$$

에서 $2f(t)-\{f'(t)\}^2=-3$이고 p를 쉽게 구할 수 있다.
다항함수 차수를 한 번에 파악하자.

이하 해설

1) [정답] ②

[해설]
함수 $y=f(x)-2$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것과 같으므로
$\lim_{x \to -1+}\{f(x)-2\}=0$
함수 $y=f(x-1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같으므로
$\lim_{x \to 2-}f(x-1)=\lim_{x \to 1-}f(x)=-2$
따라서 $\lim_{x \to -1+}\{f(x)-2\}+\lim_{x \to 2-}f(x-1)=0+(-2)=-2$

2) [정답] ④

[해설]
$\lim_{x \to 1-}f(x)=0,\ \lim_{x \to 1+}g(x)=1,\ \lim_{x \to -1}g(x)=1$
이므로 $0+1=f(k)+1$에서 $f(k)=0$
따라서 그림에서 $f(1)=0$이므로 $k=1$이다.

3) [정답] 4

[해설]
$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a \neq 0$)이라 하면
$\lim_{x \to 0}f(x)=\lim_{x \to 0}(ax+b)=b=2$

$$\lim_{x \to 1}\frac{3(x^2-1)}{(x-1)f(x)}=\lim_{x \to 1}\frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)(ax+2)}=\lim_{x \to 1}\frac{3(x+1)}{ax+2}$$
$$=\frac{3\lim_{x \to 1}(x+1)}{\lim_{x \to 1}(ax+2)}=\frac{3(1+1)}{a+2}=\frac{6}{a+2}=2$$

에서 $a+2=3$이므로 $a=1$
따라서 $f(x)=x+2$이므로 $f(2)=2+2=4$

4) [정답] ⑤

[해설]
조건 (가)에서 $f(x)-ax^2$은 일차항의 계수가 4인 일차함수이므로 $f(x)-ax^2=4x+b$ (b는 상수)라 하자.
조건 (나)에서 $x \to -2$일 때, 극한값이 존재하고
(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉,
$\lim_{x \to -2}f(x)=\lim_{x \to -2}(ax^2+4x+b)=4a-8+b=0$
에서 $b=-4a+8$ …… ㉠

$$\lim_{x \to -2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x \to -2}\frac{ax^2+4x-4a+8}{x+2}$$
$$=\lim_{x \to -2}\frac{(x+2)(ax-2a+4)}{x+2}$$
$$=\lim_{x \to -2}(ax-2a+4)=-4a+4=4$$

에서 $a=0$
이것을 ㉠에 대입하면 $b=8$
따라서 $f(x)=4x+8$이므로

$f(1)=4+8=12$

5) [정답] ⑤

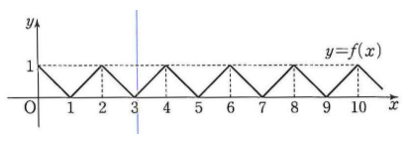
[해설]
사각형 PQCR가 평행사변형이므로
$\overline{\mathrm{DR}}=\overline{\mathrm{PR}}-\overline{\mathrm{PD}}=\overline{\mathrm{QC}}-\overline{\mathrm{PD}}=1-t$
즉, 직각삼각형 ABR에서
$\overline{\mathrm{AB}}=3,\ \overline{\mathrm{AR}}=3+(1-t)=4-t$
이므로
$\overline{\mathrm{BR}}=\sqrt{3^2+(4-t)^2}=\sqrt{t^2-8t+25}$
따라서
$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PD}}}{5-\overline{\mathrm{BR}}}=\lim_{t\to0+}\frac{t}{5-\sqrt{t^2-8t+25}}=\lim_{t\to0+}\frac{t\left(5+\sqrt{t^2-8t+25}\right)}{25-\left(t^2-8t+25\right)}$
$=\lim_{t\to0+}\frac{t\left(5+\sqrt{t^2-8t+25}\right)}{t(8-t)}=\lim_{t\to0+}\frac{5+\sqrt{t^2-8t+25}}{8-t}$
$=\frac{5+5}{8}=\frac{5}{4}$

6) [정답] ②

[해설]
두 점 $\mathrm{P}(t,t^2)$, $\mathrm{A}(4,0)$에 대하여 선분 PA의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $\left(\frac{t+4}{2},\ \frac{t^2}{2}\right)$
직선 PA의 기울기는 $\frac{t^2}{t-4}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{t-4}{t^2}$이다.
즉, 선분 PA의 수직이등분선의 방정식은
$y-\frac{t^2}{2}=-\frac{t-4}{t^2}\left(x-\frac{t+4}{2}\right)$
이 직선의 x절편이 $f(t)$이므로
$0-\frac{t^2}{2}=-\frac{t-4}{t^2}\left\{f(t)-\frac{t+4}{2}\right\}$
$f(t)-\frac{t+4}{2}=\frac{t^4}{2(t-4)}$
$f(t)=\frac{t^4}{2(t-4)}+\frac{t+4}{2}=\frac{t^4+t^2-16}{2(t-4)}$
따라서 $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^3}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^4+t^2-16}{2t^3(t-4)}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\frac{1}{t^2}-\frac{16}{t^4}}{2\left(1-\frac{4}{t}\right)}=\frac{1}{2}$

7) [정답] 18

[해설]
조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 직선 $y=\frac{x}{t}$는 원점을 지나고 기울기가 $\frac{1}{t}$인 직선이므로 $0<t<2$일 때, $g(t)=1$

자연수 n에 대하여 $t=2n$일 때, $g(t)=2n$

$2n<t<2n+2$일 때, $g(t)=2n+1$

즉, $2<t<4$일 때 $g(t)=3$이므로 $\lim_{t\to 4-}g(t)=3$

$8<t<10$일 때 $g(t)=9$이므로 $\lim_{t\to 8+}g(t)=9$

따라서 $\lim_{t\to 4-}g(t)+g(6)+\lim_{t\to 8+}g(t)=3+6+9=18$

8) [정답] ③

[해설]

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=0$과 $x=2$에서도 연속이어야 한다.

(ⅰ) 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)$

이때 $\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)=b$이므로 $\lim_{x\to 0-}g(x)=b$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0-}\frac{x^2+x+a}{x^2-x}=b$에서

$x\to 0-$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

그러므로 $a=0$이고

$b=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2+x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0-}\frac{x(x+1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0-}\frac{x+1}{x-1}=-1$

(ⅱ) 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-}g(x)=\lim_{x\to 2+}g(x)=g(2)$

$\lim_{x\to 2-}(x-1)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$

즉, $f(2)=1$

한편, 함수 $f(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차함수이고, $x\ge 2$에서 최솟값이 0이므로

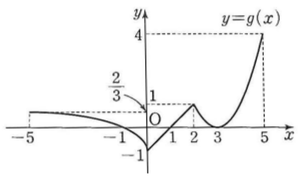
$f(x)=(x-k)^2$ (단, k는 2보다 큰 상수)로 놓을 수 있다. 이때 $f(2)=1$이므로

$(2-k)^2=1$

$k>2$이므로 $k=3$

그러므로 $g(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x-1} & (x<0)\\ x-1 & (0\le x<2)\\ (x-3)^2 & (x\ge 2)\end{cases}$

이고 닫힌구간 $[-5, 5]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 닫힌구간 $[-5, 5]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 4, 최솟값은 -1이므로 구하는 합은 $4+(-1)=3$

9) [정답] 11

[해설]

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$, $x=3$에서도 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1-} g(x)=\lim_{x\to 1+} g(x)=g(1)$에서

$\frac{1}{2}=\frac{1}{f(1)}$, $f(1)=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 $\lim_{x\to 3-} g(x)=\lim_{x\to 3+} g(x)=g(3)$에서

$\frac{1}{f(3)}=\frac{1}{6}$, $f(3)=6$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$f(x)-2x=a(x-1)(x-3)$ (단, a는 0보다 큰 상수)

로 놓을 수 있다. 즉,

$f(x)=ax^2-2(2a-1)x+3a$

$\quad =a\left(x-\frac{2a-1}{a}\right)^2-\frac{a^2-4a+1}{a}$ $\cdots\cdots$ ㉢

이고 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $1\le x\le 3$에서 $f(x)\ne 0$이어야 한다.

(ⅰ) $\frac{2a-1}{a}\le 1$인 경우

$2a-1\le a$, $a\le 1$

즉, $0<a\le 1$인 경우 $f(1)=2>0$이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $\frac{2a-1}{a}\ge 3$인 경우

$2a-1\ge 3a$

$a\le -1$이므로 조건을 만족시키는 양수 a는 존재하지 않는다.

(ⅲ) $1<\frac{2a-1}{a}<3$, 즉 $a>1$인 경우

㉢에서 $-\frac{a^2-4a+1}{a}>0$이어야 하므로

$a^2-4a+1<0$, $2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$

즉, $1<a<2+\sqrt{3}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 조건을 만족시키는 양수 a의 값의 범위는

$0<a<2+\sqrt{3}$이고, $k=f(0)=3a$이므로

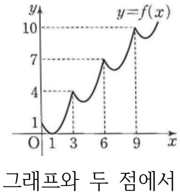
$0<k<6+3\sqrt{3}$

이때 $11<6+3\sqrt{3}<12$이므로 조건을 만족시키는 자연수 k의 최댓값은 11이다.

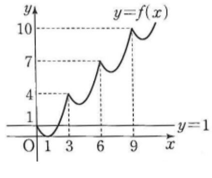
10) [정답] ③

[해설]

조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

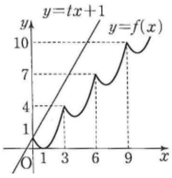


ㄱ. $t=0$일 때, 직선 $y=1$은 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 점에서 만나므로 $g(0)=2$ (참)



ㄴ. $t>1$일 때, 직선 $y=tx+1$은 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 점 $(0, 1)$에서만 만난다.

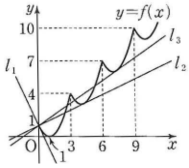
즉, $t>1$일 때, $g(t)=1$이므로 $\lim_{t \to 1+} g(t)=1$ (거짓)



ㄷ. 그림과 같이 점 $(0, 1)$에서 곡선 $y=(x-1)^2$에 접하는

직선을 l_1, $3<x<6$인 점에서 곡선 $y=f(x)$에 접하고

점 $(0, 1)$을 지나는 직선을 l_2, $6<x<9$인 점에서 곡선 $y=f(x)$에 접하고 점 $(0, 1)$을 지나는 직선을 l_3, $\cdots$이라 하고, 자연수 n에 대하여 직선 l_n의 기울기를 t_n이라 하자.



