제 2 교시

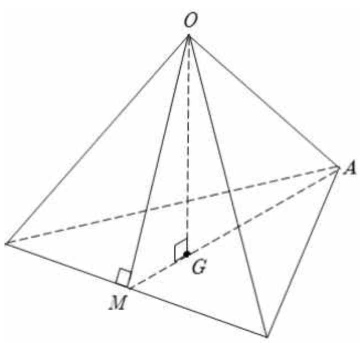
수학 영역(B형)

홀수형

21. 답 : ① ( )

식을 세우기에 앞서 정사면체에 대하여 알아봅시다.

정사면체는 각 꼭짓점에서 바라본 모양이 항상 같고 두 평면이 이루는 각이 모두 동일합니다. 또한, 모든 면들은 합동인 정삼각형이며 밑면위에 있지 않은 한 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선의 발은 그 밑면의 무게중심과 일치합니다.



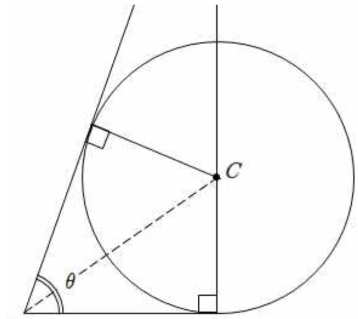
그림과 같이 한 변의 길이가 12인 정사면체의 두 꼭짓점을 O, A라고 하고, 정사면체에서 모서리 OA와 수직인 모서리의 중점을 M이라고 합시다. 또, 꼭짓점 O에서 점 O를 포함하지 않는 정사면체의 한 면에 내린 수선의 발을 G라고 하면 점 G는 두 점 A, M을 포함하는 정삼각형의 무게중심이 됩니다.

따라서 $\overline{AM}=12\times\sin\frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$ 이고 $\overline{MG}:\overline{AG}=1:2$ 이므로

$\overline{MG}=2\sqrt{3}$ 입니다. 또, $\overline{OM}=12\times\sin\frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$ 이므로 정사면체의 두 면이 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때,

$\cos\theta=\frac{\overline{MG}}{\overline{OM}}=\frac{2\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$ 입니다.

이제 정사면체에 내접하는 구의 반지름의 길이를 구해봅시다.



평면 OMA로 내접하는 구를 자른 단면의 모양은 그림과 같습니다.

구의 반지름의 길이를 r이라고 할 때, 반지름 R의 길이는

$R=\tan\frac{\theta}{2}\times\overline{MG}$

이고 $\cos\theta=\frac{1}{3}$ 이므로 $\frac{1+\cos\theta}{2}=\cos^2\frac{\theta}{2}$

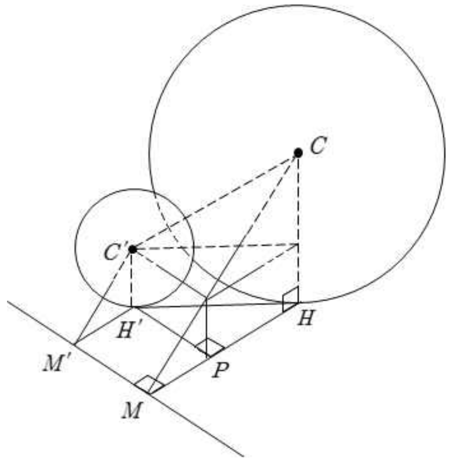
$\therefore \cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $R=\tan\frac{\theta}{2}\times\overline{MG}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times2\sqrt{3}=\sqrt{6}$

그렇다면 본격적으로 구 C와 외접하고 정사면체의 면들 중 두 개 이상의 면에 동시에 접하는 임의의 구를 구해봅시다.

정사면체의 면들 중 두 개의 면에 동시에 접하는 구는 위의 내접구처럼 중심으로부터 각 면까지의 거리가 구의 반지름의 길이로 각각 같습니다.

또, 정사면체에 내접하는 구의 중심을 C , 내접구와 외접하고 정사면체의 면들 중 두 개의 면에 동시에 접하는 구의 중심을 C', 이 구의 반지름의 길이를 r, 점 C에서 밑면에 내린 수선의 발을 H(앞의 그림에서는 밑면이 무게중심 G에 해당), 점 C'에서 밑면에 내린 수선의 발을 H', 점 H'에서 점 M을 포함하는 모서리에 내린 수선의 발을 M', 마지막으로 점 H'에서 $\overline{HM}$에 내린 수선의 발을 P라고 하면 두 구의 위치관계는 다음 그림과 같습니다.



각 선분들의 위치관계를 살피면 $\overline{H'M'}$, $\overline{HM}$는 각각 $\overline{MM'}$에 수직이고 $\overline{C'H'}$, $\overline{CH}$이 각각 $\overline{H'M'}$, $\overline{HM}$에 수직이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{C'M'}$, $\overline{CM}$이 $\overline{MM'}$과 수직입니다.

