



지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

<https://orbi.kr/00043463424>

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

<https://atom.ac/books/9395>

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex  
공통

1.  $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 방정식  $2\sin^2 x - 3\cos x = k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이다. 이 세 실근 중 가장 큰 실근을  $\alpha$ 라 할 때,  $k \times \alpha$ 의 값은? (단,  $k$ 는 상수이다.) [2023년 4월 11]

- ①  $\frac{7}{2}\pi$     ②  $4\pi$     ③  $\frac{9}{2}\pi$     ④  $5\pi$     ⑤  $\frac{11}{2}\pi$

1. 정답 ② [2023년 4월 11]

1) 문제해석, 치환하기

$0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때  $2\sin^2 x - 3\cos x = k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3입니다. 일단 방정식을 풀어야 하는데 우리한테 익숙한 모양이 아니죠? 치환해서 우리 익숙한 형태로 만들어봅시다.

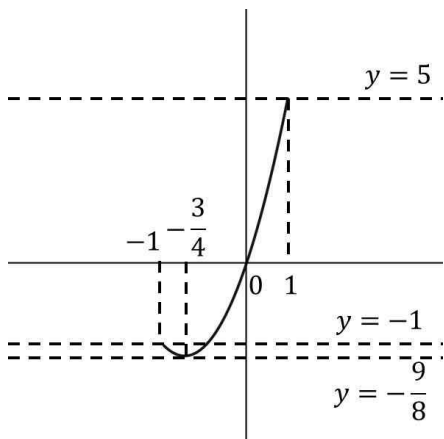
일단 변수가 다르니까 통일해줘야겠어요.  $\sin x$ 와  $\cos x$ 간의 관계식이 뭐가 있을까요?  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 이 있네요. 그러면  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ 이죠? 따라서  $2 - 2\cos^2 x - 3\cos x = k$ 이고 정리하면  $2\cos^2 x + 3\cos x = 2 - k$ 가 됩니다.

이때  $\cos x = t$ 라고 치환하면  $0 \leq x \leq 2\pi$ 이므로  $\cos x$ 의 그래프는  $-1$ 와  $1$  사이의 값이 됩니다. 우리는 이  $\cos x$ 를  $t$ 라고 했으니까  $t$  역시  $-1$ 에서  $1$  사이의 값을 가지게 되겠죠?  $-1 \leq t \leq 1$ 입니다. 그리고  $2t^2 + 3t = 2 - k$ 가 되네요.

정리해보면  $-1 \leq t \leq 1$ 의 범위에서  $y = 2t^2 + 3t$ 라는 이차함수와  $y = 2 - k$ 가 만나는  $t$ 점에 대하여,  $y = t$ 와  $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서의  $y = \cos x$ 가 만나는 점이 세 개라는 것이 됩니다. 사실상 문제를 두 번 푸는 것이 되는 거죠.

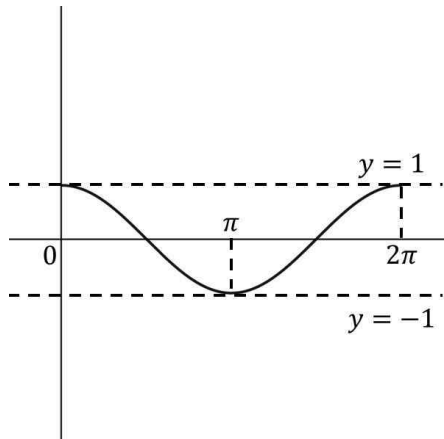
2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

근데 여기서 생각해볼게요. 일단  $-1 \leq t \leq 1$ 의 범위에서  $y = 2t^2 + 3t$ 는



이런 함수입니다. 여기서  $y = 2 - k$ 와 만날 수 있는 경우의 수는 3가지입니다. 아예 안 만나거나, 한 점에서만 만나거나, 두 점에서 만나거나.

그런데 이때  $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서의  $y = \cos x$ 는



이런 함수입니다. 우리는  $-1 \leq t \leq 1$ 의 범위에서  $y = 2t^2 + 3t$ 라는 이차함수와  $y = 2 - k$ 가 만나는  $t$ 점에 대하여  $y = t$ 와  $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서의  $y = \cos x$ 가 만나는 점이 세 개여야 한다는 걸 다시 한 번 떠올리고 다음으로 가볼게요.

이때  $y = 2 - k$ 와  $y = 2t^2 + 3t$ 가 아예 만나는 건 말도 안 되죠.

한 점에서 만나는 것도 불가능합니다. 왜냐하면 바로 위에 그래프에 아무 곳이나  $y = t$ 를 그어보세요. 어느 곳에 그러도 세 점에서 만나는 건 불가능합니다.

따라서  $y = 2 - k$ 와  $y = 2t^2 + 3t$ 는 두 점에서 만나야 합니다. 그래프를 보면  $t$ 는  $-1$ 부터  $-1$ 과  $-\frac{3}{4}$ 의 대칭 부분에 있는  $-\frac{1}{2}$ 까지네요.

이때 다시 한 번 생각해봅시다.  $y = t$ 와  $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서의  $y = \cos x$ 가 만나는 점이 세 개여야 하는데,  $y = 2 - k$ 와  $y = 2t^2 + 3t$ 는 두 점에서 만나므로 가능한  $t$ 가 두 개입니다. 이러면 수평선 두 개가  $y = t$ 로 그려지는 거죠.

그냥  $-1$ 부터  $-\frac{1}{2}$ 까지 부분에서 수평선 두 개를 그으면 서로 다른 4개의 점에서 만나게 됩니다. 우리는 세 점에서 만나게 해야 하죠?

이때 딱 한 점에서 만나게 하는 지점이 있죠. 만약 그 수평선 중 하나가  $y = -1$ 이라면? 그러면  $y = -1$ 과 만나는 점 하나에  $y = a$  ( $a$ 는 상수)와 만나는 점 두 개 합쳐서 세 개가 되겠네요.

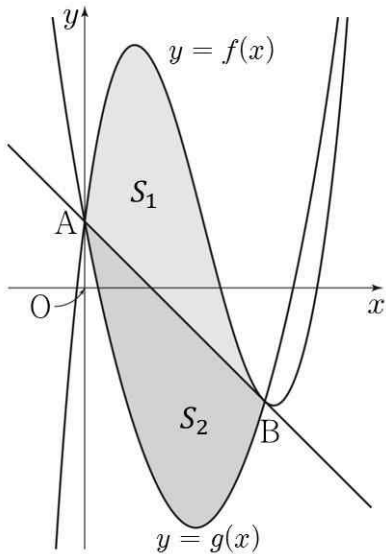
따라서  $y = 2 - k$ 와  $y = 2t^2 + 3t$ 는  $t = -1$ 과  $t = -\frac{1}{2}$ 에서 만나야 하므로  $2 - k = -1$ 이고  $k = 3$ 입니다.