$(x-1)^2=tx+1$에서 $x^2-(t+2)x=0$이므로

$t=-2$일 때 직선 $y=-2x+1$은 점 $(0, 1)$에서 곡선

$y=(x-1)^2$에 접한다.

즉, $t_1=-2$이고 $t \le -2$일 때 $g(t)=1$, $-2<t<t_2$일 때 $g(t)=2$이므로 함수 $g(t)$는 $t=-2$에서 불연속이고 $a_1=-2$이다.

또 $g(t_2)=3$이고 $t_2<t<t_3$일 때 $g(t)=4$이므로

함수 $g(t)$는 $t=t_2$에서 불연속이고 $a_2=t_2$이다.

마찬가지 방법으로 하면 $a_3=t_3$임을 알 수 있다.

즉, 직선 $y=a_3x+1$이 $6<x<9$인 점에서 곡선 $y=(x-7)^2+6$에 접하므로 이차방정식

$(x-7)^2+6=a_3x+1$, 즉 $x^2-(a_3+14)x+54=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a_3+14)^2-4\times54=0$

$(a_3+14)^2=4\times9\times6$

$a_3>0$이므로 $a_3+14=6\sqrt{6}$

그러므로 $a_3=-14+6\sqrt{6}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

11) [정답] ④

[해설]

(ⅰ) $x<0$일 때

$g(x)=x+3x+4=4x+4$이므로 $x \ne -1$일 때

$h(x)=\frac{x^2-x-2}{4x+4}=\frac{(x+1)(x-2)}{4(x+1)}=\frac{x-2}{4}$

그러므로 $x<0$에서 함수 $h(x)$가 연속이려면

$h(-1)=\lim_{x \to -1} h(x)=\lim_{x \to -1} \frac{x-2}{4}=-\frac{3}{4}$

이어야 한다.

즉, $a=-\frac{3}{4}$

(ⅱ) $x \ge 0$일 때

$g(x)= x-3x+4= -2x+4$이므로 $x \neq 2$일 때

$h(x)= \dfrac{x^2-x-2}{-2x+4}= \dfrac{(x+1)(x-2)}{-2(x-2)}= -\dfrac{x+1}{2}$

그러므로 $x \geq 0$에서 함수 $h(x)$가 연속이려면

$h(2)= \lim\limits_{x \to 2} h(x)= \lim\limits_{x \to 2}\left(-\dfrac{x+1}{2}\right)= -\dfrac{3}{2}$

이어야 한다.

즉, $b= -\dfrac{3}{2}$

따라서 $a \times b = \left(-\dfrac{3}{4}\right) \times \left(-\dfrac{3}{2}\right)= \dfrac{9}{8}$

12) [정답] ①

[해설]

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-1}{x-2}= 5$에서 $x \to 2$일 때

(분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x \to 2}\{f(x)-1\}= f(2)-1= 0$이므로 $f(2)= 1$

이때 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-1}{x-2}= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}= f'(2)$이므로

$f'(2)= 5$

한편, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}= \dfrac{f(4)-1}{2}$이므로

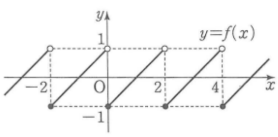
$\dfrac{f(4)-1}{2}= \dfrac{1}{2}f'(2)= \dfrac{5}{2}$

따라서 $f(4)= 6$

13) [정답] ⑤

[해설]

함수 $y= f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $-2 \leq x < 0$일 때, $f(x)= x+1$이므로

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x)= \lim\limits_{x \to 0-} (x+1)= 1$

$2 \leq x < 4$일 때, $f(x)= x-3$이므로

$\lim\limits_{x \to 2+} f(x)= \lim\limits_{x \to 2+} (x-3)= -1$

그러므로 $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)+ \lim\limits_{x \to 2+} f(x)= 1+(-1)= 0$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x= 2n$ (n은 정수)에서만 불연속이므로 함수 $|f(x)|$가 $x= 2n$ (n은 정수)에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

앞의 그림에 의하면 모든 정수 n에 대하여

$\lim\limits_{x \to 2n-} f(x)= 1$이므로 $\lim\limits_{x \to 2n-} |f(x)|= 1$

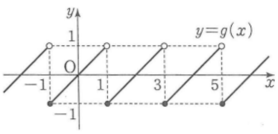
$\lim_{x \to 2n+} f(x) = -1$이므로 $\lim_{x \to 2n+} |f(x)| = 1$

$|f(2n)| = |-1| = 1$

즉, $\lim_{x \to 2n-} |f(x)| = \lim_{x \to 2n+} |f(x)| = |f(2n)|$이므로 함수 $|f(x)|$는 $x = 2n$ (n은 정수)에서 연속이다.

그러므로 함수 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄷ. 모든 정수 n에 대하여 함수 $f(x)$는 $x = 2n$에서만 불연속이고, 함수 $f(x+1)$은 $x = 2n-1$에서만 불연속이므로 함수 $f(x)f(x+1)$이 $x = n$ (n은 정수)에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다. $g(x) = f(x+1)$이라 하면 $-1 \le x < 1$일 때 $g(x) = x$이고, 모든 실수 x에 대하여 $g(x) = g(x+2)$이므로 함수 $y = g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



정수 n에 대하여

(ⅰ) $\lim_{x \to 2n-} f(x)f(x+1) = \lim_{x \to 2n-} f(x)g(x) = 1 \times 0 = 0$

$\lim_{x \to 2n+} f(x)f(x+1) = \lim_{x \to 2n+} f(x)g(x) = (-1) \times 0 = 0$

$f(2n)f(2n+1) = f(2n)g(2n) = (-1) \times 0 = 0$

즉, 모든 정수 n에 대하여

$$\lim_{x \to 2n-} f(x)f(x+1) = \lim_{x \to 2n+} f(x)f(x+1) = f(2n)f(2n+1)$$

이므로 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x = 2n$(n은 정수)에서 연속이다.

(ⅱ) $\lim_{x \to (2n-1)-} f(x)f(x+1) = \lim_{x \to (2n-1)-} f(x)g(x) = 0 \times 1 = 0$

$\lim_{x \to (2n-1)+} f(x)f(x+1) = \lim_{x \to (2n-1)+} f(x)g(x) = 0 \times (-1) = 0$

$f(2n-1)f(2n) = f(2n-1)g(2n-1) = 0 \times (-1) = 0$

즉, 모든 정수 n에 대하여

$$\lim_{x \to (2n-1)-} f(x)f(x+1) = \lim_{x \to (2n-1)+} f(x)f(x+1) = f(2n-1)f(2n)$$

이므로 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x = 2n-1$ (n은 정수)에서 연속이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $f(x)f(x+1)$은 $x = n$ (n은 정수)에서 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14) [정답] 4

[해설]

$$f(x) = \begin{cases} -2x+2 & (x \le 0) \\ 2 & (0 < x \le 2) \\ 2x-2 & (x > 2) \end{cases}$$에서

(ⅰ) 직선 $y = 2x-2$와 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2 - x + k$가 접하는 경우 이차방정식 $2x - 2 = \frac{1}{2}x^2 - x + k$, 즉 $\frac{1}{2}x^2 - 3x + k + 2 = 0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1 = (-3)^2 - 2(k+2) = 0$, $k = \frac{5}{2}$

이고, 이때 접점의 좌표는 $(3,\ 4)$이다.

직선 $y=-2x+2$와 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-x+k$가 접하는 경우

이차방정식 $-2x+2=\frac{1}{2}x^2-x+k$, 즉 $\frac{1}{2}x^2+x+k-2=0$의 판 별식을 D_2라 하면

$D_2=1^2-2(k-2)=0$, $k=\frac{5}{2}$

이고, 이때 접점의 좌표는 $(-1,\ 4)$이다.

직선 $y=2$와 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-x+k$가 접하는 경우

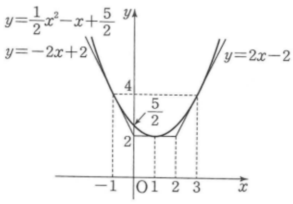
이차방정식 $\frac{1}{2}x^2-x+k=2$, 즉 $\frac{1}{2}x^2-x+k-2=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$D_3=(-1)^2-2(k-2)=0$, $k=\frac{5}{2}$

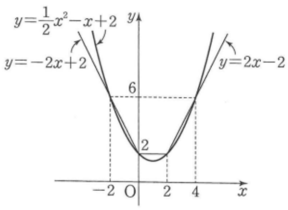
이고, 이때 접점의 좌표는 $(1,\ 2)$이다.

따라서 $k=\frac{5}{2}$일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 세 점 $(3,\ 4)$, $(-1,\ 4)$, $(1,\ 2)$에서 접하므로

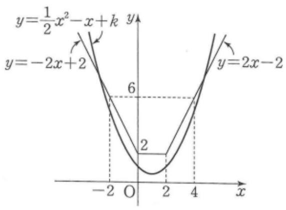
$h\left(\frac{5}{2}\right)=3$



(ⅱ) 함수 $y=g(x)$의 그래프가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $(0,\ 2)$, $(2,\ 2)$를 지나면, 즉 $k=2$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점 $(-2,\ 6)$, $(4,\ 6)$에서도 만나므로 $h(2)=4$



(ⅲ) $k<2$이면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.



(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 함수 $h(k)$는 다음과 같다.

$$h(k)=\begin{cases} 2 & (k<2) \\ 4 & (k=2) \\ 6 & \left(2<k<\frac{5}{2}\right) \\ 3 & \left(k=\frac{5}{2}\right) \\ 0 & \left(k>\frac{5}{2}\right) \end{cases}$$

$h\left(\frac{5}{2}\right)+\lim\limits_{k\to a+}h(k)=9$에서

$\lim_{k \to a+} h(k) = 9 - h\left(\frac{5}{2}\right) = 9 - 3 = 6$

$2 \le a < \frac{5}{2}$이므로 구하는 실수 a의 최솟값은 $p = 2$

따라서 $h(2) = 4$

15) [정답] ①

[해설]

$\lim_{x \to -1} |g(x)| = \lim_{x \to -1} \left| \frac{x^3 + x + 1}{f(x)} \right|$

$\lim_{x \to -1} (x^3 + x + 1) = -1$이므로 조건 (가)를 만족시키려면

$\lim_{x \to -1} |f(x)| = 0$

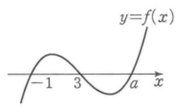
즉, 함수 $f(x)$는 $x + 1$을 인수로 갖는다.

$\lim_{x \to 3} g(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^3 + x + 1}{f(x)}$

$\lim_{x \to 3} (x^3 + x + 1) = 31$이므로 $\lim_{x \to 3} f(x) = 0$이고 함수 $f(x)$는 $x - 3$을 인수로 갖는다.

