기대N제

수학 2

해설

빠른 정답

Day 1						맞은 개수
1번	2	4번	21	7번	⑤	
2번	①	5번	24	8번	⑤	/ 9
3번	③	6번	⑤	9번	51	

기대T 2024학년도 현장수업/온라인 라이브 수업 안내

	수리논술 정규반 및 학교별 Final	수능수학
3월	정규반 시즌1	실전개념 + 기출 기본4점 ~ 쉬운 준킬러 최근 기출에 최적화된 수능실전개념 확립
4월	정규반 시즌2	
5월		기출 준킬러 + N제 준킬러 수능 최적화에 필요한 다양한 문제접근법을 연마
6월	정규반 시즌3	
7월		기출+N제 준킬러&킬러 + 기출 Final 액기스 현수능 최대 주적 ‘낯섦’에 대처하는 최종단계
8월	Semi FInal	
9월		실전모의고사 Final 오직 고득점만을 위한 모든 도구들을 최종정리
10월	수능전 Final (연세, 시립, 홍익)	
11월	수능 후 Final (대다수 학교)	
출강	오르비학원, 대치 명인학원	오르비학원, 이투스
	오르비학원에서는 수리논술/수능수학 모두 현장강의 뿐만 아니라 온라인수업으로도 수강 가능합니다.	
좀 더 자세한 수업설명 및 커리큘럼은 아래 QR코드를 통해 확인할 수 있습니다.		
QR Code		
링크	orbi.kr/profile/416016	

Day 1

1-1

점 P의 가속도를 $a(t)$라 하면, $a(t) = 6t - 6$이다.
$t = 1$에서 $a(t) = 0$ 이므로, $a = 1$이다.
한편, 점 P가 출발하여 $t = 1$까지 이동한 거리는
$\int_0^1 |v(t)|dt$ 이다.
$\int_0^1 |v(t)|dt = -\int_0^1 (3t^2 - 6t)dt = -\left[t^3 - 3t^2\right]_0^1 = 2$
이므로, 정답은 2이다.

1-2

$f'(x) = 3x^2 - 2kx - 2k = -2k$에서
$3x^2 - 2kx = 0 \Rightarrow x = 0$ 또는 $x = \frac{2k}{3}$
$f(0) = 0$이므로 곡선 위의 점 $(0,\ f(0))$에서 그은 접선의 방정식은 $y = -2kx$
$f\left(\frac{2k}{3}\right) = -\frac{4k^3}{27} - \frac{4k^2}{3}$이므로
곡선 위의 점 $\left(\frac{2k}{3},\ f\left(\frac{2k}{3}\right)\right)$에서 그은 접선의 방정식은
$y = -2kx - \frac{4k^3}{27}$
두 접선 사이의 거리는 직선 $y = -2kx - \frac{4k^3}{27}$와
원점 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{\left|\frac{4k^3}{27}\right|}{\sqrt{(2k)^2+1}} = \frac{k^2}{27}$$

$\Rightarrow \frac{4k^3}{27} = \frac{k^2}{27}\sqrt{4k^2+1}$ $(\because\ k > 0)$
$\Rightarrow 4k = \sqrt{4k^2+1},\ 16k^2 = 4k^2 + 1$
$\Rightarrow 12k^2 = 1 \quad \therefore\ k = \frac{\sqrt{3}}{6}$ $(\because\ k > 0)$

1-3

$2f(x) + f(1-x) = x^2 + ax \ \cdots$ ①
가 모든 실수 x에 대하여 성립하므로
양변에 x 대신 $1-x$를 대입하면

$$\begin{aligned} 2f(1-x) + f(x) &= (1-x)^2 + a(1-x) \\ &= x^2 - (a+2)x + a + 1 \ \cdots ② \end{aligned}$$

①, ②를 연립하여 풀면
$4f(x) + 2f(1-x) = 2x^2 + 2ax$
$f(x) + 2f(1-x) = x^2 - (a+2)x + a + 1$
에서
$3f(x) = x^2 + (3a+2)x - a - 1$
$\therefore\ f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \left(a + \frac{2}{3}\right)x - \frac{a+1}{3}$

