[준킬러][미적] 6적분법

06 미적 11 부정적분

01 여러 가지 함수의 부정적분

05 여러 가지 함수5 (구간정의함수)

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 10월 17

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 10월 17

1. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x>0$일 때, $f(x)=axe^{2x}+bx^2$

(나) $x_1<x_2<0$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2)-f(x_1)=3x_2-3x_1$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2e$일 때, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $2e$ ② $4e$ ③ $6e$

④ $8e$ ⑤ $10e$

06 미적 11 부정적분

03 부정적분의 활용

03 함수 구하기3 (미분법의 역)

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 07월 19

2. 구간 $(0, \infty)$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 함수 $F(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양수 x에 대하여 $F(x)+xf(x)=(2x+2)e^x$

(나) $F(1)=2e$

$F(3)$의 값은?

① $\frac{1}{4}e^3$ ② $\frac{1}{2}e^3$ ③ e^3

④ $2e^3$ ⑤ $4e^3$

[준킬러][미적] 6적분법

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 10월 16

3. 연속함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다. $\{f(1)\}^3$ 의 값은?

> (가) $x \neq 0$ 인 실수 x 에 대하여 $\{f(x)\}^2 f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$
>
> (나) $f(0)=0$

① $2\ln2$ ② $3\ln2$ ③ $1+2\ln2$
④ $4\ln2$ ⑤ $1+3\ln2$

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 21

4. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1)$ 의 값은?

> (가) 모든 실수 x 에 대하여
> $2\{f(x)\}^2 f'(x) = \{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1)$ 이다.
>
> (나) $f\left(-\dfrac{1}{8}\right)=1$, $f(6)=2$

① $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{6}$ ② $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$
④ $\dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3}$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt[3]{3}}{6}$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 03월 17

5. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=1$
>
> (나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)g'(f(x)) = \dfrac{1}{x^2+1}$ 이다.

$f(3)$ 의 값은?

① e^3 ② e^6 ③ e^9
④ e^{12} ⑤ e^{15}

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 07월 26

6. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=0$
>
> (나) 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여
> $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = xe^x$ 이다.

$f(3)\times f(-3)$의 값을 구하시오.

06 미적 12 정적분

01 여러 가지 함수의 정적분

05 여러 가지 함수5 (조건 항등식)

[출처] 2016 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

7. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0,\ f'(0)=1$

(나) 모든 실수 $x,\ y$에 대하여 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ 이다.

$f(-1)=k(-1<k<0)$일 때, $\displaystyle\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$의 값을 k로 나타낸 것은?

① $1-k^2$ ② $1-2k$ ③ $1-k$

④ $1+k$ ⑤ $1+k^2$

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 16

8. $x>0$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여

$$2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

을 만족시킬 때, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx$의 값은?

① $\dfrac{\ln 2}{3}+\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{2\ln 2}{3}+\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{\ln 2}{3}+1$

④ $\dfrac{2\ln 2}{3}+1$ ⑤ $\dfrac{2\ln 2}{3}+\dfrac{3}{2}$

06 미적 12 정적분

01 여러 가지 함수의 정적분

06 여러가지 함수6 (곱의 미분법의 역)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 10월 14

9. 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다. $f(1)=3$, $g(1)=3$일 때,

$$\int_1^3 \left\{ \frac{f(x)}{f'(g(x))} + \frac{g(x)}{g'(f(x))} \right\} dx$$

의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0
④ 4 ⑤ 8

06 미적 12 정적분

02 치환적분과 부분적분

05 치환적분5 (삼각치환과 대칭적분)

[출처] 2002 모의_공공 교육청 고3 10월 11

10. 함수 $f(x)$가 연속일 때, 다음 중 임의의 실수 a에 대하여 $\int_0^{\frac{a}{2}} \{f(x)+f(a-x)\}dx$와 값이 같은 것은?

① $2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx$ ② $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x)dx$

③ $\int_0^a f(x)dx$ ④ $2\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx$

⑤ $\int_{-a}^a f(x)dx$

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 10월 19

11. 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때,

$\int_0^a \{f(2x)+f(2a-x)\}dx$의 값은? (단, a는 상수이다.)

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(a-x)=f(a+x)$이다.