$f(x) = (x+1)(x-3)(x-a)$ (a는 상수)라 하자.

$a > 3$이면 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$x \to 3+$일 때 $f(x) \to 0-$이므로

$\lim_{x \to 3+} g(x) = -\infty$이고

$x \to 3-$일 때 $f(x) \to 0+$이므로 $\lim_{x \to 3-} g(x) = \infty$이다.

따라서 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

마찬가지로 $a < 3$인 경우도 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$a = 3$이면 $f(x) = (x+1)(x-3)^2$, $g(x) = \frac{x^3 + x + 1}{(x+1)(x-3)^2}$이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

따라서 $f(5) = 6 \times 4 = 24$

16) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)$는 이차함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 $x = -1$과 $x = 1$에서만 불연속이다.

그러므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x = -1$과 $x = 1$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이 된다.

함수 $f(x)g(x)$가 $x = -1$에서 연속이려면

$\lim_{x \to -1-} f(x)g(x) = \lim_{x \to -1+} f(x)g(x) = f(-1)g(-1)$이어야 한다.

$\lim_{x \to -1-} f(x)g(x) = (1 - a + b) \times (-2 - 1) = -3(1 - a + b)$

$\lim_{x \to -1+} f(x)g(x) = (1 - a + b) \times 1 = 1 - a + b$

$f(-1)g(-1) = (1 - a + b) \times (-2 - 1) = -3(1 - a + b)$

이므로 $-3(1 - a + b) = 1 - a + b$

$a - b = 1$ …… ㉠

함수 $f(x)g(x)$가 $x = 1$에서 연속이려면

$\lim_{x \to 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \to 1+} f(x)g(x) = f(1)g(1)$이어야 한다.

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x)g(x) = (1+a+b) \times (-1) = -(1+a+b)$

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x)g(x) = (1+a+b) \times 2 = 2(1+a+b)$

$f(1)g(1) = (1+a+b) \times (-1) = -(1+a+b)$

이므로 $-(1+a+b) = 2(1+a+b)$

$a+b = -1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-1$이므로 $f(x) = x^2 - 1$

따라서 $f(2) = 4 - 1 = 3$

17) [정답] ①

[해설]

ㄱ. $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{f(x)+1}{x} = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{(x^2-1)+1}{x} = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{x^2}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0-} x = 0$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} (x^2-1) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} (1-x^3) = 1$이므로

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0+} f(x)$

즉, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이 아니므로 $x=0$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄷ. $\lim\limits_{x \to 1-} |f(x)| = \lim\limits_{x \to 1-} |1-x^3| = 0$

$\lim\limits_{x \to 1+} |f(x)| = \lim\limits_{x \to 1+} |3-3x| = 0$

$|f(1)| = 0$

에서 $\lim\limits_{x \to 1-} |f(x)| = \lim\limits_{x \to 1+} |f(x)| = |f(1)|$이므로

함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서 연속이다.

그런데

$\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{|1-x^3|-0}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{1-x^3}{x-1}$

$= \lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{(1-x)(1+x+x^2)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x \to 1-} (-x^2-x-1) = -3$

$\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{|3-3x|-0}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{3(x-1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x \to 1+} 3 = 3$

에서 $\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1} \neq \lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1}$이므로 함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

18) [정답] ④

[해설]

조건 (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $0 \le x \le k$에서의 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 $f(k)$만큼 평행이동하거나 x축의 방향으로 $-k$만큼, y축의 방향으로 $-f(k)$만큼 평행이동하면서 반복되므로 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(ⅰ) $\lim_{x \to k-} f(x) = \lim_{x \to k-} (x^3 - 6x^2 + 10x) = k^3 - 6k^2 + 10k$

$\lim_{x \to k+} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x+k) = \lim_{x \to 0+} \{f(x) + f(k)\}$

$= f(0) + f(k) = k^3 - 6k^2 + 10k$

$f(k) = k^3 - 6k^2 + 10k$

에서 $\lim_{x \to k-} f(x) = \lim_{x \to k+} f(x) = f(k)$이므로 함수 $f(x)$는 $x = k$에서 연속이다.

(ⅱ) $\lim_{h \to 0-} \frac{f(k+h) - f(k)}{h}$

$= \lim_{h \to 0-} \frac{(k+h)^3 - 6(k+h)^2 + 10(k+h) - k^3 + 6k^2 - 10k}{h}$

$= \lim_{h \to 0-} \frac{3k^2h + 3kh^2 + h^3 - 12kh - 6h^2 + 10h}{h}$

$= \lim_{h \to 0-} (3k^2 + 3kh + h^2 - 12k - 6h + 10)$

$= 3k^2 - 12k + 10$

$\lim_{h \to 0+} \frac{f(k+h) - f(k)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(k) + f(h) - f(k)}{h}$

$= \lim_{h \to 0+} \frac{f(h)}{h}$

$= \lim_{h \to 0+} \frac{h^3 - 6h^2 + 10h}{h}$

$= \lim_{h \to 0+} (h^2 - 6h + 10) = 10$

이므로 함수 $f(x)$가 $x = k$에서 미분가능하려면

$3k^2 - 12k + 10 = 10$이어야 한다.

즉, $3k(k-4) = 0$

따라서 $k > 0$이므로 $k = 4$

19) [정답] ②

[해설]

$\frac{1}{x} = t$라 하면 $x \to \infty$일 때, $t \to 0+$이므로

$\lim_{x \to \infty} x\left\{f\left(2 + \frac{3}{x}\right) - 21\right\} = \lim_{t \to 0+} \frac{f(2+3t) - 21}{t} = f(2)$ …… ㉠

㉠에서 $t \to 0+$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{t \to 0+} \{f(2+3t) - 21\} = f(2) - 21 = 0$이므로 $f(2) = 21$

이때 $\lim_{t \to 0+} \frac{f(2+3t) - 21}{t} = 3\lim_{t \to 0+} \frac{f(2+3t) - f(2)}{3t} = 3f'(2)$

이므로 $3f'(2) = f(2) = 21$에서 $f'(2) = 7$

한편, $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 5x + b$에서

$f(2) = 16 + 4a - 10 + b = 21$이므로

$4a + b = 15$ …… ㉡

$f'(x) = 6x^2 + 2ax - 5$에서

$f'(2) = 24 + 4a - 5 = 7$이므로 $4a = -12$, $a = -3$

$a = -3$을 ㉡에 대입하면

$-12 + b = 15$, $b = 27$

따라서 $a + b = (-3) + 27 = 24$

20) [정답] ④

[해설]
다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 닫힌구간 $[2, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(2, 4)$에서 미분가능하다.

그러므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=f'(c)$인

c가 열린구간 $(2, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

조건 (가)에 의하여 $f(4)=10$이므로 $f'(c)=\dfrac{10-f(2)}{2}$이고, 조건 (나)에 의하여 $2<x<4$인 모든 실수 x에 대하여 $|f'(x)|\le 6$이므로

$|f'(c)|=\left|\dfrac{10-f(2)}{2}\right|\le 6$

$|10-f(2)|\le 12,\ -12\le 10-f(2)\le 12,\ -2\le f(2)\le 22$

따라서 $M=22,\ m=-2$이므로

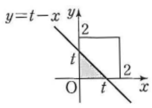
$M-m=22-(-2)=24$

21) [정답] 20

[해설]
(i) $t\le 0$일 때, $f(t)=0$

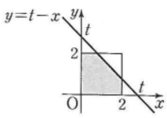
(ii) $0<t\le 2$일 때,

$f(t)=\dfrac{1}{2}t^2$



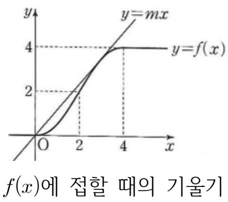
(iii) $2<t<4$일 때,

$f(t)=4-\dfrac{1}{2}(4-t)^2$



(iv) $t\ge 4$일 때, $f(t)=4$

(i)~(iv)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



그림과 같이 직선 $y=mx$가 $2<x<4$인 점에서 곡선 $y=f(x)$에 접할 때의 기울기 m의 값을 구해 보자.

$2<x<4$일 때, $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+4x-4$이므로

접점의 x좌표를 s라 하면

$-\dfrac{1}{2}s^2+4s-4=ms$ …… ㉠

$f'(x)=-x+4$이므로

$-s+4=m$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$-\dfrac{1}{2}s^2+4s-4=-s^2+4s,\ s^2=8$

$2 < s < 4$이므로 $s=2\sqrt{2}$이고 $m=4-2\sqrt{2}$
즉, 함수 $|f(x)-mx|$가 $x=0$에서만 미분가능하지 않으려면 $m<0$ 또는 $m \geq 4-2\sqrt{2}$
이어야 하므로 조건을 만족시키는 양수 m의 최솟값은 $4-2\sqrt{2}$이다.
따라서 $a=4,\ b=-2$이므로
$a^2+b^2=4^2+(-2)^2=20$

22) [정답] 51

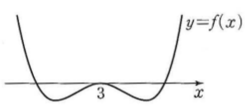
[해설]
닫힌구간 $[n,\ n+2]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 일대일함수가 되려면 이 구간에서 $f(x)$가 증가하거나 감소해야 한다.
즉, 구간 $[n,\ n+2]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이거나 $f'(x) \leq 0$이어야 한다. 이때 $f(x)=x^3-9x^2+24x+5$에서
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2-18x+24 \\ &= 3(x^2-6x+8) \\ &= 3(x-2)(x-4) \end{aligned}$$
이므로 구간 $(-\infty,\ 2]$에서 $f'(x) \geq 0$, 구간 $[2,\ 4]$에서 $f'(x) \leq 0$, 구간 $[4,\ \infty)$에서 $f'(x) \geq 0$이다.
따라서 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 n의 값은
2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
이므로 구하는 합은 51이다.

23) [정답] ②

[해설]
함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $x \neq a$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이어야 한다.
이때
$$f(x)=\begin{cases} x^3+x^2+x-a+2 & (x \geq a) \\ x^3+x^2-x+a+2 & (x < a) \end{cases}$$
에서
$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+2x+1 & (x > a) \\ 3x^2+2x-1 & (x < a) \end{cases}$$
$x > a$일 때,
$f'(x)=3x^2+2x+1$이고 이차방정식 $3x^2+2x+1=0$의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=1^2-3\times 1=-2<0$$
이므로 실수 a의 값에 관계없이 $x>a$인 모든 실수 x에 대하여
$f'(x)>0$이다.
$x<a$일 때,
$f'(x)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$
이므로 $x<a$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이려면 $a \leq -1$이어야 한다.
따라서 구하는 실수 a의 최댓값은 -1이다.