따라서

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x)dx &= \int_0^3 \left\{\frac{1}{3}x^2 + \left(a+\frac{2}{3}\right)x - \frac{a+1}{3}\right\}dx \\ &= \left[\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{3}\right)x^2 - \frac{a+1}{3}x\right]_0^3 \\ &= 3 + \frac{9}{2}a + 3 - (a+1) = \frac{7}{2}a + 5 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{7}{2}a + 5 = \frac{1}{2}a + 6$ 이므로 $a = \frac{1}{3}$

(다른 풀이)
함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 c $(c \neq 0)$인 n차함수라 하면
$2f(x) = 2cx^n + \cdots$
$f(1-x) = c(1-x)^n + \cdots$
이므로 n의 홀짝에 관계없이 함수
$2f(x) + f(1-x)$는 n차함수이다.
따라서 $2f(x) + f(1-x) = x^2 + ax$
에서 $n = 2$이다.
또한 양변의 최고차항의 계수끼리 비교하면
$3c = 1$이므로 $c = \frac{1}{3}$이다.

$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + px + q$라 하면

$$\begin{aligned} f(1-x) &= \frac{1}{3}(1-x)^2 + p(1-x) + q \\ &= \frac{1}{3}x^2 - \left(p + \frac{2}{3}\right)x + \frac{1}{3} + p + q \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} 2f(x) + f(1-x) &= x^2 + \left(p - \frac{2}{3}\right)x + \frac{1}{3} + p + 3q \\ &= x^2 + ax \end{aligned}$$

계수끼리 비교하면

$p-\frac{2}{3}=a \Rightarrow p=a+\frac{2}{3}$

$\frac{1}{3}+p+3q=0 \Rightarrow q=-\frac{1}{3}(a+1)$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{3}x^2+\left(a+\frac{2}{3}\right)x-\frac{a+1}{3}$

이후 계산은 본 풀이와 같다.

1-4

$x-1$의 부호에 따라 부등식을 풀어주면

$x \geq 1$일 때, $\int_0^x f(t)dt$ ($=g(x)$라 하겠다.)가 0 이상,

즉 $g(x) \geq 0$이고, $x<1$일 때는 $g(x) \leq 0$이다.

또한 $f(x)$가 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로
$g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수임을 알 수 있다.

참고로, $g(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$이다.

위의 조건을 종합하면, $x<1$일 때 $g(x) \leq 0$이어야
하는데 $g(0)=0$이다. 즉, 원점에서 x축과 접해서,
$g(x)$가 $x=0$에서 함숫값의 부호변화가 없는 상황이
되어야겠단 생각을 할 수 있다.

또, $x=1$을 경계로 $g(x)$의 부호가 바뀌므로
$g(1)=0$임을 알 수 있다.

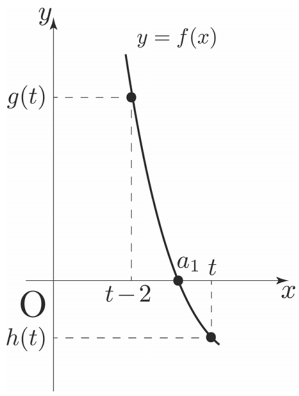
이로부터 $g(x)=x^2(x-1)$임을 알 수 있다.

$\int_0^x f(t)dt=x^2(x-1)$을 양변 미분하면

$f(x)=2x(x-1)+x^2$이고, 따라서
$f(3)=12+9=21$이다.

1-5

$g(t) \times h(t) = 0$ 이므로 $f(x) = 0$인 $x = a$가 반드시 존재한다. 이러한 a의 값 중 제일 작은 값을 a_1이라 하자.
$t = a_1$일 때 구간 오른쪽 끝에서 $f(a) = 0$이 되면서 $g(t) \times h(t) = 0$를 순간적으로 만족시키는데, 만약 a_1이 방정식 $f(x) = 0$의 중근이 아닌 단일근이면,
$t = {a_1}^+$ (즉, t가 a_1보다 아주 약간 큰 수) 일 때 $g(t) \times h(t) < 0$이 된다.



따라서 문제의 조건인 $3 \le t \le 7$ 처럼 연속된 t의 해집합을 가질 수 없게 된다. ($t = a_1$에서 잠깐 문제의 조건을 만족했다가 다시 불만족시키므로)
이는 모순이므로, 함수 $f(x)$는 $f(x) = 0$인 $x = a_1$에서 극솟점의 형태를 띠는 중근을 가져야한다.