(나) $\int_0^a f(x)dx=8$

① 12 ② 16 ③ 20

④ 24 ⑤ 28

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 03월 28

12. 함수 $f(x)=\dfrac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$에 대하여

$$a=f(\pi-x)+f(x),\ b=\int_0^\pi f(x)dx$$

일 때, $a+\dfrac{100}{\pi}b$의 값을 구하시오.

06 미적 12 정적분

02 치환적분과 부분적분

08 치환적분과 부분적분

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 10월 27

13. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$

(나) $\int_0^1 (x-1)f'(x+1)dx=-4$

$\int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하시오. (단, $f'(x)$는 연속함수이다.)

06 미적 12 정적분

02 치환적분과 부분적분

09 우함수와 기함수

[출처] 2013 모의_공공 경찰대 고3 07월 15

14. 함수 $f(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|\le 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$에 대하여

$\sum_{n=1}^{10}\int_{-n}^{n}\frac{\{f(x)\}^n}{n}dx$의 값은?

① $\frac{12}{11}$ ② $\frac{14}{11}$ ③ $\frac{16}{11}$

④ $\frac{18}{11}$ ⑤ $\frac{20}{11}$

06 미적 12 정적분

03 치환적분과 부분적분의 활용

01 활용1 (적분식의 해석)

[출처] 2001 모의_공공 사관학교 고3 07월 17

15. 두 일차식 $f(t)$, $g(t)$를 각각

$$f(t)=t\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 x dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 u du,$$

$$g(t)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 x dx+t\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 y dy$$

라 할 때, 방정식 $f(t)=g(t)$의 근은?

① $\frac{\pi-2}{\pi+2}$ ② $\frac{\pi+2}{\pi-2}$ ③ $\frac{\pi+3}{\pi-3}$

④ $\frac{\pi+2}{2\pi-4}$ ⑤ $\frac{\pi+4}{\pi-2}$

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 09월 미분과 적분 29

16. 함수 $f(x)=\sin\dfrac{x^2}{2}$ 에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $0<x<1$ 일 때, $x^2\sin\dfrac{x^2}{2}<f(x)<\cos\dfrac{x^2}{2}$ 이다.

ㄴ. 구간 $(0,\ 1)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 는 위로 볼록하다.

ㄷ. $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \le \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[출처] 2009 모의_공공 사관학교 고3 07월 13

17. 닫힌구간 $[0,\ 1]$ 에서 $0<f(x)<1$ 를 만족시키는 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(a)=a$ 인 실수 a 가 열린구간 $(0,\ 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

ㄴ. $f'(b)<1$ 인 실수 b 가 열린구간 $(0,\ 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. 열린구간 $(0,\ 1)$ 의 모든 x 에 대하여
$\displaystyle\int_0^x f(t)dt<x$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 11월 15

18. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}dt$$

일 때, $(f \circ f)(a)=\ln 5$를 만족시키는 실수 a의 값은?

① $\ln 11$ ② $\ln 13$ ③ $\ln 15$

④ $\ln 17$ ⑤ $\ln 19$

06 미적 12 정적분

03 치환적분과 부분적분의 활용

02 활용2 (적분식의 모양 변경)

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 11월 29

19. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 정적분

$$\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$$

의 값을 k라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 \{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}dx=-k$

ㄴ. $f(0)=f(1)$이고 $g(0)=g(1)$이면 $k=0$이다.

ㄷ. $f(x)=\ln(1+x^4)$이고 $g(x)=\sin \pi x$이면, $k=0$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 미분과 적분 28

20. 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$가 있다. 모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이고,

$$f(a)=0,\ \int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx=k\,(a>0,\ 0<k<1)$$

일 때, $\int_{a}^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$의 값을 k로 나타낸 것은?

① $\frac{k^2}{4}$ ② $\frac{k^2}{2}$ ③ k^2

④ k ⑤ $2k$

[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 06월 19

21. 정의역이 $\{x\,|\,x>-1\}$인 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\frac{1}{(1+x^3)^2}$이고, 함수 $g(x)=x^2$일 때,

$\int_{0}^{1}f(x)g'(x)dx=\frac{1}{6}$이다. $f(1)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{5}{18}$

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{7}{18}$

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 09월 30

22. 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$g(e^x)=\begin{cases} f(x) & (0\le x<1) \\ g(e^{x-1})+5 & (1\le x\le 2) \end{cases}$$

를 만족시키고, $\int_{1}^{e^2}g(x)dx=6e^2+4$이다.