24) [정답] ⑤

[해설]
조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



조건 (나)에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 한 실근을 $3+a$라 하면 다른 한 실근은 $3-a$이므로

$f(x)=(x-3+a)(x-3-a)(x-3)^2$ (단, a는 양의 상수)

로 놓을 수 있다.

즉, $f(x)=\{(x-3)^2-a^2\}(x-3)^2=(x^2-6x+9-a^2)(x^2-6x+9)$

이므로

$$\begin{aligned} f'(x)&=(2x-6)(x^2-6x+9)+(x^2-6x+9-a^2)(2x-6) \\ &=2(x-3)\{2(x^2-6x+9)-a^2\} \\ &=2(x-3)\{2(x-3)^2-a^2\} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=3\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$이므로

함수 $f(x)$는 $x=3\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$에서 극솟값을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 극솟값이 -16이므로

$f(x)=(x-3)^4-a^2(x-3)^2$에서

$$f\left(3+\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4-a^2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{2}=-\frac{a^4}{4}=-16,$$

$$\begin{aligned} f\left(3-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)&=\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4-a^2\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{2}=-\frac{a^4}{4} \\ &=-16 \end{aligned}$$

즉, $a^4=64$에서 $a^2=8$이므로

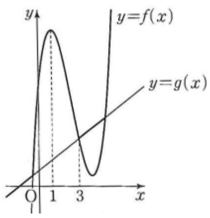
$f(x)=(x-3)^4-8(x-3)^2$

따라서 $f(0)=3^4-8\times3^2=81-72=9$

25) [정답] ①

[해설]

조건 (가)에 의하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만나야 한다. 또 조건 (나)를 만족시키려면 그림과 같이 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 $x=3$인 점에서 만나야 한다.



$f(x)=2x^3+ax^2+bx+18$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$이고

$f'(1)=0$이어야 하므로

$6+2a+b=0$ …… ㉠

$f(3)=g(3)$이어야 하므로

$54+9a+3b+18=9$에서

$3a+b=-21$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-15$, $b=24$이므로

$f(x)=2x^3-15x^2+24x+18$이고

$f'(x)=6x^2-30x+24=6(x-1)(x-4)$

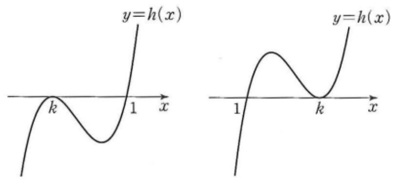
$f'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=4$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은 $f(1)+f(4)=29+2=31$

26) [정답] ①

[해설]
$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가
1인 삼차함수이고, 조건 (가)에 의하여
방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
또 조건 (나)에 의하여 $h(1)=0$이므로
$h(x)=(x-1)(x-k)^2$ (단, k는 1이 아닌 상수)로 놓을 수 있다.
즉, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음 두 가지 중 하나이다.



[그림 1] [그림 2]

이때 조건 (다)를 만족시키려면 함수 $y=h(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같아야 하며 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가져야 한다.

$h'(x)=(x-k)^2+2(x-1)(x-k)$
$\quad=(x-k)(3x-k-2)$

이고 $h'(x)=0$에서

$x=k$ 또는 $x=\frac{k+2}{3}$이므로 $\frac{k+2}{3}=0$

$k=-2$

따라서 $h(x)=(x-1)(x+2)^2$이고

$f(x)=h(x)+g(x)=(x-1)(x+2)^2+x+3$

이므로

$f(2)=1\times16+5=21$

27) [정답] ③

[해설]
$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+k$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$
$\quad=12x(x^2-x-2)$
$\quad=12x(x+1)(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서

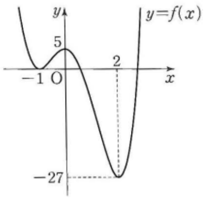
$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$ …… ㉠

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때 조건 (가)를 만족시키려면
$f(-1)=0$ 또는 $f(0)=0$ 또는 $f(2)=0$
이어야 한다.
(ⅰ) $f(-1)=0$인 경우
$f(-1)=k-5=0$에서 $k=5$이므로

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+5$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



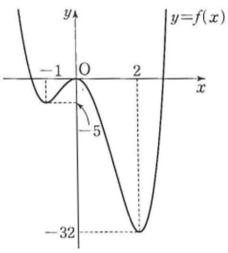
[그림 1]

이 경우 조건 (나)를 만족시킨다.

(ⅱ) $f(0)=0$인 경우

$f(0)=k=0$이므로

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



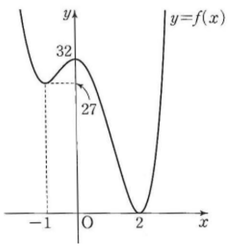
[그림 2]

이 경우 조건 (나)를 만족시킨다.

(ⅲ) $f(2)=0$인 경우

$f(2)=k-32=0$에서 $k=32$이므로

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+32$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

이 경우 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

ㄱ. ㉠에서 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

(참)

ㄴ. (ⅰ)에서 $k=5$인 경우 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키지만 함수 $f(x)$의 극댓값은 0이 아니다.

(거짓)

ㄷ. (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 만족시키는

모든 k의 값은 $k=5$ 또는 $k=0$이므로 그 합은 5이다.

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

28) [정답] ③

[해설]

$y=2x^4-3x^2-2x+4$에서 $y'=8x^3-6x-2$이므로 x좌표가 양수인 점에서 곡선 C에 접하는 접선의 접점의 x좌표를 t, 접선의 기울기를 $f(t)$라 하면

$f(t)=8t^3-6t-2\ \ (t>0)$

이때 $f'(t)=24t^2-6=0$에서 $t=\dfrac{1}{2}$이므로 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	(-2)	↘	-4	↗

그러므로 함수 $f(t)$는 $t>0$에서 $t=\dfrac{1}{2}$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

즉, 기울기가 최소인 접선의 접점은 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{19}{8}\right)$이고 기울기는 -4이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{19}{8}=-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

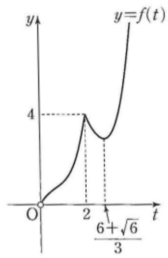
$y=-4x+\dfrac{35}{8}$

따라서 구하는 접선의 y절편은 $\dfrac{35}{8}$이므로

$p+q=8+35=43$

29) [정답] ②

[해설]
$g(x)=x^2-6x+10$이라 하자.
$g(t)=g(t+2)$에서
$t^2-6t+10=(t+2)^2-6(t+2)+10$
$4t=8,\ t=2$
(ⅰ) $0<t<2$일 때,
$g(t)>g(t+2)$이므로
$f(t)=t\times g(t+2)=t\{(t+2)^2-6(t+2)+10\}=t^3-2t^2+2t$
이때 $f'(t)=3t^2-4t+2$이고 이차방정식 $f'(t)=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=4-6=-2<0$
이므로 $f'(t)>0$이다.
즉, $0<t<2$에서 함수 $f(t)$는 증가한다.
(ⅱ) $t>2$일 때,
$g(t)\leq g(t+2)$이므로
$f(t)=t\times g(t)=t^3-6t^2+10t$
이때 $f'(t)=3t^2-12t+10$이고 $f'(t)=0$에서 $t=\dfrac{6+\sqrt{6}}{3}$이며, $t=\dfrac{6+\sqrt{6}}{3}$의 좌우에서 $f'(t)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(t)$는 $t=\dfrac{6+\sqrt{6}}{3}$에서 극소이다.
$f(2)=4$이므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $y=f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $f(2)=4$이고 $t>2$에서 $f(t)=4$이면

$t^3-6t^2+10t=4$에서

$t^3-6t^2+10t-4=0$

$(t-2)(t^2-4t+2)=0$

$t>2$이므로 $t=2+\sqrt{2}$

그러므로 구간 $(0, a]$에서 함수 $f(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 양수 a의 값의 범위는

$2 \le a \le 2+\sqrt{2}$

따라서 $M=2+\sqrt{2}$, $m=2$이므로

$M+m=4+\sqrt{2}$

30) [정답] ②

[해설]

$f(x)=x^3-5x^2+2x+13$에서

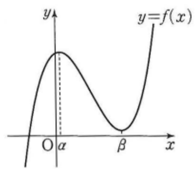
$f'(x)=3x^2-10x+2$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{19}}{3}$

이때 $\alpha=\dfrac{5-\sqrt{19}}{3}$, $\beta=\dfrac{5+\sqrt{19}}{3}$라 하고, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$k<\beta$, $k+2>\beta$일 때, $f(k)=f(k+2)$이면

$k^3-5k^2+2k+13=(k+2)^3-5(k+2)^2+2(k+2)+13$

$6k^2-8k-8=0$

$2(3k+2)(k-2)=0$

$\beta-2<k<\beta$이므로 $k=2$

(ⅰ) $t+1 \le \alpha$, 즉 $t \le \alpha-1$일 때,

$g(t)=f(t+1)$

(ⅱ) $t-1 \le \alpha \le t+1$, 즉 $\alpha-1 \le t \le \alpha+1$일 때,

$g(t)=f(\alpha)$

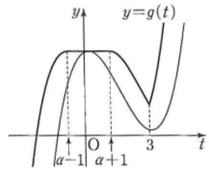
(ⅲ) $\alpha \le t-1 \le 2$, 즉 $\alpha+1 \le t \le 3$일 때,

$g(t)=f(t-1)$

(ⅳ) $t-1 \ge 2$, 즉 $t \ge 3$일 때,

$g(t)=f(t+1)$

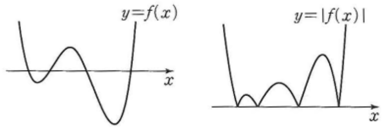
(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



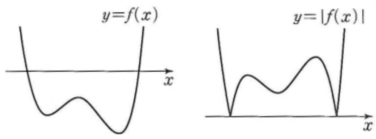
즉, 함수 $g(t)$는 $t=3$에서 미분가능하지 않으므로 $a=3t=2$일 때, $g(t)=f(t-1)$이므로
$g'(a-1)=g'(2)=f'(1)=3-10+2=-5$
$t=4$일 때, $g(t)=f(t+1)$이므로
$g'(a+1)=g'(4)=f'(5)=3\times5^2-10\times5+2=27$
따라서 $g'(a-1)+g'(a+1)=-5+27=22$

31) [정답] ⑤

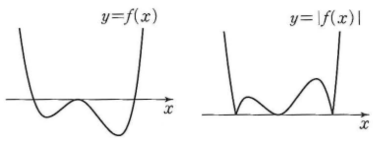
[해설]
삼차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2 이하이면 함수 $|f(x)|$가 서로 다른 세 점에서 극소일 수 없으므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
이때 함수 $f(x)$의 극솟값 중 양수인 것이 있으면
이 값이 함수 $|f(x)|$의 극솟값이기도 하므로
함수 $|f(x)|$의 극솟값이 모두 0이라는 조건을 만족시키지 않는다.
즉, 함수 $f(x)$의 극솟값은 모두 0보다 작거나 같아야 한다.
(ⅰ) 함수 $f(x)$의 극솟값이 모두 음수인 경우
㉠ 함수 $f(x)$의 극댓값이 양수이면 다음 그림과 같이 함수 $|f(x)|$가 극소인 서로 다른 x의 값이 4개이므로 조건을 만족시키지 않는다.