앞에서와 마찬가지로 두 면이 이루는 각을 θ, $\overline{H'P}=x$라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{HP}=\overline{HM}-\overline{H'M'}&=(\overline{CH}\times\cot\frac{\theta}{2})-(\overline{C'H'}\times\cot\frac{\theta}{2})\\&=\sqrt{2}(R-r)\\&=\sqrt{2}(\sqrt{6}-r)\qquad(\because\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2})\end{aligned}$$

또, 피타고라스의 정리에 의하여

$(\overline{CC'})^2=(\overline{H'P})^2+(\overline{HP})^2+(\overline{CH}-\overline{C'H'})^2$

이 성립하고

$\overline{CC'}=R+r$, $\overline{C'H'}=r$, $\overline{CH}=R=\sqrt{6}$ 이므로 각각 대입하면

$(r+\sqrt{6})^2=x^2+(\sqrt{2}(\sqrt{6}-r))^2+(\sqrt{6}-r)^2$

전개하여 정리하면,

$2r^2-8\sqrt{6}r+12+x^2=0$

근의 공식을 이용하여 r을 구하면

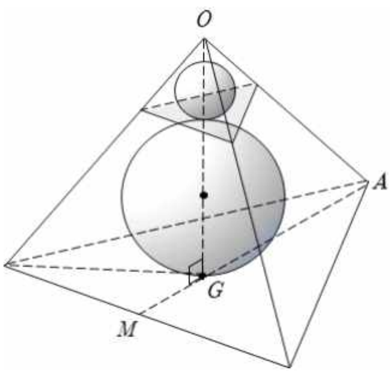
$r=\dfrac{4\sqrt{6}-\sqrt{72-2x^2}}{2}$

(정사면체에 내접하는 구는 정사면체 내부에 들어갈 수 있는 구의 반지름 중 가장 큰 값을 가지므로 $r<R$을 만족해야 합니다.)

따라서 구하고자 하는 구의 반지름의 길이는 $x=0$일 때, 최솟값을 가집니다.

$\therefore m_r=\dfrac{4\sqrt{6}-\sqrt{72}}{2}=2\sqrt{6}-3\sqrt{2}$

또, 반대로 x의 값이 최대일 때, 반지름의 길이역시 최댓값을 가지며, x의 값이 커짐에 따라 구의 위치는 점점 M에서 멀어져 정사면체의 한 꼭짓점으로 이동하게 되고 그림과 같이 세 면과 동시에 접하는 순간, x의 값은 최대가 됩니다.



이때, 정사면체의 세 면과 동시에 접하고 내접구와 외접하는 구의 반지름의 길이를 간단하게 구해봅시다.

구하고자 하는 구를 그림과 같이 높이가 $(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times 12)-2R=2\sqrt{6}$이고 전체 정사면체와 닮음인 작은 정사면체에 내접하는 구로 생각하면 간편하게 구할 수 있습니다.

앞서 설명한 바와 동일한 방법으로 내접하는 구의 반지름의 길이를 구하면

$\therefore M_r=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

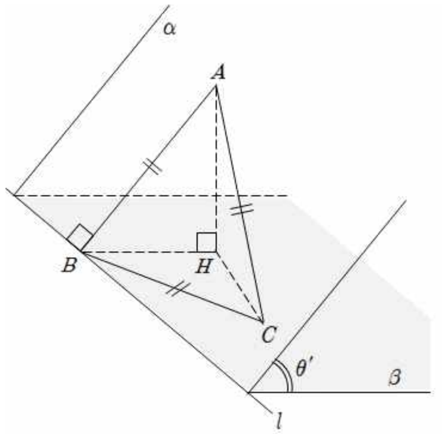
따라서 $M_r\times m_r=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times(2\sqrt{6}-3\sqrt{2})=6-3\sqrt{3}$ 이고

$p^2+q^2=6^2+3^2=45$ 입니다.

※ 정사면체에 내접하는 내접구의 중심은 정사면체의 높이를 $1:3$으로 내분하는 점입니다. 이는 앞부분에서 정사면체의 두 면이 이루는 각의 코사인 값이 $\dfrac{1}{3}$임을 이용하여 쉽게 증명이 가능합니다.

30. 답 : 58 ()

두 평면 $\alpha : x+y+2z=1$, $\beta : 2x-y+2z=3$이 이루는 예각을 θ'라고 하고 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 문제의 조건에 따라 세 점 A, B, C를 표시하면 다음 그림과 같습니다.