마찬가지 논리로 방정식 $f(x) = 0$의 또 다른 $x = a_2$ 역시 단일근이 아닌 중근이어야 함을 알 수 있다.

해집합의 첫 원소가 $t = 3$이므로, 구간 $[1, 3]$ 일 때 $f(x) = 0$을 만족시키는 x가 최초로 등장해야한다. 따라서 $f(x) = (x-3)^2(x-b)^2$ (단, $3 < b$) 꼴임을 알 수 있다.
또한 $t = 7$이 t의 해집합의 마지막 원소이므로 $b = 5$ 이다.
($b > 5$면 3과 b의 간격이 구간 $[t-2, t]$의 간격인 2보다 커지게 돼서 '모든 t의 범위가 하나의 연속된 구간 : $3 \le t \le 7$' 조건에 모순이 된다. 예를 들어, $b = 6$일 때 $g(t) \times h(t) = 0$ 이 되도록 하는 모든 t의 범위는 $3 \le t \le 5$ or $6 \le t \le 8$이다.)

따라서
$f(x) = (x-3)^2(x-5)^2$,
$f'(x) = 4(x-3)(x-4)(x-5)$
에서 $f'(6) = 24$이다.

1-6

(i) $f(x) = 0$의 서로 다른 실근이 오직 하나일 때, 그 실근의 값을 $x = k_1$ 이라 하자. 조건 (나)에 의하면 $g(x) = k_1$의 서로 다른 실근의 합은 15여야 하는데, 합의 최댓값이 $5 \times 2 = 10$ 이므로 모순이다.

(ii) $f(x) = 0$의 서로 다른 실근이 둘일 때, 그 실근의 값을 각각 $x = k_2, k_3$ (단, $k_2 < k_3$) 라 하자. 조건 (나)에 의하면 서로 다른 실근의 합은 15, 즉 $5 + 10$여야 하므로 $g(x) = k_2$는 중근 $x = 5$를 근으로 갖고, $g(x) = k_3$는 합이 10인 서로 다른 두 실근을 갖는 상황이어야 한다.
이때 $k_2 = g(5) = -1$이고 k_3는 -1보다 크기만 하면 된다.
가능한 $f(x)$의 식은
$(x+1)^2(x-k_3)$ or $(x+1)(x-k_3)^2$ 이다

(iii) $f(x) = 0$의 서로 다른 실근이 셋일 때, 그 실근의 값을 각각 $x = k_4, k_5, k_6$ (단, $k_4 < k_5 < k_6$)이라 하자.
(ii)와 마찬가지 이유로 $k_5 = g(5) = -1$, $k_4 < -1 < k_6$ 이면 된다.

가능한 $f(x)$의 식은 $(x-k_4)(x+1)(x-k_6)$ 이다.
(참고로, 이 때 $f'(-1) < 0$임을 확인해두자.)

우선 (ii), (iii) 의 케이스가 가능함을 알고서 (다) 조건을 해석해보자.

$f(x) = (x+1)^2(x-k_3)$인 경우, 극댓값이 0이므로 (가) 조건에 의하면 극솟값은 -4이다.
이 조건을 이용하여 k_3를 구하면 2이다.
이 경우 $f'(x) = 0$의 해가 $x = -1, 1$일 때인데, $g(x) = 1$인 경우 해가 자연수가 아니므로 (다) 조건에 모순이다.

$f(x) = (x+1)(x-k_3)^2$인 경우, 극솟값이 0이므로 (가) 조건에 의하면 극댓값은 4이다.
이 조건을 이용하여 k_3를 구하면 마찬가지로 2이다.
이 경우 $f'(x) = 0$의 해가 $x = 0, 2$일 때인데, $g(x) = 2$인 경우 해가 자연수가 아니므로 (다) 조건에 모순이다.

따라서 가능한 케이스는 (iii) 뿐이고, 그 중에서도 (다) 조건을 만족시키려면 $f'(0) = 0$이어야 한다.

(cf. $g(x)=k$가 자연수 해 만을 갖는 케이스는 $g(x)=0$ 뿐만 아니라 $g(x)=3,\ 8,\ 15$가 있지만, $f'(3)=0,\ f'(8)=0,\ f'(15)=0$인 케이스일 땐 $f'(-1)<0$일 수 없다. 극대x좌표와 극소x좌표의 간격이 (가) 조건에 의하여 2 차이가 나야 해서.)