그리고  $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서  $\cos x = -\frac{1}{2}$ 가 되는 가장 큰 실근은  $\frac{4}{3}\pi$ 이므로  $\alpha = \frac{4}{3}\pi$ 입니다.  $k \times \alpha = 4\pi$ 이고  
답은 ②번이네요.

2. 그림과 같이 삼차함수  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 1$ 의 그래프와  
 최고차항의 계수가 양수인 이차함수  $y = g(x)$ 의 그래프가  
 점  $A(0, 1)$ , 점  $B(k, f(k))$ 에서 만나고, 곡선  $y = f(x)$  위의  
 점 B에서의 접선이 점 A를 지난다.  
 곡선  $y = f(x)$ 와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S_1$ ,  
 곡선  $y = g(x)$ 와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S_2$ 라 하자.

$S_1 = S_2$ 일 때,  $\int_0^k g(x)dx$ 의 값은? (단,  $k$ 는 양수이다.)

[2023년 4월 12]



- ①  $-\frac{17}{2}$     ②  $-\frac{33}{4}$     ③  $-8$     ④  $-\frac{31}{4}$     ⑤  $-\frac{15}{2}$

2. 정답 ② [2023년 4월 12]

1) 함수 구하기 - 차함수

그림처럼 삼차함수  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 1$ , 이차함수  $g(x)$ ,  $B(k, f(k))$ 에서의 접선이 모두  $A(0, 1)$ ,  $B(k, f(k))$ 에서 만난다고 합니다. 일단 이것부터 해결하죠.

일단  $B(k, f(k))$ 에서의 접선이  $A(0, 1)$ 을 지나므로 편의상  $y = f'(k)x + 1$ 이라고 할게요. 이때  $y = f'(k)x + 1$ 과 이차함수  $g(x)$ 가  $A(0, 1)$ ,  $B(k, f(k))$ 에서 만나죠? 따라서  $g(x)$ 의 최고차항의 계수를  $b$ 라고 하면 차함수에 의하여  $g(x) - f'(k)x - 1 = bx(x - k)$ 이고  $g(x) = bx(x - k) + f'(k)x + 1$ 입니다.

또한 삼차함수  $f(x)$ 와  $B(k, f(k))$ 에서의 접선은  $A$ 에서 만나고  $B$ 에서 접하므로

$$f(x) - f'(k) - 1 = x(x - k)^2 \text{이고 } f(x) = x(x - k)^2 + f'(k)x + 1 \text{입니다.}$$

이때  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 1$ 이므로  $f'(k) = 3k^2 - 12k + 8$ 이고,

$$f(x) = x(x - k)^2 + (3k^2 - 12k + 8)x + 1 \text{입니다.}$$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 1$ 이니까 두 식은 같아야 하죠? 항등식의 계수비교를 이용해봅시다. 일차항은 복잡해보이니까 이차항을 비교해보죠. 전개하면  $f(x) = x^3 - 2kx^2 + (4k^2 - 12k + 8)x + 1$ 입니다. 따라서  $-6 = -2k$ 이어야 하고  $k = 3$ 이네요.  $f'(k) = f'(3) = -1$ 이고  $g(x) = bx(x - 3) - x + 1$ 입니다.

2) 정적분 나누기

그리고 곡선  $y = f(x)$ 와 직선  $AB$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가  $S_1$ , 곡선  $y = g(x)$ 와 직선  $AB$ 로 둘러싸인

부분의 넓이를  $S_2$ 인데  $S_1 = S_2$ 이라고 합니다. 그리고  $\int_0^k g(x)dx$ 를 구하라네요.

일단  $S_1$ 은  $\int_0^3 f(x) - (-x + 1)dx$ 이고  $S_2$ 는  $\int_0^3 -x + 1 - g(x)dx$ 이죠? 이 둘이 같다는 건

$$\int_0^3 g(x)dx = -\int_0^3 f(x) + 2x - 2dx \text{이라는 거네요? 그럼 이대로 계산하죠.}$$

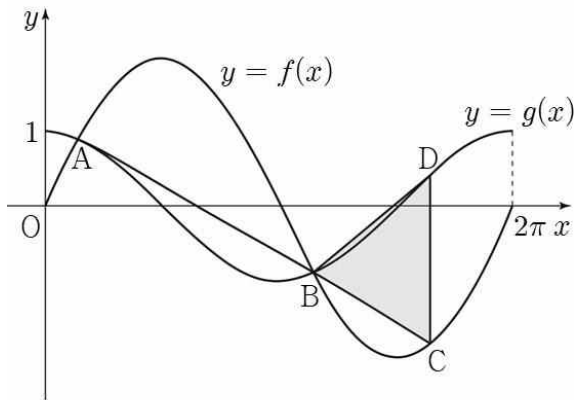
$$-\int_0^3 x^3 - 6x^2 + 10x - 1dx = -\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 5x^2 - x\right]_0^3 = -\frac{33}{4} \text{입니다. 답은 ②번이네요.}$$

3. 그림과 같이 닫힌구간  $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 두 함수

$f(x) = k \sin x$ ,  $g(x) = \cos x$ 에 대하여 곡선  $y = f(x)$ 와  
곡선  $y = g(x)$ 가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자.

선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점을 C라 할 때, 점 C는  
곡선  $y = f(x)$  위에 있다. 점 C를 지나고  $y$ 축에 평행한 직선이  
곡선  $y = g(x)$ 와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 BCD의 넓이는?  
(단,  $k$ 는 양수이고, 점 B의  $x$ 좌표는 점 A의  $x$ 좌표보다 크다.)

[2023년 4월 13]



- ①  $\frac{\sqrt{15}}{8}\pi$       ②  $\frac{9\sqrt{15}}{40}\pi$       ③  $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$   
 ④  $\frac{3\sqrt{10}}{16}\pi$       ⑤  $\frac{3\sqrt{5}}{10}\pi$



3. 정답 ③ [2023년 4월 13]

1) 그림 있으면 그림 보면서, 문제해석

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서  $f(x) = k \sin x$ ,  $g(x) = \cos x$ 가 있는데 만나는 점을 A, B라고 한답니다.

이때 A, B의 3 : 1 외분점이 C인데 이것도  $f(x)$  위의 점이라고 하네요. C랑 같은  $x$ 좌표이고  $g(x)$  위의 점을 D라고 할 때 BCD의 넓이를 구하랍니다. 일단 그림에 다 표시되어 있네요.

일단 C가 A, B의 3 : 1 외분점이니 B의  $x$ 좌표를  $b$ 라 잡으면 A는  $b - 2a$ , C는  $b + a$ 로 잡을 수 있죠?  
그러면  $k \sin b = \cos b$ 이고  $k \sin(b - 2a) = \cos(b - 2a)$ 입니다.