점 A에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라고 할 때,

두 평면의 법선벡터는 각각 $(1,1,2)$, $(2,-1,2)$이므로

$$\cos\theta' = \frac{1\times2+1\times(-1)+2\times2}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{5\sqrt{6}}{18}$$

또, 점 A의 좌표가 $A(1,-2,1)$이므로 점과 평면 사이의 거리공식을 이용하여 선분 AH의 길이를 구하면

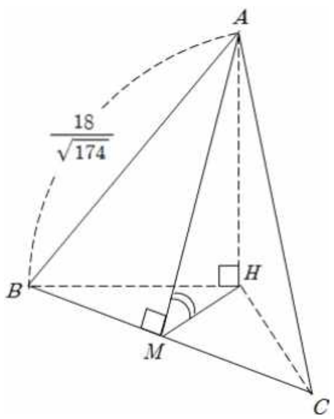
$$\overline{AH} = \frac{|2\times1+(-1)\times(-2)+2\times1-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = 1$$

이때, 두 평면의 교선 l과 $\overline{AB}$이 수직이고 평면 β와 $\overline{AH}$가 수직이므로 **삼수선의 정리**에 의해 두 선분 $\overline{AB}$와 $\overline{AH}$가 서로 수직입니다.

따라서 정삼각형의 한 변의 길이인 $\overline{AB}$의 길이를 구하면

$$\overline{AB} = \frac{1}{\sin\theta'} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta'}} = \frac{18}{\sqrt{174}}$$

이제 사면체 $ABCH$를 분리하여 생각해 봅시다.



점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 M이라고 할 때, $\triangle ABC$는 정삼각형이므로 점 M은 두 점 B, C의 중점이 됩니다.

또, $\overline{AM}$과 $\overline{BC}$이 수직이고 평면 β와 $\overline{AH}$가 수직이므로 **삼수선의 정리**에 의해 $\overline{BC}$와 $\overline{MH}$가 수직입니다.

$\triangle ABC$와 평면 β가 이루는 예각의 크기를 θ라고하면 구하고자 하는 θ는 그림에서 표시된 각이므로

$$\therefore \sin\theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{AM}} = \frac{1}{\frac{18}{\sqrt{174}}\times\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{58}}{9}$$

따라서 $81\sin^2\theta = 58$입니다.

20. 답 : ②

ㄱ. 함수 $f(x)$의 도함수, 이계도함수를 각각 구해보면

$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ $f''(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$\therefore f''(x)=f(x)$ (참)

ㄴ. 주어진 식 $2\int_a^b f(x)dx<(b-a)\{f(a)+f(b)\}$의 양변을 2로 나누면 $\int_a^b f(x)dx<\dfrac{1}{2}(b-a)\{f(a)+f(b)\}$ 입니다.

이때, 우변이 의미하는 바를 살펴봅시다.

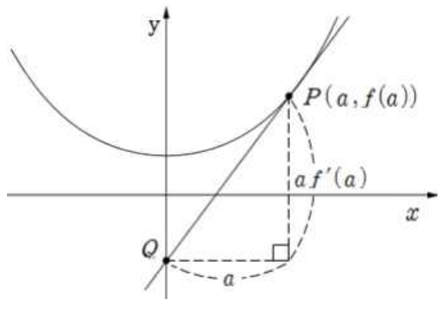
두 점 $P(a,f(a)),B(b,f(b))$에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 $P'(a,0),B'(b,0)$이라고 할 때, $b-a$는 $\overline{P'B'}$의 길이이고 $\{f(a)+f(b)\}$은 사다리꼴 $PBB'P'$의 윗변과 아랫변에 해당하므로 $\dfrac{1}{2}(b-a)\{f(a)+f(b)\}$는 사다리꼴 $PBB'P'$의 넓이입니다.

이때, $y=f(x)$의 그래프는 이계도함수가 항상 양수이므로 실수 전체 구간에서 아래로 볼록하며 따라서 사다리꼴 $PBB'P'$의 넓이는 $x=a$에서 $x=b$까지의 그래프의 밑넓이 $\int_a^b f(x)dx$보다 항상 큽니다. (참)

ㄷ. 앞서 (ㄱ.)에서 $f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 이므로 $x=0$에서 $x=a$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이는

$$\int_0^a\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^a\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^a\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^a\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$$
$$=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^a$$
$$=\frac{e^a-e^{-a}}{2}=f'(a)$$

이번엔 $\overline{PQ}$를 살펴보면 $\overline{PQ}$는 아래 그림에서 직각삼각형의 빗변의 길이와 같으므로 항상 $af'(a)$보다 큽니다.



이때, 문제의 조건에서 $1<a$이고 앞서 $x=0$에서 $x=a$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이는 $f'(x)$임을 밝혔으므로 다음과 같은 대소 관계가 성립합니다.

$\therefore \int_0^a\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=f'(x)<af'(x)<\overline{PQ}$

따라서 $x=0$에서 $x=a$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이는 $\overline{PQ}$의 길이보다 작습니다. (거짓)

※ **확인 사항**

○ **참여해 주셔서 감사합니다. ^~^**