이 모든 조건을 만족시키는 $f(x)$는
$f(x)=x^2(x+3)-2$ 이고, $f(3)=52$이다.

1-7

$g'(x)=f(x)$이고, (가)에 의하여 $g'(2)=0$이므로
$f(2)=0$이다.
또한 (나)에 의하여 $g'(4)=0,\ g(4)=3$임을 알 수 있다.
따라서 $f(4)=0$이다.

위의 두 결과에 의하여 $f(x)=a(x-2)(x-4)$로 둘 수 있는데, $x=2$에서 $g(x)$가 '극솟값'을 가지므로,
$f(x)(=g'(x))$의 부호를 $x=2$의 좌, 우에서 음->양으로 바꿔야 한다. 따라서 a는 음수이다.

ㄱ.
$f(x)=a(x-2)(x-4)\ \ (a<0)$이므로
$f(1)=3a<0$이다. (참)

ㄴ.
$y=f(x)$의 그래프가 $x=3$에 대하여 대칭이므로
$y=|f(x)|$의 그래프도 $x=3$에 대하여 대칭이다.
따라서 $\int_1^5 |f(x)|dx=2\int_1^3 |f(x)|dx$이다.

$\int_1^3 |f(x)|dx=\int_1^2 -f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$이므로

$\int_1^5 |f(x)|dx=-2\int_1^2 f(x)dx+2\int_2^3 f(x)dx$이다.

따라서 ㄴ.이 참임을 보이려면
$2\int_2^3 f(x)dx=-\int_1^2 f(x)dx$ 임을 보이면 된다.

$\int_2^3 f(x)dx=a\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x\right]_2^3=-\frac{2}{3}a$ 이고

$\int_1^2 f(x)dx=a\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x\right]_1^2=\frac{4}{3}a$이므로

$2\int_2^3 f(x)dx=-\int_1^2 f(x)dx$가 잘 성립함을 알 수 있다.

(참)

ㄷ.
$f(x)=a(x^2-6x+8)$이고, $g(4)=3$이었다.
ㄷ.의 조건인 $g(3)=1$ 에 의하여, $g(4)-g(3)=2$임을 알 수 있는데, $g(4)-g(3)=\int_3^4 f(x)dx$로 표현할 수 있다.
$(g'(x)=f(x)$이므로)

$\int_3^4 f(x)dx = a\int_3^4 (x^2-6x+8)dx = 2$ 를 만족하는 a값을 찾아주면 $a=-3$임을 알 수 있다.

따라서 $f(x)=-3(x-2)(x-4)$이고,
$|f(x)|=9$인 x는 1, 5임을 알 수 있다.
이 숫자들(1, 5)은 ㄴ.의 좌변에서 나왔던 숫자들이므로,
ㄴ.에서 구한 것들을 활용하도록 하자.

$\int_1^2 f(x)dx = a\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x\right]_1^2 = \frac{4}{3}a = -4$이므로
$\int_1^5 |f(x)|dx = (-3)\times(-4) = 12$이고,
곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=9$로 둘러싸인 부분의 넓이는 네 점 $(1, 9)$, $(5, 9)$, $(1, 0)$, $(5, 0)$을 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이에서 $\int_1^5 |f(x)|dx$를 빼서 구할 수 있으므로 $36-12=24$가 정답임을 알 수 있다. (참)

1-8

먼저, (가)에서 $n=3$일 때, 분모가 0으로 수렴하므로 분자도 0으로 수렴해야 한다. 따라서 $g(3)=0$

$n=1, 2$일 땐, n의 값에 관계없이 항상
$\lim_{x\to n}\frac{g(x)}{f(x)}=-1$을 만족시킨다.

$i)$ $f(n)=0$인 경우, $g(n)$도 0이여야 수렴 가능하다.

$ii)$ $f(n)\neq 0$인 경우, 극한값이 -1이므로 $g(n)\neq 0$이고
$\lim_{x\to n}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(n)}{f(n)}=-1$ 이므로 $f(n)+g(n)=0$이다.

$i)$, $ii)$ 경우 모두 $f(n)+g(n)=0$을 만족시키므로 결국 곡선 $y=f(x)+g(x)$가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 1, 2임을 알 수 있다.