이때  $k \sin b = \cos b$ 이므로  $\frac{\sin b}{\cos b} = \tan b = \frac{1}{k}$ 이고,  $k \sin(b - 2a) = \cos(b - 2a)$ 이므로

$\frac{\sin(b - 2a)}{\cos(b - 2a)} = \tan(b - 2a) = \frac{1}{k}$ 이죠? 값이 같네요? 탄젠트 함수는 주기가  $\pi$ 잖아요? 그 말은  $2a$ 는

$\pi, 2\pi, \dots$  중 하나라는 거죠. 그런데  $k \sin x$  함수와  $\cos x$  함수는 만나면 무조건  $\tan x = \frac{1}{k}$  형태가 되므로

$2a$ 는 값 중에서 가장 작은  $\pi$ 가 됩니다. 따라서  $a = \frac{\pi}{2}$ 이네요.

$y$ 좌표도 가야겠죠? A는 지금  $(b - \pi, \cos(b - \pi))$ 이고 B는  $(b, \cos b)$ 인데  $\cos(b - \pi)$ 는 각 변환에 의하여  $-\cos b$ 로 바꿀 수 있으므로 C의  $y$ 좌표는  $2\cos b$ 입니다. 그런데 C의  $y$ 좌표는  $k \sin\left(b + \frac{\pi}{2}\right)$ 이고 각 변환을 하면  $k \cos b$ 이므로  $k = 2$ 이네요.

또한  $\frac{\sin b}{\cos b} = \tan b = \frac{1}{2}$ 이고  $\sin^2 b + \cos^2 b = 1$ 인데 그림에서  $\sin x$ 와  $\cos x$  모두  $x$ 축 아래에 있으므로

$\sin b = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ,  $\cos b = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 입니다.

다음으로 우리가 구해야 하는 건 BCD의 넓이입니다. 그런데 아주 정직하게도 삼각형을 편하게 준 덕에

$$\frac{1}{2} \times (\text{C의 } x\text{좌표} - \text{B의 } x\text{좌표}) \times (\text{D의 } y\text{좌표} - \text{C의 } y\text{좌표})$$

로 계산할 수 있죠. 이미 C의  $x$ 좌표 - B의  $x$ 좌표는 알고 있습니다.  $a = \frac{\pi}{2}$ 입니다. 따라서 우리는 D의  $y$ 좌표 - C의  $y$ 좌표만 계산하면 되겠네요.

먼저  $D$ 는  $\left(b + \frac{\pi}{2}, \cos\left(b + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ 이고,  $C$ 는  $\left(b + \frac{\pi}{2}, 2\sin\left(b + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ 입니다. 이때 각 변환에 의하여  $D$ 의  $y$ 좌표 -  $C$ 의  $y$ 좌표  $= -\sin b - 2\cos b = \sqrt{5}$ 이고 삼각형의 넓이는  $\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}\pi$ 입니다. 답은 ③번입니다.

4. 양의 실수  $t$ 에 대하여 함수  $f(x)$ 를

$$f(x) = x^3 - 3t^2x$$

라 할 때, 닫힌구간  $[-2, 1]$ 에서 두 함수  $f(x)$ ,  $|f(x)|$ 의  
최댓값을 각각  $M_1(t)$ ,  $M_2(t)$ 라 하자. 함수

$$g(t) = M_1(t) + M_2(t)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[2023년 4월 14]

<보 기>

ㄱ.  $g(2) = 32$

ㄴ.  $g(t) = 2f(-t)$ 를 만족시키는  $t$ 의 최댓값과 최솟값의 합은  
3이다.

ㄷ.  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g\left(\frac{1}{2} + h\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g\left(\frac{1}{2} + h\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = 5$

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 정답 ③ [2023년 4월 14]

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

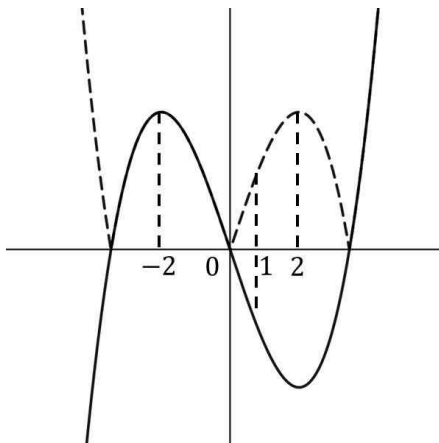
$f(x) = x^3 - 3t^2x$ 이 있는데  $-2 \leq x \leq 1$ 에서  $f(x)$ 의 최댓값을  $M_1(t)$ 이라고 하고,  $|f(x)|$ 의 최댓값을  $M_2(t)$ 이라고 한답니다. 그리고  $g(t) = M_1(t) + M_2(t)$ 이라고 하네요.

일단  $f(x)$ 부터 관찰해보죠.  $f(x) = x^3 - 3t^2x = x(x^2 - 3t^2) = x(x - t\sqrt{3})(x + t\sqrt{3})$ 이므로 기함수이고 원점대칭입니다.  $0, t\sqrt{3}, -t\sqrt{3}$ 에서  $x$ 축과 만나구요. 미분하면

$f'(x) = 3x^2 - 3t^2 = 3(x^2 - t^2) = 3(x - t)(x + t)$ 이므로  $x = -t$ 에서 극대,  $x = t$ 에서 극소인 삼차함수입니다.

이때 문제는  $-2 \leq x \leq 1$ 에서  $f(x)$ 와  $|f(x)|$ 의 최댓값을 구해야 한다는 거예요. 우리는  $t$ 와  $t\sqrt{3}$ 라는 값을 모르니까 함부로  $x = 1$ 이  $t$ 보다 작은지 큰지,  $t\sqrt{3}$ 보다 작은지 큰지를 결정할 수 없어요. 일단  $\neg$ 를 천천히 내려가면서 확인해볼게요.

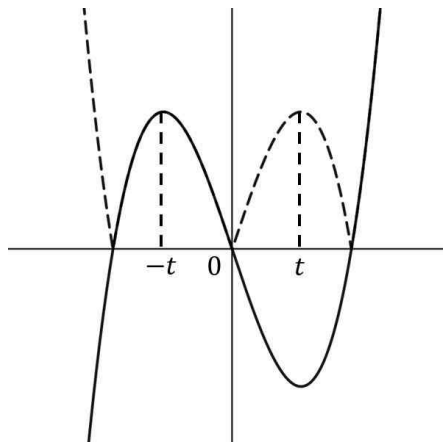
$\neg$ 에서  $g(2) = 32$ 이냐고 물어보네요.  $t = 2$ 를 넣으면  $f(x) = x^3 - 12x = x(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})$ 로  $x = 2$ 에서 극소,  $x = -2$ 에서 극대인 함수입니다. 그래프를 그려보면



이렇게 되겠네요.  $-2 \leq x \leq 1$ 에서  $f(x)$ 와  $|f(x)|$ 의 최댓값은 모두

$f(-2) = 16$ 으로 같습니다. 따라서  $g(2) = 32$ 이네요.  $\neg$ 은 맞습니다.