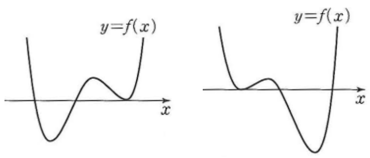
㉡ 함수 $f(x)$의 극댓값이 음수이면 다음 그림과 같이 함수 $|f(x)|$의 0이 아닌 극솟값이 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.



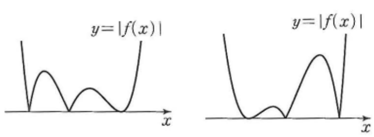
㉢ 함수 $f(x)$의 극댓값이 0이면 다음 그림과 같이 조건을 모두 만족시킨다.



(ⅱ) 함수 $f(x)$의 극솟값이 하나는 0이고 다른 하나는 음수인 경우
함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 두 가지 경우 중 하나이다.

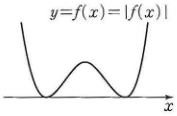


두 경우 모두 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 다음과 같으므로 조건을 모두 만족시킨다.



(ⅲ) 함수 $f(x)$의 극솟값이 모두 0인 경우
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 같다. 즉, 함수 $|f(x)|$가 극소인 서로 다른 x의 값이 2개이므로 조건을

만족시키지 않는다.



ㄱ. 조건을 만족시키는 (ⅰ)의 ㉢과 (ⅱ)의 경우
모두 함수 $|f(x)|$가 극대인 서로 다른 x의 값이 2개이다. (참)

ㄴ. 조건을 만족시키는 (ⅰ)의 ㉢과 (ⅱ)의 경우
모두 함수 $f(x)$의 극댓값은 0보다 크거나 같다. (참)

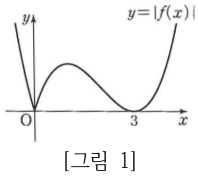
ㄷ. 조건을 만족시키는 (ⅰ)의 ㉢과 (ⅱ)의 경우
모두 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

32) [정답] ③

[해설]
함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a $(a>0)$이라 하면 조건 (가)에 의하여 $f(x)=ax(x-3)^2$ 또는 $f(x)=ax^2(x-3)$
으로 놓을 수 있다.
이때 조건 (나)를 만족시키려면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 m의 값이
$\frac{9}{2}$뿐이어야 한다.

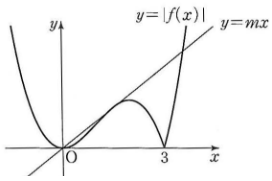
(ⅰ) $f(x)=ax(x-3)^2$인 경우
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

$f(x)=ax(x-3)^2=ax^3-6ax^2+9ax$에서
$f'(x)=3ax^2-12ax+9a$이고 $f'(0)=9a$이므로
함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=mx$는 $m=9a$일 때 서로 다른 두 점에서 만나고, $0<m<9a$일 때 서로 다른 세 점에서 만난다.
그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $f(x)=ax^2(x-3)$인 경우
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

[그림 2]와 같이 직선 $y=mx$가 제1사분면에서 함수 $y=-f(x)$의 그래프와 접할 때 m의 값을 m_1이라 하면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=mx$는 $m=m_1$일 때 서로 다른 세 점에서 만나고, $m>m_1$일 때 서로 다른 두 점에서, $0<m<m_1$일 때 서로 다른 네 점에서, $m\le 0$일 때 서로 다른 두 점에서 만나므로 조건 (나)를 만족시킨다. 이때 $m_1=\frac{9}{2}$이어야 한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$f(x)=ax^2(x-3)$ (단, a는 0보다 큰 상수)

로 놓을 수 있고, 직선 $y=\frac{9}{2}x$가 제1사분면에서 곡선 $y=-ax^2(x-3)$에 접해야 한다.

$y=-ax^2(x-3)=-ax^3+3ax^2$에서

$y'=-3ax^2+6ax$이므로 접점의 x좌표를 t $(t>0)$이라 하면

$-at^3+3at^2=\frac{9}{2}t$ …… ㉠

$-3at^2+6at=\frac{9}{2}$ …… ㉡

이어야 한다. $t>0$이므로 ㉠에서

$-at^2+3at=\frac{9}{2}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $-3at^2+6at=-at^2+3at$

$2at^2-3at=0$, $at(2t-3)=0$

$a\neq 0$, $t>0$이므로 $t=\frac{3}{2}$

이것을 ㉢에 대입하면

$-\frac{9}{4}a+\frac{9}{2}a=\frac{9}{2}$

$\frac{9}{4}a=\frac{9}{2}$, $a=2$

그러므로 $f(x)=2x^2(x-3)$이고

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에서 극대이므로

구하는 극댓값은 $|f(2)|=|2\times4\times(-1)|=8$

33) [정답] ④

[해설]

$y=2x^3-9x^2+12x+1$에서

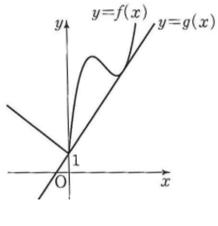
$y'=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$y'=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

$x\geq 0$에서 함수 $y=2x^3-9x^2+12x+1$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	1	↗	6	↘	5	↗

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



그림과 같이 직선 $y=g(x)$가 제1사분면에서

곡선 $y=f(x)$에 접할 때의 m의 값을 구해 보자.

접점의 x좌표를 t $(t>0)$이라 하면 $f(t)=g(t)$이므로

$2t^3-9t^2+12t+1=mt+1$ …… ㉠

$f'(t)=m$이므로

$6t^2-18t+12=m$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2t^3-9t^2+12t+1=6t^3-18t^2+12t+1$

$4t^3-9t^2=0$

$t^2(4t-9)=0$

$t>0$이므로 $t=\frac{9}{4}$

이때 ㉡에서

$m=6\times\frac{81}{16}-18\times\frac{9}{4}+12=\frac{15}{8}$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립하도록 하는 실수 m의 최댓값은 $\frac{15}{8}$이고,

최솟값은 직선 $y=1-x$의 기울기와 같은 -1이므로

구하는 합은

$\frac{15}{8}+(-1)=\frac{7}{8}$

34) [정답] ④

[해설]

$g(x)=f(x)-f'(x)$에서 $f(0)=g(0)=0$이므로 $f'(0)=0$이다.

그러므로 $f(x)=x^3+ax^2$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

이때

$g(x)=x^3+ax^2-3x^2-2ax$

$\quad=x^3+(a-3)x^2-2ax$

$\quad=x\{x^2+(a-3)x-2a\}$

이차방정식 $x^2+(a-3)x-2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-3)^2+8a=a^2+2a+9=(a+1)^2+8>0$

이므로 이차방정식 $x^2+(a-3)x-2a=0$은 서로 다른

두 실근을 갖는다.

이 두 실근을 α, β라 하자.

만약 $\alpha\beta=0$이면 $a=0$이고 이차방정식 $x^2-3x=0$의

두 실근은 0, 3이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $\alpha\beta\neq0$이고 조건을 만족시키려면 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이어야 한다. 즉, $-a+3>0$, $-2a>0$이어야 하므로 $a<0$이다.

이때 함수 $f(x)$의 모든 항의 계수가 정수이므로 $a\leq-1$이어야 한다. 따라서 $f(3)=27+9a\leq18$이므로

구하는 $f(3)$의 최댓값은 18이다.

35) [정답] 15

[해설]

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β ($\alpha<\beta$)라 하자.

또 함수 $|f(x)-2x|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f(x)-2x=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$, 즉 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+2x$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$\lim_{x\to0}\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x^2}=16$ …… ㉠

$x\to0$일 때 (분자)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 0}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 = \alpha^2\beta^2 = 0$에서 $\alpha = 0$ 또는 $\beta = 0$

(i) $\alpha = 0$일 때, ㉠에서

$$\lim_{x \to 0}\frac{x^2(x-\beta)^2}{x^2} = \lim_{x \to 0}(x-\beta)^2 = \beta^2 = 16$$

$\beta > 0$이므로 $\beta = 4$이고 $f(x) = x^2(x-4)^2 + 2x$

이때 $f(1) = 11 < 15$이므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

(ii) $\beta = 0$일 때, ㉠에서

$$\lim_{x \to 0}\frac{(x-\alpha)^2x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0}(x-\alpha)^2 = \alpha^2 = 16$$

$\alpha < 0$이므로 $\alpha = -4$이고 $f(x) = x^2(x+4)^2 + 2x$

이때 $f(1) = 27 > 15$이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서

$f(x) = x^2(x+4)^2 + 2x$

$\quad = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 2x$

$f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 32x + 2$

$f'(x) = 2$에서

$4x^3 + 24x^2 + 32x + 2 = 2$

$4x(x+4)(x+2) = 0$

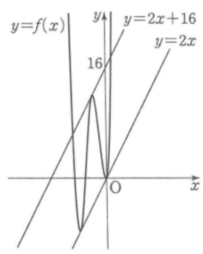
$x = -4$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 0$

$f(-2) = 12$이므로 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-2, 12)$에서의 접선의 방정식은 $y - 12 = 2(x+2)$, 즉 $y = 2x + 16$

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = 2x + k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는

$0 < k < 16$

따라서 정수 k는 $1, 2, 3, \cdots, 15$이고, 그 개수는 15이다.



36) [정답] 320

[해설]

방정식 $f(x) = 0$의 두 실근을 α, β $(\alpha < \beta)$라 하면

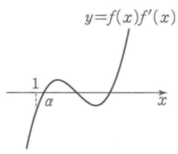
$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$, $f'(x) = 2x - \alpha - \beta$이므로

$f(x)f'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta)\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

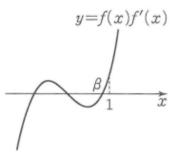
이때 $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$이다.