ㄱ.
$f(x)+g(x)=(x-1)^2(x-2)$인 경우, $g(3)=0$이므로 $f(3)=4$.
이를 $n=3$일 때 (가) 조건에 적용시켜주면 $g'(3)=6$임을 알 수 있다.
$f(x)+g(x)=(x-1)^2(x-2)$를 미분해주면
$f'(x)+g'(x)=2(x-1)(x-2)+(x-1)^2$이고,
$x=3$을 대입하면 $f'(3)=2$임을 알 수 있다.
따라서 이 경우 $f(3)f'(3)=8$

ㄴ.
$f(x)+g(x)=(x-1)(x-2)^2$인 경우, $g(3)=0$이므로 $f(3)=2$.
마찬가지로 $n=3$일 때 (가) 조건에 적용시켜주면 $g'(3)=3$임을 알 수 있다.
$f'(x)+g'(x)=2(x-1)(x-2)+(x-2)^2$에 $x=3$을 대입하면 $f'(3)=2$ 임을 알 수 있다.
따라서 이 경우 $f(3)f'(3)=4$

ㄱ, ㄴ에 의하여 $f(3)f'(3)$의 최댓값과 최솟값이 8, 4임을 알 수 있으므로 정답은 12이다.

1-9

함수 $h(x)$가 $x=0$에서 연속이고 $h(0)=0$이므로
$f(0)=0$ ⋯ ① 이고
$\int_0^2 g(t)dt=0$ ⋯ ② 이다.
또한 $h(0)=0$이므로 함수 $|h(x)|$는 $x=0$에서 극솟값을 가지고, ($\because |h(x)|\geq 0$)
함수 $|h(x)|$가 $x=0$에서 미분가능하므로
$h'(0)=0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to 0-}\frac{h(x)}{x}=f'(0)=0$ ⋯ ③ 이고
$\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)}{x}=g(2)-g(0)=0$ ⋯ ④ 이다.

$$\left(\because \frac{d}{dx}\int_x^{x+2} g(t)dt = g(x+2)-g(x)\right)$$

함수 $|h(x)|$가 $x=-2$에서 미분가능하지 않으므로
$h(-2)=f(-2)=0$이어야 한다. ⋯ ⑤
따라서 ①, ③, ⑤에서 $f(x)=x^2(x+2)$이다.
④에서 $g(0)=g(2)=b$라 하면 인수정리에서

$$g(x)=x(x-2)(x-a)+b$$

로 둘 수 있다. (a, b는 실수)
②에서

$$\begin{aligned}\int_0^2 g(x)dx &= \int_0^2\{x^3-(a+2)x^2+2ax+b\}dx\\ &=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2+bx\right]_0^2\\ &=4-\frac{8}{3}(a+2)+4a+2b\\ &=\frac{4}{3}a+2b-\frac{4}{3}=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow b=-\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ g(x)&=x^3-(a+2)x^2+2ax-\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}\\ &=x(x-a)(x-2)-\frac{2}{3}(a-1)\end{aligned}$$

$x>0$일 때

$$\begin{aligned}h'(x)&=g(x+2)-g(x)\\ &=x(x+2)(x+2-a)-x(x-a)(x-2)\\ &=x(6x-4a+4)\end{aligned}$$

이고, $\lim_{x\to\infty}h(x)=\infty$이므로

$x>0$일 때 함수 $h(x)$의 함숫값이 0보다 작은 점이 존재하면 사잇값 정리에 의해 함수 $|h(x)|$가 $x>0$에서 미분가능하지 않은 점(즉, $h(x)=0$이고 $h'(x)\neq 0$인 점)이 존재한다.

따라서 조건 (나)를 만족하려면
$x>0$일 때 $h(x)\geq 0$이어야 한다.
$h'(x)=x(6x-4a+4)$에서
$a>1$이면 함수 $h(x)$가 열린구간 $(0, k)$에서 감소하게 되는 양수 k가 존재하고,
$a\leq 1$이면 함수 $h(x)$는 열린구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.
따라서 조건 (나)를 만족하려면 $a\leq 1$이어야 한다.

$$\begin{aligned}\therefore\ f(3)+g(3)&=45+27-9(a+2)+6a-\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}\\ &=54-\frac{11}{3}a+\frac{2}{3}\\ &\geq 54-\frac{11}{3}+\frac{2}{3}=51\end{aligned}$$

따라서 $f(3)+g(3)$의 최솟값은 51이다.