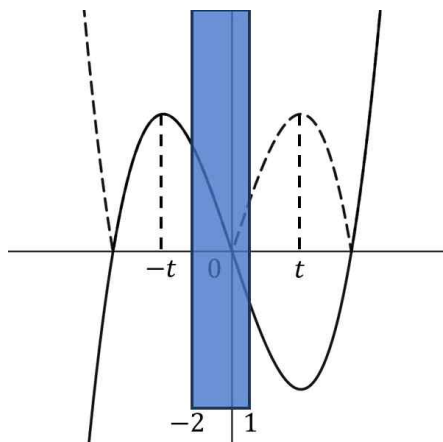
$\cup$ 에서  $g(t) = 2f(-t)$ 를 만족시키는  $t$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 3이냐고 묻네요. 이것 확인하려면 각 변수간의 대소관계부터 파악해야 합니다. 이때 방법은 두 가지입니다.  $x = -2$ 와  $x = 1$ 을 고정시키고  $t$ 를 변화시키는 방법과  $t$ 를 고정시키고  $x = -2$ 와  $x = 1$ 를 변화시키는 방법이죠. 어느 것으로 해도 상관은 없지만 지금은  $t$ 를 고정시키고  $x = -2$ 와  $x = 1$ 를 변화시켜볼게요.



이건  $f(x)$ 의 그래프입니다. 우리는 이제  $x = -2$ 와  $x = 1$ 을 설정해야

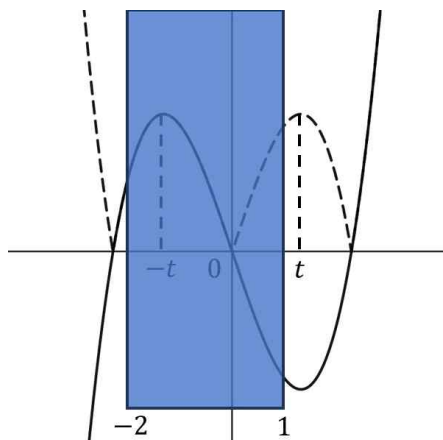
해요.  $t$ 가 엄청나게 큰 부분부터 시작해봅시다.

$t$ 가 엄청나게 크다면



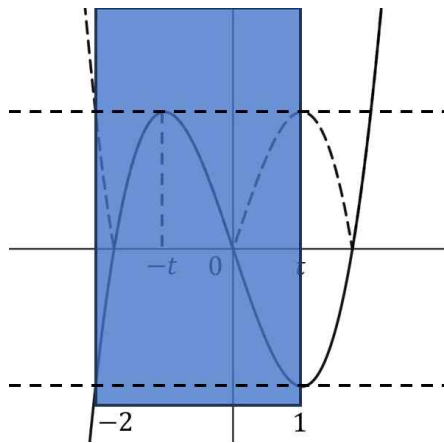
이렇게 될 거예요. 가장 큰 부분은  $f(-2)$ 입니다.  $g(t) = 2f(-2)$ 이죠.

언제까지일까요? 우리가 방금 위에서 봤던  $t = 2$ 가 되는 시점까지겠죠. 왜냐하면 그 시점을 넘어가면



이 파란색의 범위 안에서 최댓값은 모두  $f(-t)$ 가 되겠네요.

$g(t) = 2f(-t)$ 입니다. 이건 언제까지일까요?

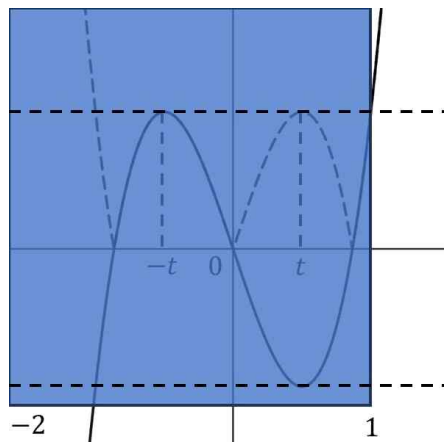


정확히  $f(-2) = f(1)$ 이 되는 시점까지입니다. 이것 넘어가면  $f(x)$ 의

최댓값은  $f(-t)$ 이고  $|f(x)|$ 의 최댓값은  $-f(-2)$ 가 되거든요.  $g(t) = f(-t) - f(-2)$ 입니다.

이때  $t$ 는 삼차함수의 비율관계를 안다면 바로  $t = 1$ 이라는 걸 알 수 있지만  $f(x) = x^3 - 3t^2x$ 이므로 그냥 계산해봅시다.  $-8 + 6t^2 = 1 - 3t^2$ 이고  $t^2 = 1$ 인데  $t$ 는 양수이므로  $t = 1$ 입니다. 최댓값과 최솟값을 더하면 3이네요.

당분간은 이런 상태가 유지되다가



이렇게  $f(-t) = f(1)$ 이 될 때 또다시 변화합니다.  $f(x)$ 의 최댓값은

$f(1)$ 이지만  $|f(x)|$ 의 최댓값은  $-f(-2)$ 이네요.  $g(t) = f(1) - f(-2)$ 입니다.

이것도 계산해볼게요.  $-2t^3 = 1 - 3t^2$ 이고  $2t^3 - 3t^2 + 1 = 0$ 이고  $2t^3 - 3t^2 + 1 = (t-1)^2(2t+1) = 0$ 인데  $t = 1$ 은 아까 확인했으니까  $t = -\frac{1}{2}$ 일 때네요.

그러면  $g(t) = 2f(-t)$ 가 되는  $t$ 의 최댓값은  $t = 2$ 일 때고, 최솟값은  $t = 1$ 까지겠네요. ㄴ도 맞습니다.

ㄷ에서  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = 5$  이냐고 묻네요. 일단 식이 의미하는 바는  $g(t)$ 의

$t = \frac{1}{2}$ 에서의 우미분계수와 좌미분계수입니다. 그런데 일단 확인해보긴 해야겠어요.

$t = \frac{1}{2}$ 이라는 건 우리가 마지막으로 확인했던  $f(-t) = f(1)$ 이 된 상황입니다.  $t < \frac{1}{2}$ 일 때

$g(t) = f(1) - f(-2) = 9 - 9t^2$ 이고  $t > \frac{1}{2}$ 일 때  $g(t) = f(-t) - f(-2) = 2t^3 - 6t^2 + 8$ 이죠. 모두  $t = \frac{1}{2}$ 일 때

$\frac{27}{4}$ 로 값이 동일하니까 연속이구요. 그러면  $t = \frac{1}{2}$ 에서의 우미분계수는  $-\frac{9}{2}$ 이고 좌미분계수는  $-9$ 이네요.

따라서  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = -\frac{9}{2} + 9 = \frac{9}{2}$ 입니다. ㄷ은 아니네요.