(i) $\alpha > 1$ 또는 $\beta < 1$일 때

함수 $y = f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

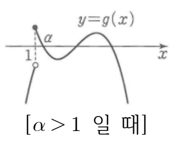


[$\alpha > 1$ 일 때]

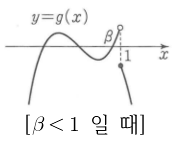


[$\beta < 1$ 일 때]

함수 $y = g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



[$\alpha > 1$ 일 때]

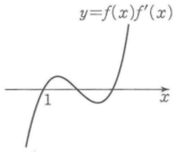


[$\beta < 1$ 일 때]

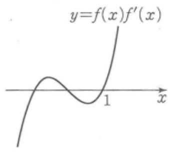
이때 함수 $g(x)$는 $x = 1$에서 불연속이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ⅱ) $\alpha=1$ 또는 $\beta=1$일 때

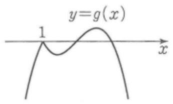
함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



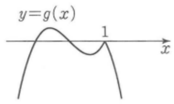
[$\alpha=1$ 일 때]



[$\beta=1$ 일 때]



[$\alpha=1$ 일 때]

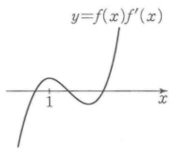


[$\beta=1$ 일 때]

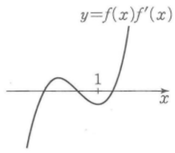
함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 (나)를 만족시키지만 $h(k)=2$이고 $\lim_{t\to k-}h(t)>\lim_{t\to k+}h(t)$를 만족시키는 실수 k가 존재하지 않으므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

(ⅲ) $\alpha<1<\frac{\alpha+\beta}{2}$ 또는 $\frac{\alpha+\beta}{2}<1<\beta$일 때

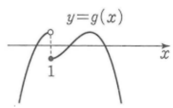
함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

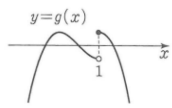


$\left[\alpha<1<\frac{\alpha+\beta}{2}\text{일 때}\right]$



$\left[\frac{\alpha+\beta}{2}<1<\beta\text{일 때}\right]$



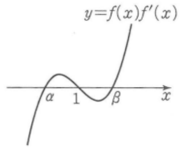


함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$\left[\alpha<1<\frac{\alpha+\beta}{2}\text{일 때}\right]$ $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}<1<\beta\text{일 때}\right]$

이때 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ⅳ) $\frac{\alpha+\beta}{2}=1$일 때 함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

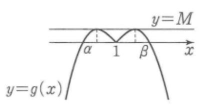


$i(x)=f(x+1)f'(x+1)$이라 하면

$i(x)=2x(x-\alpha+1)(x+\alpha-1)$이므로 $i(-x)=-i(x)$이다.

즉, 함수 $y=i(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $i(x)$의 극댓값을 M이라 하면 $i(x)$의 극솟값은 $-M$이다.

따라서 함수 $y=f(x)f'(x)$의 그래프는 점 $(1, 0)$에 대하여 대칭이고, 극댓값은 M, 극솟값은 $-M$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

또 $h(k)=2$이고 $\lim_{t \to -k} h(t) > \lim_{t \to k+} h(t)$를 만족시키는 실수 $k=M$이 존재하므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $\frac{\alpha+\beta}{2}=1$이므로 $f(x)=x^2-2x+a$

(a는 상수)로 놓을 수 있다.

$f'(x)=2(x-1)$이므로

$x<1$일 때 $g(x)=2(x-1)(x^2-2x+a)$

$g(-1)=2\times(-2)\times(3+a)=20$에서 $a=-8$이므로

$$g(x)=2(x-1)(x^2-2x-8) \\ =2(x+2)(x-1)(x-4)$$

한편, $x \geq 1$일 때 $g(x)=-2(x+2)(x-1)(x-4)$이므로

$$g(x)=\begin{cases} 2(x+2)(x-1)(x-4) & (x<1) \\ -2(x+2)(x-1)(x-4) & (x \geq 1) \end{cases}$$

따라서

$g(0)=2\times2\times(-1)\times(-4)=16$,

$g(3)=-2\times5\times2\times(-1)=20$

이므로

$$g(0)\times g(3)=16\times20 \\ =320$$

37) [정답] 109

[해설]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=k$에서 연속이어야 한다. 즉, $f(k)=\lim_{x \to k-} f(x)=\lim_{x \to k+} f(x)$이어야 하므로

$f(k)=k^3-3k+a=-k^2+13k+b$

이때

$$\lim_{x \to k-} \frac{f(x)-f(k)}{x-k}=\lim_{x \to k-} \frac{(x^3-3x+a)-(k^3-3k+a)}{x-k}$$
$$=\lim_{x \to k-} \frac{(x-k)(x^2+kx+k^2-3)}{x-k}$$
$$=\lim_{x \to k-} (x^2+kx+k^2-3)=3k^2-3$$

$$\lim_{x \to k+} \frac{f(x)-f(k)}{x-k}=\lim_{x \to k+} \frac{(-x^2+13x+b)-(-k^2+13k+b)}{x-k}$$
$$=\lim_{x \to k+} \frac{-(x-k)(x+k-13)}{x-k}$$
$$=\lim_{x \to k+} (-x-k+13)=-2k+13$$

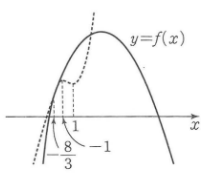
이고, 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하므로

$3k^2-3=-2k+13$, $3k^2+2k-16=0$, $(3k+8)(k-2)=0$

$k=-\frac{8}{3}$ 또는 $k=2$

이때 함수 $y=x^3-3x+a$에서 $y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

이므로 함수 $y=x^3-3x+a$는 $x=1$ 또는 $x=-1$에서 극값을 갖는데, $k=-\frac{8}{3}$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 [그림 1]과 같으므로 조건 (나)를 만족시킬 수 없다.



[그림 1]

즉, $k=2$이므로

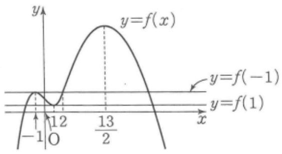
$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x+a & (x<2) \\ -x^2+13x+b & (x \geq 2) \end{cases}$$

이고, 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이어야 하므로 $2+a=22+b$

$a-b=20$ …… ㉠

한편, $f(-1)=f(2)<f\left(\frac{13}{2}\right)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는

[그림 2]와 같다. 즉, 방정식 $f(x)=c$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되는 경우는 $c=f(-1)$ 또는 $c=f(1)$인 경우이다.



[그림 2]

$f(-1)=2+a,\ f(1)=-2+a$이므로

$(2+a)+(-2+a)=8$에서 $a=4$

㉠에서 $b=a-20=-16$

즉, $f(x)=\begin{cases} x^3-3x+4 & (x<2) \\ -x^2+13x-16 & (x\geq 2)\end{cases}$

이고, 방정식 $f(x)=d$의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되는 경우는

$d=f\left(\frac{13}{2}\right)$인 경우이므로 구하는 실수 d의 값은

$d=f\left(\frac{13}{2}\right)=-\left(\frac{13}{2}\right)^2+13\times\frac{13}{2}-16=\frac{105}{4}$

따라서 $p=4,\ q=105$이므로 $p+q=4+105=109$

38) [정답] 45

[해설]

조건 (가)의 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=6$에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}f(x)=0$이고 $f(x)$는 다항함수이므로 $f(2)=0$

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)|\leq|xg(x)|$인 연속함수 $g(x)$가 존재하므로 $0\leq|f(0)|\leq|0\times g(0)|=0$에서 $f(0)=0$

따라서 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$를 $f(x)=x(x-2)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$6=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)(x^2+ax+b)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}x(x^2+ax+b)=2(4+2a+b)$

에서 $2a+b=-1$

$b=-1-2a$ …… ㉠

또한 $x\neq 0$일 때 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leq|g(x)|$에서 $-|g(x)|\leq\frac{f(x)}{x}\leq|g(x)|$함수의 극한의 대소관계에 의하여

$-\lim_{x\to 0}|g(x)|\leq\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\leq\lim_{x\to 0}|g(x)|$

이고 함수 $g(x)$는 연속함수이므로

$-|g(0)|\leq\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\leq|g(0)|$

$-6\leq f'(0)\leq 6$ …… ㉡

$f(x)=(x^2-2x)(x^2+ax+b)$에서

$f'(x)=(2x-2)(x^2+ax+b)+(x^2-2x)(2x+a)$이므로

$f'(0)=-2b$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $-6\leq-2b\leq 6,\ -3\leq b\leq 3$

㉠에서 $-3\leq-2a-1\leq 3,\ -2\leq a\leq 1$

$f(3)=3(9+3a+b)=3(9+3a-1-2a)=3(a+8)$
따라서 $f(3)=3(a+8)$은
$a=-2$일 때 최소이고 최솟값은 $3\times6=18$,
$a=1$일 때 최대이고 최댓값은 $3\times9=27$이므로 구하는 합은
$18+27=45$

39) [정답] 52

[해설]
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
(i) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2-}\frac{f'(x+2)-f'(x-2)}{x-2}$$

$g(2)=2\times f(2)$ …… ㉠
$x\to2-$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$
이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to2-}\{f'(x+2)-f'(x-2)\}=0$이고 $f'(x)$가 연속이므로
$f'(4)=f'(0)$
$3\times4^2+2\times a\times4+b=b$에서
$a=-6$
또한 $f'(x)=3x^2-12x+b$에서
$f'(x+2)-f'(x-2)$
$=3(x+2)^2-12(x+2)+b-3(x-2)^2+12(x-2)-b$
$=3x^2+12x+12-12x-24-3x^2+12x-12+12x-24$
$=24(x-2)$
이므로

$$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2-}\frac{24(x-2)}{x-2}=24$$

$f(x)=x^3-6x^2+bx+c$에서 $f(2)=2b+c-16$
㉠에 의하여 $2(2b+c-16)=24$
$2b+c=28$ …… ㉡
(ii) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로 $x<2$일 때, $g(x)=24$이고 $g'(x)=0$

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=0 \quad \cdots\cdots ㉢$$

$x\geq2$일 때, $g(x)=xf(x)$이고

$$\lim_{x\to2+}\frac{xf(x)-2f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)f(x)+2\{f(x)-f(2)\}}{x-2}$$

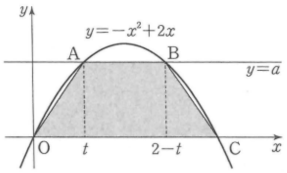
$$=\lim_{x\to2+}f(x)+2\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=f(2)+2f'(2) \quad \cdots\cdots ㉣$$

이때 $f'(2)=12-24+b=b-12$이고 ㉡에서 $f(2)=12$이므로
$f(2)+2f'(2)=12+2(b-12)=2b-12$
$g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 ㉢=㉣
$2b-12=0$에서 $b=6$
$b=6$을 ㉡에 대입하면
$12+c=28$에서 $c=16$
(i), (ii)에 의하여 $f(x)=x^3-6x^2+6x+16$이므로 $f(6)=6^3-6\times6^2+6\times6+16=52$

40) [정답] 32

[해설]



점 C의 좌표는 $(2, 0)$이고, 곡선 $y=-x^2+2x$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

점 A의 x좌표를 t $(0<t<1)$이라 하면 점 B의 x좌표는 $2-t$이다.