$\int_{1}^{e}f(\ln x)dx=ae+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

(단, a, b는 정수이다.)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 21

23. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \le x < 1$일 때 $f(x)=\dfrac{(x^2-1)^2}{x^4+1}$이다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx = 4\int_{0}^{1} f(x)dx$

ㄴ. $1 < x < 2$일 때 $f'(x) > 0$이다

ㄷ. $\displaystyle\int_{1}^{3} x|f'(x)|dx = 4$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 25

24. 도함수가 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.

(나) $f(\pi)=0$

(다) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x^2 f'(x)dx = -8\pi$

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x+\cos x)f(x)dx = k\pi$일 때, k의 값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 17

25. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x^4-1$이다.
(나) $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2 g'(x)\,dx=120$

$\int_{-1}^{1} x^3 f(x)\,dx$의 값은?

① 12 ② 15 ③ 18

④ 21 ⑤ 24

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 07월 20

26. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(1+x)=f(1-x),\ f(2+x)=f(2-x)$$

를 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 $f'(x)$가 연속이고, $\int_{2}^{5} f'(x)dx=4$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.

ㄴ. $f(1)-f(0)=4$

ㄷ. $\int_{0}^{1} f(f(x))f'(x)dx=6$일 때, $\int_{1}^{10} f(x)dx=\frac{27}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 04월 27

27. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$가 $f(x)$의 역함수이고 $g(2)=1$, $g(5)=5$일 때, $\int_{1}^{5} \frac{40}{g'(f(x))\{f(x)\}^2}dx$의 값을 구하시오.

[준킬러][미적] 6적분법

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 28

28. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(-x)=f(x)$
> (나) $f(x+2)=f(x)$

$\int_{-1}^{5} f(x)(x+\cos 2\pi x)dx=\frac{47}{2}$, $\int_{0}^{1} f(x)dx=2$일 때,

$\int_{0}^{1} f'(x)\sin 2\pi x dx$의 값은?

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{5}{12}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 미적분 29

29. 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)+6}{e^{x}}=1$
> (나) $f(\ln 2)=0$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$\int_{0}^{14} g(x)dx=p+q\ln 2$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.)

06 미적 12 정적분

03 치환적분과 부분적분의 활용

03 활용3 (함수 구하기)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

30. 두 상수 a, b와 함수 $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2+1}$에 대하여 함수

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ f(b-x) & (x \ge a) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서

미분가능할 때, $\displaystyle\int_a^{a-b} g(x)\,dx$의 값은?

① $\dfrac{1}{2}\ln 5$ ② $\ln 5$ ③ $\dfrac{3}{2}\ln 5$

④ $2\ln 5$ ⑤ $\dfrac{5}{2}\ln 5$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 29

31. 함수 $f(x)=\sin(ax)\,(a\neq 0)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

> (가) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(x)\,dx \ge \frac{1}{2}$
>
> (나) $0<t<1$인 모든 실수 t에 대하여
>
> $$\int_0^{3\pi} |f(x)+t|\,dx = \int_0^{3\pi} |f(x)-t|\,dx$$
>
> 이다.

06 미적 12 정적분

03 치환적분과 부분적분의 활용

04 활용4 (정의된 함수)

[출처] 2006 모의_공공 교육청 고3 10월 미분과 적분 28

32. $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx \, (n=1, 2, 3, \cdots)$으로 정의할 때,

옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a_1 + a_3 = \frac{1}{2}$

ㄴ. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{100} a_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{51}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 03월 16

33. 함수 $f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n} + \cos 2\pi x}{x^{2n} + 1}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_{-x}^{2} f(t)dt + \int_{2}^{x} tf(t)dt$$