따라서 옳은 건 ㄱ, ㄴ이고 답은 ③번입니다.

5. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$a_1$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 할 때,  $\log_2 \frac{M}{m}$ 의 값은?

[2023년 4월 15]

(가) 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-2} & (a_n < 1) \\ \log_2 a_n & (a_n \geq 1) \end{cases}$$

이다.

(나)  $a_5 + a_6 = 1$

- ① 12      ② 13      ③ 14      ④ 15      ⑤ 16



5. 정답 ④ [2023년 4월 15]

1) 조건해석

(가)와 (나)조건을 만족시키는  $a_1$ 의 최댓값이  $M$ 이고 최솟값이  $m$ 일 때  $\log_2 \frac{M}{m}$ 을 구합니다.

(가)조건에서 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-2} & (a_n < 1) \\ \log_2 a_n & (a_n \geq 1) \end{cases}$ 이라고 하네요.  $a_n$ 이 1보다 작으면 그거

다음 항은  $2^{n-2}$ 이고, 1보다 크거나 같으면  $\log_2 a_n$ 이라는 거죠?

(나)조건에서  $a_5 + a_6 = 1$ 이라고 합니다. 여기서 생각해볼게요.  $a_5$ 가 가질 수 있는 경우는 두 가지입니다.

$a_5 = 4$ 이거나,  $a_5 = \log_2 a_4$ 이거나. 그런데  $a_5 = 4$ 라면  $a_6 = \log_2 4 = 2$ 입니다. 그러면 더해서 1을 넘죠? 따라서  $a_5 = \log_2 a_4$ 입니다. 그리고  $a_4 \geq 1$ 이죠.

이때  $a_5 < 1$ 이라면  $a_6 = 8$ 이 되는데, 그러면  $a_5 + a_6 = 1$ 에 의하여  $a_5 = -7$ 이 됩니다. 이러면

$a_5 = \log_2 a_4 = -7$ 이므로  $a_4 = 2^{-7}$ 인데, 이러면  $a_4 \geq 1$ 을 만족시키지 못하게 되죠? 따라서  $a_5 \geq 1$ 이고  $a_6 = \log_2 a_5$ 입니다.

그러면  $a_5 + \log_2 a_5 = 1$ 이네요. 여기서 다시 생각해 보세요.  $a_5 \geq 1$ 인데 만약에  $a_5 > 1$ 이라면  $\log_2 a_5$ 는 음수가 나와야 합니다. 그런데 그러면  $a_5 = 2^a$  ( $a$ 는 음수)인데  $a_5 \geq 1$ 과 모순이죠? 따라서  $a_5 = 1$ 이어야 합니다.  $a_6 = 0$ 이네요.

이제 뒤로 가봅시다.  $a_5 = 1$ 이므로 위와 아래 어느 곳으로 가도  $a_4 = 2$ 입니다.

2) 케이스 분류

이때  $a_3 \geq 1$ 이었다면  $a_4 = \log_2 a_3 = 2$ 이고  $a_3 = 4$ 이네요.

여기서  $a_1 < 1$ 이라면  $a_2 = \frac{1}{2}$ 입니다. 그러면  $a_2 < 1$ 이므로  $a_3 = 1$ 이 됩니다. 모순이죠?

$a_1 \geq 1$ 이라면  $a_2 = \log_2 a_1$ 입니다. 이때

$a_2 < 1$ 이라면  $a_3 = 1$ 인데 모순이네요.

$a_2 > 1$ 이라면  $a_3 = \log_2 a_2 = 4$ 이고  $a_2 = 16$ 입니다.  $a_2 > 1$ 에 해당되구요.  $a_2 = \log_2 a_1 = 16$ 이므로

$a_1 = 2^{16}$ 입니다.  $a_1 \geq 1$ 에도 해당되네요. 일단 하나 찾았어요.

이번엔  $a_3 < 1$ 이라고 해볼게요. 이때

$a_2 < 1$ 이라면  $a_3 = 1$ 인데 모순이네요.

$a_2 \geq 1$ 이라면  $a_3 = \log_2 a_2$ 입니다. 이거네요.

이번엔

$a_1 < 1$ 이라면  $a_2 = \frac{1}{2}$ 인데  $a_2 \geq 1$ 에 모순이네요.

$a_1 \geq 1$ 이라면  $a_2 = \log_2 a_1$ 입니다. 이거네요.

결국  $a_3 < 1$ 이고  $a_3 = \log_2 \log_2 a_1$ ,  $a_2 = \log_2 a_1$ 인데  $a_1 \geq 1$ 이고  $a_2 \geq 1$ 이어야 하므로

$2 \leq a_1 < 2^2$ 입니다. 따라서 가능한  $a_1$ 은  $a_1 = 2^{16}$ 이거나  $2 \leq a_1 < 2^2$ 이어야 하네요. 최댓값은  $2^{16}$ 이고

최솟값은 2이므로  $M = 2^{16}$ ,  $m = 2$ 이고  $\log_2 2^{15} = 15$ 입니다.

6. 등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 하자.  
 $S_n$ 이 다음 조건을 만족시킬 때,  $a_{13}$ 의 값을 구하시오.  
[2023년 4월 20]

- |   |
|---|
| <p>(가) <math>S_n</math>은 <math>n = 7, n = 8</math>에서 최솟값을 갖는다.<br/>(나) <math> S_m  =  S_{2m}  = 162</math>인 자연수 <math>m(m &gt; 8)</math>이 존재한다.</p> |
|---|

6. 정답 30 [2023년 4월 20]

1) 조건해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 등차수열  $a_n = a + (n-1)d$  ( $a$ 는 첫항,  $d$ 는 공차)로 놓기

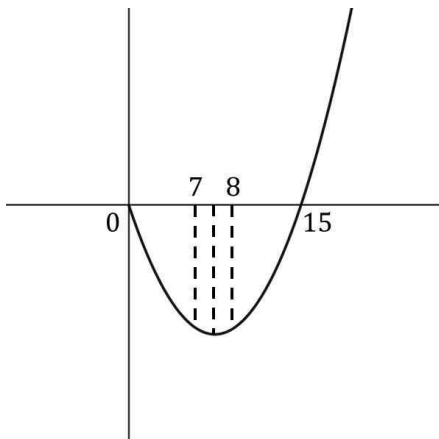
등차수열  $a_n$ 이 있는데  $n$ 항까지 합이  $S_n$ 이고,  $a_{13}$ 의 값을 구하랍니다. 가보죠.

(가)조건에서  $S_n$ 은  $n=7, n=8$ 에서 최솟값을 갖는다고 합니다. 먼저  $n=7, n=8$ 에서 최솟값이라는 건 일단 값이 같다는 거죠?  $S_7 = S_8$ 인데  $S_7 = a_1 + \dots + a_7$ 이고  $S_8 = a_1 + \dots + a_7 + a_8$ 이므로  $a_8 = 0$ 입니다.