점 A의 y좌표가 $-t^2+2t$이므로 사각형 OCBA의 넓이를 $f(t)$라 하면

$f(t)=\frac{1}{2}\times\{2+(2-2t)\}\times(-t^2+2t)=t(t-2)^2=t(t^2-4t+4)f'(t)=(t-2)^2+2t(t-2)=(t-2)(3t-2)0<t<1$이므로 $f'(t)=0$에서 $t=\frac{2}{3}$

이때 $f(t)$는 $t=\frac{2}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값 S는

$S=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}-2\right)^2=\frac{2}{3}\times\frac{16}{9}=\frac{32}{27}$

따라서 $27S=32$

41) [정답] 426

[해설]

$f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$에서

$f'(x)=3x^2+6x-3(t^2-1)$

$=3x^2+6x-3(t+1)(t-1)$

$=3\{x-(t-1)\}\{x+(t+1)\}$

$f'(x)=0$에서 $x=t-1$ 또는 $x=-t-1$

$t>0$이므로 $-t-1<-1<t-1$이고, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-t-1$	$\cdots$	$t-1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(t-1)=(t-1)^3+3(t-1)^2-3(t^2-1)(t-1)+2t^3-3t^2+1$

$=(t-1)^3+3(t-1)^2-3(t-1)^2(t+1)+(t-1)^2(2t+1)$

$=(t-1)^2\{(t-1)+3-3(t+1)+(2t+1)\}=0$

$f(-1)=-1+3+3(t^2-1)+2t^3-3t^2+1$

$=2t^3$

$f(2)=8+12-6(t^2-1)+2t^3-3t^2+1$

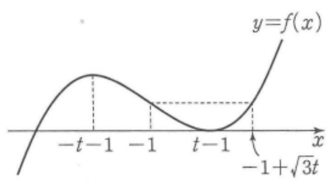
$=2t^3-9t^2+27$

$f(x)=f(-1)$에서

$f(x)-2t^3=(x+1)(x^2+2x+1-3t^2)=0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}t$

에서 $f(-1)=f(-1+\sqrt{3}t)=2t^3$



이때 $-1+\sqrt{3}t \ge 2$, 즉 $t \ge \sqrt{3}$이면 $g(t)=f(-1)=2t^3$

$0<t<\sqrt{3}$이면 $g(t)=f(2)=2t^3-9t^2+27$

한편, $t-1 \ge 2$, 즉 $t \ge 3$이면 $h(t)=f(2)=2t^3-9t^2+27$

$0<t<3$이면 $h(t)=f(t-1)=0$

그러므로 두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases} 2t^3-9t^2+27 & (0<t<\sqrt{3}) \\ 2t^3 & (t \ge \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$h(t)=\begin{cases} 0 & (0<t<3) \\ 2t^3-9t^2+27 & (t \ge 3) \end{cases}$$

이때 함수 $g(t)$는 $t=\sqrt{3}$에서 미분가능하지 않으므로 $a=\sqrt{3}$이다.

$g(2a)=g(2\sqrt{3})=2\times(2\sqrt{3})^3$

$=48\sqrt{3}$

$h(3a)=h(3\sqrt{3})=2(3\sqrt{3})^3-9(3\sqrt{3})^2+27$

$=162\sqrt{3}-216$

따라서

$g(2a)+h(3a)=48\sqrt{3}+(162\sqrt{3}-216)$

$=210\sqrt{3}-216$

즉, $p=210$, $q=-216$이므로

$p-q=210-(-216)=426$

42) [정답] ③

[해설]

$f(x)=\int(5x-k)dx-\int(x+k)dx$

$=\int\{(5x-k)-(x+k)\}dx$

$=\int(4x-2k)dx=2x^2-2kx+C$ (C는 적분상수)

에서 $f'(x)=4x-2k$

$f'(1)=2$에서 $4-2k=2$이므로 $k=1$

$f(1)=0$에서 $2-2k+C=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=2x^2-2x$이므로

$f(2)=8-4=4$

43) [정답] ①

[해설]

$\int_0^3(x^2+x|1-x|)dx$

$=\int_0^1(x^2+x|1-x|)dx+\int_1^3(x^2+x|1-x|)dx$

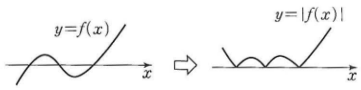
$=\int_0^1\{x^2+x(1-x)\}dx+\int_1^3\{x^2-x(1-x)\}dx$

$=\int_0^1 xdx+\int_1^3(2x^2-x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$

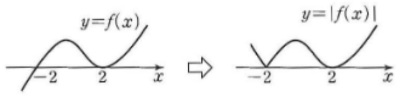
$=\frac{1}{2}+\frac{40}{3}=\frac{83}{6}$

44) [정답] 80

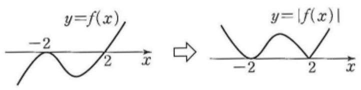
[해설]
실수 a의 값에 따라 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.
(ⅰ) $a\neq -2$이고 $a\neq 2$일 때



$f(x)=(x-2)(x+2)(x+a)$이므로 함수 $y=|f(x)|$는 세 개의 x의 값에서 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $a=-2$일 때



$f(x)=(x-2)^2(x+2)$이므로 함수 $y=|f(x)|$는 $x=-2$에서만 미분가능하지 않다.
즉, 음수인 한 개의 x의 값에서만 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ⅲ) $a=2$일 때



$f(x)=(x-2)(x+2)^2$이므로 함수 $y=|f(x)|$는 $x=2$에서만 미분가능하지 않다.
즉, 양수인 한 개의 x의 값에서만 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시킨다.
따라서 $a=2$이고, $f(x)=(x-2)(x+2)^2$이므로

$$\int_0^{2a} f'(x)dx=\int_0^4 f'(x)dx=\Big[(x-2)(x+2)^2\Big]_0^4$$
$$=72-(-8)=80$$

45) [정답] ①

[해설]
$$\int_{-1}^1 f(x)dx=2\int_0^1 ax^2dx=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}a$$
$$\int_{-1}^1 xf(x)dx=2\int_0^1 (x^4+bx^2)dx=2\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{b}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}b$$
이므로 조건 (가)에서
$$4\int_{-1}^1 f(x)dx+5\int_{-1}^1 xf(x)dx=4\times\frac{2}{3}a+5\times\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}b\right)=0$$
$4a+5b+3=0$ …… ㉠
$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 조건 (나)에서
$f'(1)=3+2a+b=0$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$
따라서 $f(x)=x^3-2x^2+x$이므로
$f(3)=27-18+3=12$

46) [정답] ④

[해설]

$f(x)= \int_0^x (3t^2-4)dt = \left[t^3-4t\right]_0^x$

$\quad = x^3-4x = x(x+2)(x-2)$

이때 $g'(x)=0$이면 $f(x)=0$이므로 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$이고, 함수 $g(x)$는 사차함수이므로 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$g(x) = \int (x^3-4x)dx = \frac{1}{4}x^4-2x^2+C$($C$는 적분상수)에서 $g(2)=0$이므로 $C=4$

따라서 함수 $g(x)$의 극댓값은 $g(0)=4$

47) [정답] ③

[해설]

$f(x)= x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

주어진 조건에서 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극솟값 3을 가지므로

$g(0)= \int_0^0 f'(t)dt+(0+1)f(0)+1 = f(0)+1=3$

즉, $f(0)=2$이므로 $c=2$

$g'(x)=f'(x)+f(x)+(x+1)f'(x)$에서

$g'(0)=f'(0)+f(0)+(0+1)f'(0)=2f'(0)+2=0$

이므로 $f'(0)= -1$

즉, $b= -1$

주어진 조건에서 $g(1)=8$이고 $f(x)= x^3+ax^2-x+2$이므로

$g(1)= \int_0^1 f'(t)dt+(1+1)f(1)+1$

$\quad = \left[f(t)\right]_0^1+2f(1)+1$

$\quad = f(1)-f(0)+2f(1)+1$

$\quad = 3f(1)-1$

$\quad = 3(1+a-1+2)-1$

$\quad = 3a+5=8$

에서 $a=1$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-x+2$이므로

$f(-1)= -1+1+1+2=3$

48) [정답] ③

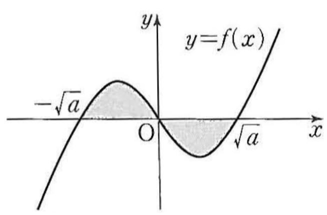
[해설]

함수 $f(x)=x^3-ax$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $x^3-ax=0$에서 a가 양수이므로

$x(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})=0$

$x=0$ 또는 $x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$

함수 $f(x)=x^3-ax$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}|x^3-ax|dx=2\int_{-\sqrt{a}}^{0}(x^3-ax)dx=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{2}x^2\right]_{-\sqrt{a}}^{0}$$
$$=2\left(-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a^2\right)=\frac{1}{2}a^2=18$$

$a^2=36$

$a>0$이므로 $a=6$

따라서 $f(x)=x^3-6x$이므로 $f(-1)=5$

49) [정답] ③

[해설]

$f(x)=x^3-2x^2+k$에서 $f'(x)=3x^2-4x$이므로

$f'(x)=0$에서 $x(3x-4)=0$

$x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

즉, $x=0$에서 극댓값을 가지므로 곡선 $y=x^3-2x^2+k$ 위의 점 $(0,\ k)$에서의 접선의 방정식은 $y=k$이다.