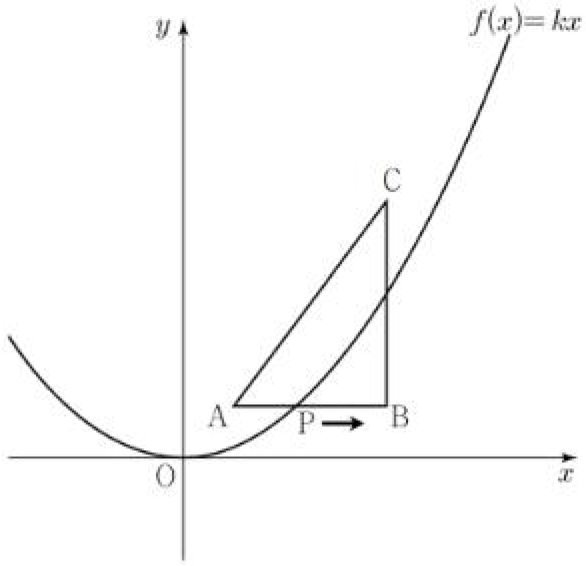
라 할 때, $g(-2) + g(2)$의 값은?

① -2 ② 0 ③ 2

④ 4 ⑤ 6

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 04월 20

34. 그림과 같이 세 점 A(1, 1), B(4, 1), C(4, 5)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 점 P는 점 A를 출발하여 삼각형 ABC의 변을 따라 점 B를 지나 점 C까지 매초 1의 일정한 속력으로 움직이고 이차함수 $f(x)=kx^2$의 그래프가 점 P를 지난다. t초 후 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기를 $g(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, 점 P는 한 번 지나간 점은 다시 지나가지 않는다.)



<보 기>

ㄱ. $0 \le t < 3$일 때 점 P의 좌표는 $(t+1, 1)$

ㄴ. $g(t)=\dfrac{2}{t+1}$ $(0 \le t < 3)$

ㄷ. $\displaystyle\int_0^7 g(t)dt = 6+4\ln 2$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 21

35. 실수 t에 대하여 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(t,\ e^t)$에서의 접선의 방정식을 $y=f(x)$라 할 때, 함수 $y=|f(x)+k-\ln x|$가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 k의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 두 실수 $a,\ b(a<b)$에 대하여 $\displaystyle\int_a^b g(t)dt=m$이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $m<0$이 되도록 하는 두 실수 a, $b(a<b)$가 존재한다.

ㄴ. 실수 c에 대하여 $g(c)=0$이면 $g(-c)=0$이다.

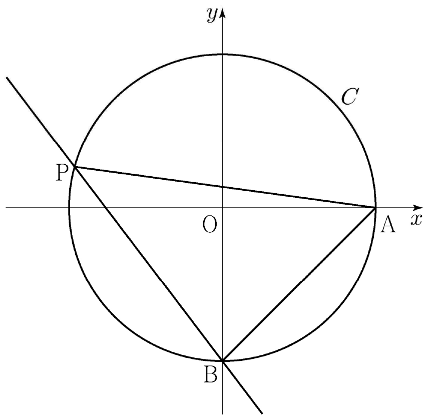
ㄷ. $a=\alpha$, $b=\beta$ $(\alpha<\beta)$일 때 m의 값이 최소이면 $\dfrac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)}<-e^2$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[준킬러][미적] 6적분법

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 28

36. 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 C와 두 점 A(2, 0), B(0, -2)가 있다. 원 C 위에 있고 x좌표가 음수인 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 하자. 점 Q(0, $2\cos\theta$)에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 R라 하고, 두 점 P와 R사이의 거리를 $f(\theta)$라 할 때, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta$의 값은?



① $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$

④ $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}-3}{2}$

06 미적

12 정적분

03 치환적분과 부분적분의 활용

05 활용5 (그래프 추론)

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 미분과 적분 29

37. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^2 f(x)dx$의 최솟값은?

> (가) $f(0)=1,\ f'(0)=1$
>
> (나) $0<a<b<2$이면 $f'(a)\le f'(b)$이다.
>
> (다) 구간 $(0,1)$에서 $f''(x)=e^x$이다.