$a_n = a + (n-1)d$ 로 설정하면( $a$ 는 첫항,  $d$ 는 공차)  $a + 7d = 0$ 이고  $a = -7d$ 이네요.  $a_n = (n-8)d$ 입니다.

그리고  $a_n$ 은 사실상  $n$ 에 대한 일차식이고,  $S_n$ 은  $\frac{-7d + (n-8)d}{2} \times n = \frac{n(n-15)d}{2}$ 이므로 사실상 최고차항의

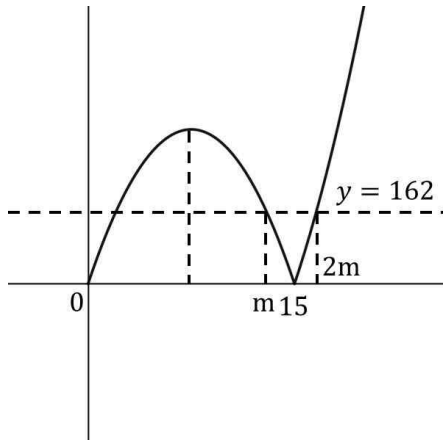
계수가  $\frac{d}{2}$ 인 이차함수로 볼 수 있어요. 이때 최솟값을 가져야 하니까  $d$ 는 양수겠죠.  $n=0, n=15$ 에서  $n$ 축과 만나구요.



대충 이렇게 되겠어요.

2) 절댓값 함수

이때  $|S_m| = |S_{2m}| = 162$ 인 자연수  $m(m > 8)$ 이 존재한다고 합니다. 함수에 절댓값이 있네요? 접어 올려봅시다.



이렇게 됩니다.

그러면  $n = m$  부분은 아래에서 올라오게 된 거죠?  $S_n$ 은 기본적으로 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 형태니까요. 따라서  $S_m = -162$ 이고  $S_{2m} = 162$ 입니다.

$S_n = \frac{d}{2}n(n-15)$ 이죠? 각각 넣어봅시다.  $\frac{d}{2}m(m-15) = -162$ ,  $dm(2m-15) = 162$ 입니다. 다시 정리해보면

$dm^2 - 15dm = -324$ 이고  $2dm^2 - 15dm = 162$ 이네요. 따라서  $dm^2 = 486$ ,  $dm = -54$ 이고

$m = 9$ ,  $d = 6$ 입니다.  $a_n = 6(n-8)$ 이고  $a_{13} = 30$ 이네요.

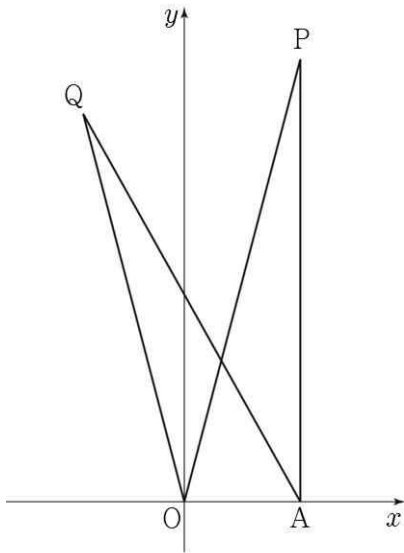
7. 좌표평면 위의 두 점  $O(0, 0)$ ,  $A(2, 0)$ 과  $y$ 좌표가 양수인 서로 다른 두 점  $P$ ,  $Q$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $\overline{AP} = \overline{AQ} = 2\sqrt{15}$  이고  $\overline{OP} > \overline{OQ}$  이다.

(나)  $\cos(\angle OPA) = \cos(\angle OQA) = \frac{\sqrt{15}}{4}$

사각형  $OAPQ$ 의 넓이가  $\frac{q}{p}\sqrt{15}$  일 때,  $p \times q$ 의 값을 구하시오.

(단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [2023년 4월 21]



7. 정답 22 [2023년 4월 21]

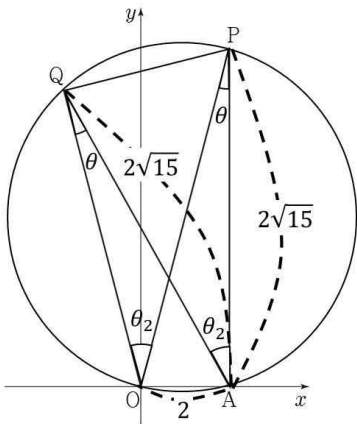
1) 그림 있으면 그림 보면서, 조건해석

그림과 같이  $O(0, 0)$ ,  $A(2, 0)$ 과  $P$ ,  $Q$ 가 있습니다.

일단 점들이 있는 형태를 보세요. 뭔가 원주각을 쓰면 좋을 것 같은 느낌이 들지 않나요? 일단 그렇게 되려면 점들이 모두 한 원 위의 있어야 할 것 같아요.

이때 (가)조건에서  $\overline{AP} = \overline{AQ} = 2\sqrt{15}$  이고  $\overline{OP} > \overline{OQ}$  이라네요. 그리고 (나)조건에서는

$\cos(\angle OPA) = \cos(\angle OQA) = \frac{\sqrt{15}}{4}$  이라고 하구요. 이거 (나)조건에서 나온 각들을 원주각으로 이용할 수 있겠네요! 어차피 우리는 사각형  $OAPQ$ 의 넓이까지 구해야 하니까 미리 선을 이어서 사각형을 만들어 놓을게요.



일단 이렇게 설정해놓을게요.

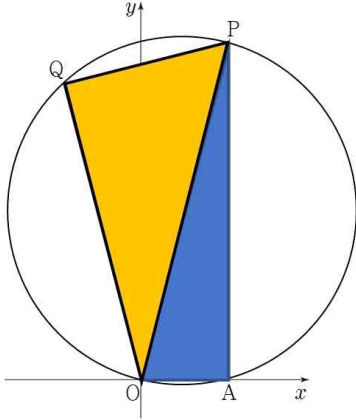
일단 코사인부터 해결해보죠. 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{(2\sqrt{15})^2 + \overline{OQ}^2 - 2^2}{2 \times 2\sqrt{15} \times \overline{OQ}} = \frac{(2\sqrt{15})^2 + \overline{OP}^2 - 2^2}{2 \times 2\sqrt{15} \times \overline{OP}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

이고 정리하면  $(x-7)(x-8)=0$ 의 방정식의

두 근이  $\overline{OQ}$ 와  $\overline{OP}$ 가 됩니다. 이때  $\overline{OP} > \overline{OQ}$ 이라고 했으니까  $\overline{OQ} = 7$ ,  $\overline{OP} = 8$ 이 되겠네요.