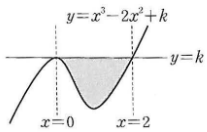
곡선 $y=x^3-2x^2+k$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표는

$x^3-2x^2+k=k$에서 $x^3-2x^2=0$이므로

$x^2(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서 곡선 $y=x^3-2x^2+k$와 직선 $y=k$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^2|k-(x^3-2x^2+k)|dx$$
$$=\int_0^2(-x^3+2x^2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=\frac{4}{3}$$

50) [정답] 40

[해설]

조건 (나)에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}\{f(x)-1\}=0$에서 $f(0)=1$

이때 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=-1$

이므로 $a=-1$

즉, $f'(x)=3x^2-2x-1$에서

$f(x)=x^3-x^2-x+C$(C는 적분상수)이고, $f(0)=1$이므로 $C=1$

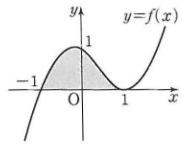
따라서 $f(x)=x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$이므로 함수

$y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx+\int_{-1}^{1}(x^3-x)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx+0$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}=\frac{4}{3}$$



따라서 $30S=30\times\frac{4}{3}=40$

51) [정답] ④

[해설]

조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)=f(0)$

에서 $b=3$

조건 (나)에서 $x=0$일 때, $f(-3)=f(3)$이고

$f(-3)=\lim_{x\to -3+}f(x)=0$이므로

$0=9+3a+b$

$b=3$이므로 $a=-4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x+3 & (-3<x<0)\\ x^2-4x+3 & (0\le x\le 3)\end{cases}$이고

$f(x-3)=f(x+3)$에서 $f(x)=f(x+6)$

즉, $f(x)$는 주기가 6인 주기함수이므로

$\int_{-33}^{-29}f(x)dx=\int_{-3}^{1}f(x)dx$

$\int_{57}^{60}f(x)dx=\int_{-3}^{0}f(x)dx$

따라서

$$\begin{aligned}\int_{-33}^{-29}f(x)dx-\int_{57}^{60}f(x)dx&=\int_{-3}^{1}f(x)dx-\int_{-3}^{0}f(x)dx\\&=\int_{0}^{1}f(x)dx\\&=\int_{0}^{1}(x^2-4x+3)dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_{0}^{1}\\&=\frac{1}{3}-2+3=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

52) [정답] 12

[해설]

함수 $f(x)=-x^3+ax^2-3ax+10$의 도함수는

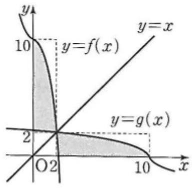
$f'(x)=-3x^2+2ax-3a$

이때 삼차함수 $f(x)=-x^3+ax^2-3ax+10$의 역함수가 존재하려면 극값을 갖지 않아야 한다. 즉, 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖지 않아야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9a=a(a-9)\le 0$

$0\le a\le 9$

따라서 a의 최솟값은 0이므로 $f(x)=-x^3+10$이고, 그 역함수인 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서

$$\int_{2}^{10} g(x)dx = \int_{0}^{2} f(x)dx - 2\times 2 = \int_{0}^{2}(-x^3+10)dx - 4$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 10x\right]_0^2 - 4 = 16 - 4 = 12$$

53) [정답] ⑤

[해설]

시각 $t=1$에서의 점 P의 위치가 -5이므로

$$0 + \int_0^1 v(t)dt = \int_0^1 (3t^2-4t+k)dt = \left[t^3-2t^2+kt\right]_0^1$$

$$= k-1 = -5$$

에서 $k=-4$

즉, $v(t)=3t^2-4t-4$

점 P가 움직이는 방향이 바뀔 때 속도 $v(t)=0$이므로

$3t^2-4t-4=0$에서 $(3t+2)(t-2)=0$

$t>0$이므로 $t=2$

$0<t<2$일 때 $v(t)<0$이고 $t>2$일 때 $v(t)>0$이므로

시각 $t=2$일 때 점 P가 움직이는 방향을 바꾼다.

따라서 시각 $t=0$에서 시각 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v(t)|dt = \int_0^2 |3t^2-4t-4|dt = \int_0^2(-3t^2+4t+4)dt$$

$$= \left[-t^3+2t^2+4t\right]_0^2 = 8$$

54) [정답] 63

[해설]

두 점 P, Q가 동시에 원점을 출발한 후 다시 만나는 위치 x가 $x=k$일 때의 시각을 $t=a$ $(a>0)$이라 하면

$$0 + \int_0^a v_1 dt = 0 + \int_0^a v_2 dt$$

$$\int_0^a (3t^2+t)dt = \int_0^a (2t^2+3t)dt$$

$$\left[t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^a = \left[\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^a$$

$$a^3+\frac{1}{2}a^2 = \frac{2}{3}a^3+\frac{3}{2}a^2$$

$$\frac{1}{3}a^3 - a^2 = \frac{1}{3}a^2(a-3) = 0$$

$a>0$이므로 $a=3$

따라서 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치 (또는 점 Q의 위치) $x=k$에서

$k = 3^3 + \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{63}{2}$이므로

$2k = 2 \times \frac{63}{2} = 63$

55) [정답] ②

[해설]

$f(x) = 3x^2 + ax - (2x-1)\int_0^1 f(t)dt$이고

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \times \frac{1}{4} + a \times \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$에서 $a = 2$

$\int_0^1 f(t)dt = k$ (k는 상수)라 하면 $f(x) = 3x^2 + 2x - (2x-1)k$

$f(x) = 3x^2 + 2(1-k)x + k$이고

$\int_0^1 \{3x^2 + 2(1-k)x + k\}dx = k$

이때

$$\int_0^1 \{3x^2 + 2(1-k)x + k\}dx = \left[x^3 + (1-k)x^2 + kx\right]_0^1$$

$$= 1 + (1-k) + k = 2$$

이므로 $k = 2$

따라서 $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$이므로

$f(2) = 3 \times 4 - 2 \times 2 + 2 = 10$

56) [정답] ③

[해설]

시각 $t = 1$에서 $t = 3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^3 v(t)dt = \int_1^3 (2t^2 + at + 2)dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{a}{2}t^2 + 2t\right]_1^3$$

$$= \left(18 + \frac{9}{2}a + 6\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{a}{2} + 2\right) = 4a + \frac{64}{3}$$

이므로 $4a + \frac{64}{3} = \frac{100}{3}$에서 $4a = 12$

따라서 $a = 3$

57) [정답] ④

[해설]

$f(0) = 5$이므로

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 5$ (a, b, c는 상수이고 $a \neq 0$)이라 하면

$$g(x) = \int_{-x}^{x} f(t)dt = \int_{-x}^{x} (at^3 + bt^2 + ct + 5)dt$$

$$= 2\int_0^x (bt^2 + 5)dt = 2\left[\frac{b}{3}t^3 + 5t\right]_0^x = \frac{2b}{3}x^3 + 10x$$

$g(1) = 12$이므로

$\frac{2b}{3} + 10 = 12$, $b = 3$

따라서 $g(x) = 2x^3 + 10x$이므로

$$\int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 (2x^3+10x)dx = \left[\frac{1}{2}x^4 + 5x^2\right]_0^2 = 8 + 20 = 28$$

58) [정답] ①

[해설]

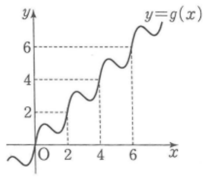
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면 방정식 $f(x) - x = 0$의 세 실근이 0, 1, 2이므로

$f(x) - x = ax(x-1)(x-2)(a>0)$

으로 놓을 수 있다.

즉, $f(x) = ax(x-1)(x-2) + x$이고, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$이다.

한편, 함수 $g(x)$는 $0 \le x \le 2$일 때 $g(x) = f(x)$이고, 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2) = g(x) + 2$를 만족시키므로 함수 $y = g(x)$의 그래프는 그림과 같이 생각할 수 있다.



이때

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx &= \int_0^2 \{ax(x-1)(x-2)+x\}dx \\ &= \int_0^2 \{ax^3 - 3ax^2 + (2a+1)x\}dx \\ &= \left[\frac{a}{4}x^4 - ax^3 + \frac{2a+1}{2}x^2\right]_0^2 \\ &= 4a - 8a + 4a + 2 = 2\end{aligned}$$

이고, 자연수 k에 대하여

$$\begin{aligned}\int_{2k-2}^{2k} g(x)dx &= 2 \times (2k-2) + \int_0^2 g(x)dx = (4k-4) + \int_0^2 f(x)dx \\ &= (4k-4) + 2 = 4k-2\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{2n} g(x)dx &= \int_0^2 g(x)dx + \int_2^4 g(x)dx + \cdots + \int_{2n-2}^{2n} g(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^{n}(4k-2) = 4 \times \frac{n(n+1)}{2} - 2n = 2n^2\end{aligned}$$

따라서 $2n^2 = 72$에서 $n^2 = 36$$n$은 자연수이므로 $n = 6$

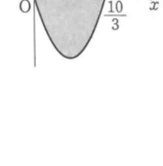
59) 59) [정답] 581

[해설]

$\int_0^1 f(t)dt = k$ (k는 상수)로 놓으면 $f(x) = x^2 + (k-2)x$이고

$$\int_0^1 \{t^2 + (k-2)t\}dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{k-2}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{k-2}{2} = \frac{k}{2} - \frac{2}{3}$$

이므로 $\frac{k}{2} - \frac{2}{3} = k$에서 $k = -\frac{4}{3}$



즉, $f(x) = x^2 - \frac{10}{3}x$이고 함수 $y = f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

따라서 곡선 $y = f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{10}{3}} |f(x)|dx = \int_0^{\frac{10}{3}} \{-f(x)\}dx$$

$$= \int_0^{\frac{10}{3}} \left(-x^2 + \frac{10}{3}x\right)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2\right]_0^{\frac{10}{3}} = -\frac{1000}{81} + \frac{500}{27} = \frac{500}{81}$$

즉, $p=81$, $q=500$이므로 $p+q=81+500=581$

60) [정답] ⑤

[해설]

$2\int_p^x f(t)dt - \int_p^x \{f'(t)\}^2 dt = 2-3x$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=p$를 대입하면

$0=2-3p$, $p=\frac{2}{3}$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)-\{f'(x)\}^2 = -3$ …… ㉡

$f'(1) = -2$에서 $f(x)$는 상수함수가 아니므로

$f(x)$의 차수를 n $(n \geq 1)$이라 하면 $f'(x)$의 차수는 $n-1$, $\{f'(x)\}^2$의 차수는 $2(n-1)$이다.

㉡의 양변의 차수를 비교하면 $n=2(n-1)$에서 $n=2$

$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a, b, c$는 상수, $a \neq 0)$이라 하면

$f'(x)=2ax+b$ …… ㉢

이므로 ㉡에서 $2(ax^2+bx+c)-(2ax+b)^2 = -3$

$(2a-4a^2)x^2+(2b-4ab)x+2c-b^2 = -3$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a-4a^2=0$, $2b-4ab=0$, $2c-b^2 = -3$ …… ㉣

에서 $a=\frac{1}{2}$

$f'(1) = -2$이므로 ㉢에서

$f'(1)=2a+b=1+b=-2$

$b=-3$

㉣에서 $2c-(-3)^2=-3$

$c=3$

이므로 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+3$이고 $f(2)=2-6+3=-1$

따라서 $p+f(2)=\frac{2}{3}+(-1)=-\frac{1}{3}$