① $\frac{1}{2}e-1$ ② $\frac{3}{2}e-1$ ③ $\frac{5}{2}e-1$

④ $\frac{7}{2}e-2$ ⑤ $\frac{9}{2}e-2$

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 09월 21

38. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |\sin x|-\sin x & \left(-\frac{7}{2}\pi \le x \le 0\right) \\ \sin x-|\sin x| & \left(0 \le x \le \frac{7}{2}\right) \end{cases}$$

라 하자. 닫힌 구간 $\left[-\frac{7}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt \ge 0$이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 α, 최댓값을 β라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은?

(단, $-\frac{7}{2}\pi \le \alpha \le \frac{7}{2}\pi$)

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ $\frac{5}{2}\pi$

④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ $\frac{9}{2}\pi$

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 04월 27

39. 모든 실수 x에 대하여 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.
>
> (나) $0 \le x \le 1$일 때, $f(x)=\sin \pi x+1$이다.
>
> (다) $1 < x < 2$일 때, $f'(x) \ge 0$이다.

$\int_0^6 f(x)dx=p+\frac{q}{\pi}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 정수이다.)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 20

40. 함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고, 치역이 집합 $\{0,\ 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은?

> 함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
>
> $$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx=2,\ \int_{-1}^{1} x\,h(x)\,dx=-\frac{1}{32}$$
>
> 이다.

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

06 미적

12 정적분

04 정적분으로 정의된 함수

02 정적분으로 정의된 함수2 (적분함수)

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 10월 미분과 적분 28

41. 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$가

$$f(x)=e^x-1+\int_0^x f(t)dt$$

를 만족할 때, <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, e는 자연로그의 밑)

> <보 기>
>
> ㄱ. $f(0)=0$이다.
>
> ㄴ. $f'(0)=0$이다.
>
> ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>f(x)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 09월 20

42. 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은?

(가) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = 1$

(나) $\cos x \int_0^x f(t)dt = \sin x \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$

(단, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$)

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 11월 28

43. 함수 $f(x) = 3(x-1)^2 + 5$에 대하여 함수 $F(x)$를 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$라 하자. 미분 가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $F(g(x)) = \frac{1}{2}F(x)$를 만족시킨다. $g'(2) = p$일 때, $30p$의 값을 구하시오.

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 10월 15

44. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

(가) $\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)dt = \{g(x) + a\}\sin x - 2$

(나) $g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt \cos x + 3$

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 11월 21

45. 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여

대칭이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_1^{x+1} f(t)dt$이다.

$f(1)=1$일 때, $\pi^2\displaystyle\int_0^1 xf(x+1)dx$의 값은?

① $2(\pi-2)$ ② $2\pi-3$ ③ $2(\pi-1)$

④ $2\pi-1$ ⑤ 2π

06 미적

12 정적분

04 정적분으로 정의된 함수

03 정적분으로 정의된 함수3 (피적분함수의 변수와 상수의 구분)

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 10월 미분과 적분 29

46. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{d}{dx}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\cos x\cdot f(t)dt$$

라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $g(0)=0$

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=-g(x)$이다.

ㄷ. $g'(c)=0$인 실수 c가 열린구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 적어도 두 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 09월 미분과 적분 28

47. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 t에 대하여

$$\int_0^2 xf(tx)dx = 4t^2$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 27

48. 함수 $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ 에 대하여

$$F(x) = \int_0^x tf(x-t)dt \,(x \geq 0)$$

일 때, $F'(a) = \ln 10$ 을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.

06 미적 12 정적분

04 정적분으로 정의된 함수

05 활용2 (적분식의 모양 변경)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 03월 16

49. 연속함수 $f(x)$가

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 12,\ \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^{-1} xf(x)dx$$

를 만족시킨다. $\int_{-1}^x f(t)dt = F(x)$라 할 때, $\int_{-1}^1 F(x)dx$ 의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 07월 20

50. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x)=\int_{1}^{x}\frac{f(t^2+1)}{t}dt$
>
> (나) $\int_{2}^{5}f(x)dx=16$

$g(2)=3$일 때, $\int_{1}^{2}xg(x)dx$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

06 미적

12 정적분

04 정적분으로 정의된 함수

06 활용3 (도함수의 활용)

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 11월 미분과 적분 29

51. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_{a}^{x}2+\sin(t^2)\mathrm{dt}$$