이제 사각형의 넓이를 구해야 하는데, 직사각형이 아니니까 삼각형 두 개로 쪼개서 구하면 좋을 것 같죠? 근데 하나는 직각삼각형으로 나와 있으니까 이거랑 나머지를 해서 구해봅시다.



일단 파란색 부분은 밑변의 길이가 2이고 높이가  $2\sqrt{15}$ 인 삼각형이므로 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{15} = 2\sqrt{15} \text{입니다.}$$

2-1) 그림 있으면 그림 보면서

이제 노란색 부분을 구해보죠. 먼저  $\overline{OQ} = 7$ 는 알고 있으니까 그림에 표시해놓은  $\sin \theta_2$ 를 알아야 합니다. 이때 원주각을 이용하면 그림과 같이  $\theta_2$ 를 파악할 수 있죠. 이때 삼각형 OQP와 AQP는 같은 변을 공유하고 두

$$\text{변의 길이를 알고 있으니까 } \cos \theta_2 = \frac{(2\sqrt{15})^2 + (2\sqrt{15})^2 - \overline{QP}^2}{2 \times 2\sqrt{15} \times 2\sqrt{15}} = \frac{7^2 + 8^2 - \overline{QP}^2}{2 \times 7 \times 8} \text{ 이고 } \overline{QP} = \sqrt{15} \text{입니다.}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{7}{8} \text{ 이고 } \cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 = 1 \text{ 에 의해 } \sin \theta_2 = \frac{\sqrt{15}}{8} \text{입니다. 따라서 삼각형의 넓이는}$$

$$\frac{1}{2} \times 7 \times \sin \theta_2 \times 8 = \frac{7\sqrt{15}}{2} \text{입니다. 아까 구한 파란색과 더하면 } \frac{11}{2} \sqrt{15} \text{ 네요. } p = 2, q = 11 \text{ 이므로}$$

$$p \times q = 22 \text{입니다.}$$

2-2) 그림 있으면 그림 보면서

삼각형이 원에 내접하니까 사인법칙도 사용할 수 있겠네요.  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 을 이용하면  $\sin \theta = \frac{1}{4}$ 이고

사인법칙에 의해  $\frac{\overline{OA}}{\sin \theta} = 8 = 2R$ 입니다. 어? 그런데 8이라는 숫자는  $\overline{OP} = 8$ 에서 봤잖아요? 그럼 이게

저름이네요. 그리고 우리가 구할 노란색 삼각형 OQP는 직각삼각형이구요. 이미  $\overline{OQ} = 7$ 는 알고 있으니까  $\overline{QP}$ 만 구하면 되겠어요.

이때 직각삼각형 OQP에서 빗변과 높이를 알잖아요?  $\overline{OQ} = 7, \overline{OP} = 8$ 를 알고 있으니까 피타고라스의 정리에



의해  $7^2 + \overline{QP}^2 = 8^2$ 이고  $\overline{QP} = \sqrt{15}$ 입니다. 따라서 삼각형의 넓이는  $\frac{7}{2} \sqrt{15}$ 이고 아까 구한 파란색과 더하면  $\frac{11}{2} \sqrt{15}$ 네요.  $p = 2$ ,  $q = 11$ 이므로  $p \times q = 22$ 입니다.

8. 두 상수  $a, b(b \neq 1)$ 과 이차함수  $f(x)$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수  $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 도함수  $g'(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(나)  $|x| < 2$ 일 때,  $g(x) = \int_0^x (-t + a)dt$ 이고

$|x| \geq 2$ 일 때,  $|g'(x)| = f(x)$ 이다.

(다) 함수  $g(x)$ 는  $x = 1, x = b$ 에서 극값을 갖는다.

$g(k) = 0$ 을 만족시키는 모든 실수  $k$ 의 값의 합이  $p + q\sqrt{3}$ 일 때,  $p \times q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는 유리수이다.)

[2023년 4월 22]

8. 정답 32 [2023년 4월 22]

1) 조건해석, 정적분의 위끝에 변수가 있는 경우, 절댓값 함수

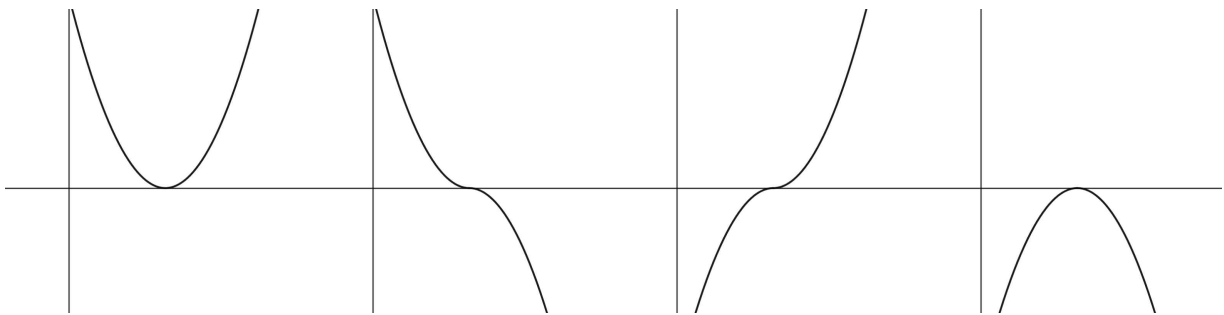
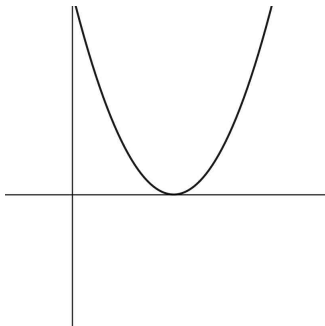
일단 이차함수  $f(x)$ 와  $g(x)$ 가 있는데 (가)조건에서  $g(x)$ 는 미분가능하고 도함수는 연속입니다.

(나)조건을 정리해보면 결국

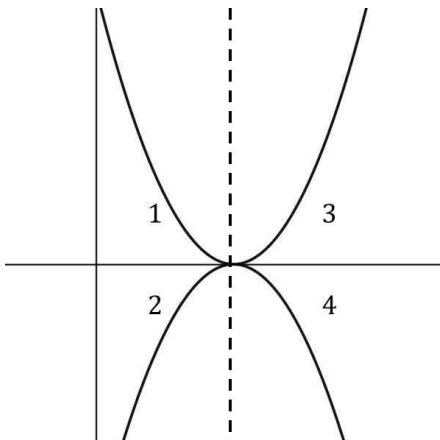
$$-2 < x < 2 \text{ 일 때는 } g(0)=0, g'(x)=-x+a \text{ 이고,}$$

$$x \geq 2, x \leq -2 \text{ 일 때는 } |g'(x)|=f(x) \text{ 이라는 거죠.}$$

$|g'(x)|=f(x)$ 이라는 건  $g'(x)$ 가  $f(x)$ 를 따라가는데 아래로 접는 것도 가능하다는 말이에요. 다시 말하자면



$g(x)$ 는 이 네 가지 형태가 모두 가능합니다. 어차피 절댓값으로 올리면  $f(x)$ 랑 똑같이 되거든요. 그러니까 다시 말하자면



이렇게 1, 2번 중에서 하나를 고르고, 3, 4번 중에서 하나를 고르면 되는

함수인 거예요. 이때 주의해야 할 점은 절댓값을 씌운 결과가  $f(x)$ 이기 때문에 범위 내에서는  $f(x)$ 는 무조건  $x$ 축 위에 있어야 합니다.  $x$ 축 아래에 있으면 음수라는 말인데 절댓값을 씌우면 음수가 불가능하잖아요.

2) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

(다)조건에서  $g(x)$ 가  $x=1$ ,  $x=b$ 에서 극값을 갖는다고 합니다. 일단  $x=1$ 에서 극값을 가지니까  $g'(1)=0$ 이죠? 따라서  $a=1$ 입니다.  $-2 < x < 2$ 에서  $g'(x) = -(x-1)$ 이네요.

이때 도함수는 연속이어야 하니까  $g'(-2) = f(-2) = 3$ ,  $g'(2) = -1$ 이어야 하겠죠? 당연히  $|g'(2)| = f(2) = 1$ 이구요.

$x=b$ 에서도 극값을 갖는데 이미  $g'(1)=0$ 은 있으니까  $|x| \geq 2$ 에서 조건을 만족시키는 거겠죠? 일단  $g'(b) = f(b) = 0$ 입니다.

여기서 문제는  $f(x)$ 의 개형이에요. 만약  $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수라면?  $|x| \geq 2$ 에서 무조건  $x$ 축과 만나고  $x$ 축 아래로 내려가게 됩니다. 이러면 범위 내에서  $x$ 축 위에 있어야 한다는 조건과 모순이 발생하죠? 최고차항의 계수는 양수입니다.

$f(-2) = 3$ ,  $f(2) = 1$ 이므로  $x = -2$ 에서  $f(x)$ 는 감소해야 합니다.  $f(x)$ 는 이차함수라 한 번 증가하면 계속 증가해야 하는데  $f(-2) = 3$ ,  $f(2) = 1$ 이면 감소하잖아요?

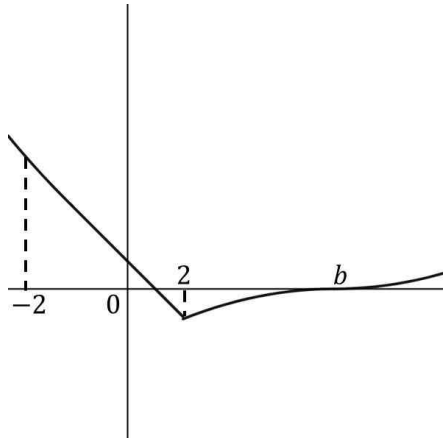
이때 이미  $f(-2)$ 의 값이 양수이므로 감소하는  $f(x)$ 의 특성상  $x < -2$ 에서  $x$ 축과 만날 수 없습니다. 따라서  $f(b) = 0$ 이 되는  $b$ 는  $x > 2$ 에 있어야 합니다.

그런데 그렇다고  $-2 < x < 2$ 에서 극소점이 있으면 안 됩니다. 그러면  $x > 2$ 에서 증가하는 형태인데  $f(2)$ 의 값이 양수라  $x$ 축과 만날 수 없거든요. 따라서  $f(b) = 0$ 이 되는  $b$ 는  $f(x)$ 가  $x$ 축과 만나게 되는 가장 작은 실근이 되고  $f(x)$ 는  $x=b$ 까지 계속 감소하는 형태입니다.

그런데 여기서 또  $f(x)$ 가  $x$ 축과 두 번 만나는 것도 불가능합니다. 그러면  $x$ 축 아래로 내려가는 부분이 생기는데  $x > 2$ 의 범위에서는  $f(x)$ 는 항상  $x$ 축 위에 있어야 한다고 했었죠?

결국  $f(x)$ 는  $x=b$ 에서  $x$ 축에 접해야 합니다.  $f(x) = k(x-b)^2$ 의 형태가 되는 거죠.

이때  $g'(x)$ 는  $f(x)$ 의 개형에서 부호를 선택할 수 있다고 했고,  $g'(2) = -1$ 이므로  $g'(x)$ 가 연속이 되기 위해서는  $2 < x < b$  부분에서  $-f(x)$ 의 형태가 되어야 합니다.



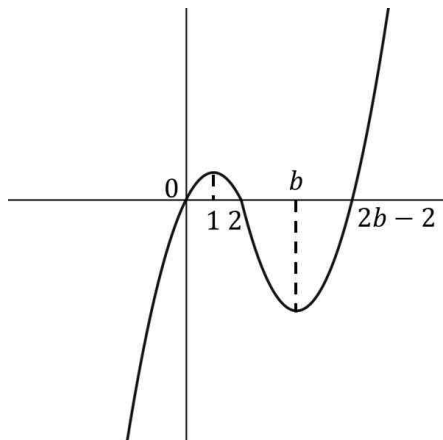
이렇게 그려지겠죠?

이제 우리가 구해야 할 건  $x$ 축과 만나는 모든 점의  $x$ 좌표의 합을 구해야 합니다. 일단  $g(0) = 0$ 을 알긴 하죠.

$-2 < x < 2$ 에서  $g'(x) = -(x-1)$ 이고 적분해서 올린 후  $g(0) = 0$ 을 넣으면  $g(x) = -\frac{1}{2}x(x-2)$ 입니다.

$g(2) = 0$ 이네요.

이제 대충 그려보면



이렇게 되겠네요.

$x = b$ 를 전후로 함수가 부호가 바뀐 관계이므로  $x > 2$ 에서  $g(x)$ 는  $x = b$ 축 대칭입니다. 따라서 우리가 구하는  $x$ 축과 만나는 점의  $x$ 좌표는 그림과 같이 구할 수 있고 합은  $2b$ 인 거죠.  $b$ 를 구해야 합니다.

$f(x) = k(x-b)^2$ 인데  $f(-2) = 3$ ,  $f(2) = 1$ 이죠? 가볼게요.  $k(b+2)^2 = 3$ ,  $k(b-2)^2 = 1$ 이고 정리하면

$kb^2 + 4kb + 4k = 3$ ,  $kb^2 - 4kb + 4k = 1$ 에  $b^2 - 8b + 4 = 0$ 입니다. 근의 공식을 이용하면  $4 \pm 2\sqrt{3}$ 입니다. 이때

$b > 2$ 이므로  $b = 4 + 2\sqrt{3}$ 이네요. 합은  $8 + 4\sqrt{3}$ 이고  $p = 8$ ,  $q = 4$ 이므로  $p \times q = 32$ 입니다.