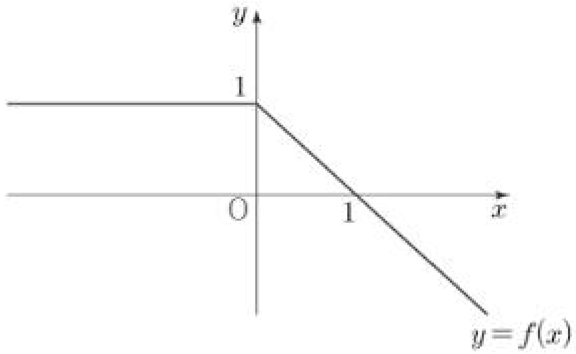
라 하자. $f''(a)=\sqrt{3}a$일 때, $(f^{-1})'(0)$의 값은?

(단, a는 $0<a<\sqrt{\frac{\pi}{2}}$인 상수이다.)

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$
④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 04월 20

52. 그림은 함수 $f(x)=\begin{cases} 1 & (x \le 0) \\ -x+1 & (x > 0) \end{cases}$ 의 그래프이다.



실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_{-1}^{x} e^t f(t)dt$ 라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $g(0)=1-\frac{1}{e}$

ㄴ. 함수 $g(x)$는 극댓값 $e-\frac{1}{e}$ 을 갖는다.

ㄷ. 방정식 $g(x)=0$의 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 11월 20

53. 함수 $f(x)=e^{-x}\int_{0}^{x} \sin(t^2)dt$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(\sqrt{\pi})>0$

ㄴ. $f'(a)>0$을 만족시키는 a가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

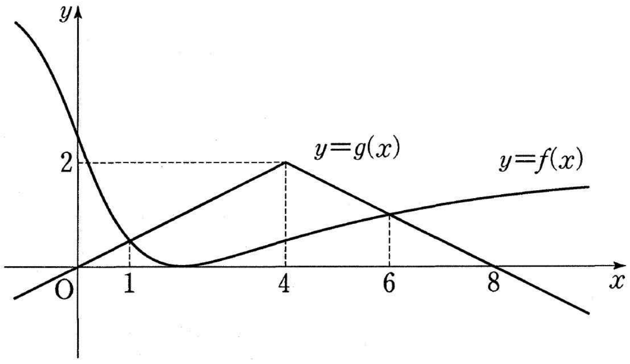
ㄷ. $f'(b)=0$을 만족시키는 b가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 06월 20

54. 함수 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}$ 와 함수 $g(x)=\frac{4-|x-4|}{2}$ 의

그래프가 그림과 같다.



$0\le a\le 8$ 인 a에 대하여 $\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$ 의

최솟값은?

① $14-5\ln 5$ ② $15-5\ln 10$ ③ $15-5\ln 5$

④ $16-5\ln 10$ ⑤ $16-5\ln 5$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 10월 20

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 10월 20

55. 함수 $f(x)=\int_x^{x+2}|2^t-5|dt$의 최솟값을 m이라 할

때, 2^m의 값은?

① $\left(\frac{5}{4}\right)^8$ ② $\left(\frac{5}{4}\right)^9$ ③ $\left(\frac{5}{4}\right)^{10}$

④ $\left(\frac{5}{4}\right)^{11}$ ⑤ $\left(\frac{5}{4}\right)^{12}$

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 20

56. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) > 0$
(나) $\ln f(x) + 2\int_0^x (x-t)f(t)dt = 0$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $x > 0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다.

ㄷ. 함수 $F(x)$를 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$라 할 때, $f(1) + \{F(1)\}^2 = 1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 20

57. 함수 $f(x) = \sin(\pi\sqrt{x})$에 대하여 함수

$$g(x) = \int_0^x tf(x-t)dt \ (x \geq 0)$$

이 $x = a$에서 극대인 모든 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $k^2 < a_6 < (k+1)^2$인 자연수 k의 값은?

① 11 ② 14 ③ 17
④ 20 ⑤ 23

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 19

58. 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int_0^x \ln f(t)dt$$

일 때, 함수 $g(x)$와 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극값 2를 갖는다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $g'(-x)=g'(x)$이다.

$\int_{-1}^{1} \frac{xf'(x)}{f(x)}dx$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0

④ 2 ⑤ 4

06 미적 12 정적분

04 정적분으로 정의된 함수

07 활용4 (함수 구하기)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 07월 20

59. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int_0^x \frac{t}{f(t)}dt$$

일 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $g'(-x)=-g'(x)$이다.

(나) 점 $(1, g(1))$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

$g(1)$의 값은?

① $\frac{1}{5}\ln 2$ ② $\frac{1}{4}\ln 2$ ③ $\frac{1}{3}\ln 2$

④ $\frac{1}{2}\ln 2$ ⑤ $\ln 2$

06 미적 12 정적분

04 정적분으로 정의된 함수

08 활용5 (정의된 함수)

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 04월 27

60. 자연수 n에 대하여 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\int_1^x \frac{n-\ln t}{t}dt$$

의 최댓값을 $g(n)$이라 하자. $\sum_{n=1}^{12} g(n)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 미적분 29

61. 함수 $f(x)=e^x+x-1$과 양수 t에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x \{t-f(s)\}ds$$

가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가질 때, 실수 α의 값을 $g(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt$의 값을 구하시오.

06 미적 12 정적분

04 정적분으로 정의된 함수

09 활용5 (추론과 해석)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

62. 양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.

(나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점 $(0, 0)$, $(t, f(t))$, $(t+1, f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\dfrac{t+1}{t}$이다.

(다) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=2$

$\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 03월 20

63. 함수 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \sin(\pi\cos t)dt$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f'(0)=0$

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $f(\pi)=0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 18

64. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x>0) \end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $x \leq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=0$이다.

ㄴ. $g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $g(a) \geq 1$인 실수 a가 존재한다.

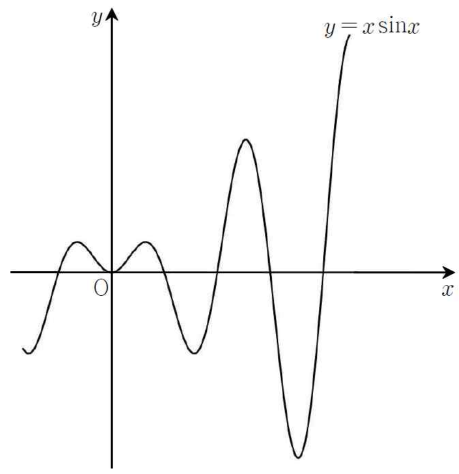
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

65. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_0^x |\,t\sin t\,|dt-\left|\int_0^x t\sin t dt\right|$$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $f(2\pi)=2\pi$

ㄴ. $\pi<\alpha<2\pi$인 α에 대하여 $\int_0^\alpha t\sin t dt=0$이면 $f(\alpha)=\pi$이다.

ㄷ. $2\pi<\beta<3\pi$인 β에 대하여 $\int_0^\beta t\sin t dt=0$이면 $\int_\beta^{3\pi} f(x)dx=6\pi(3\pi-\beta)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 29

66. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $-1 \le x \le 1$에서 $f(x) < 0$이다.
> (나) $\int_{-1}^{0} |f(x)\sin x|dx = 2$, $\int_{0}^{1} |f(x)\sin x|dx = 3$

함수 $g(x) = \int_{-1}^{x} |f(t)\sin t|dt$에 대하여

$$\int_{-1}^{1} f(-x)g(-x)\sin x dx = \frac{q}{p}$$

이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 28

67. 닫힌구간 $[0, 4\pi]$에서 연속이고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{0}^{4\pi} |f(x)|dx$의 최솟값은?

> (가) $0 \le x \le \pi$일 때, $f(x) = 1 - \cos x$이다.
> (나) $1 \le n \le 3$인 각각의 자연수 n에 대하여
> $f(n\pi + t) = f(n\pi) + f(t)$ $(0 < t \le \pi)$
> 또는
> $f(n\pi + t) = f(n\pi) - f(t)$ $(0 < t \le \pi)$
> 이다.
> (다) $0 < x < 4\pi$에서 곡선 $y = f(x)$의 변곡점의 개수는 6이다.

① 4π ② 6π ③ 8π
④ 10π ⑤ 12π

06 미적 13 정적분의활용

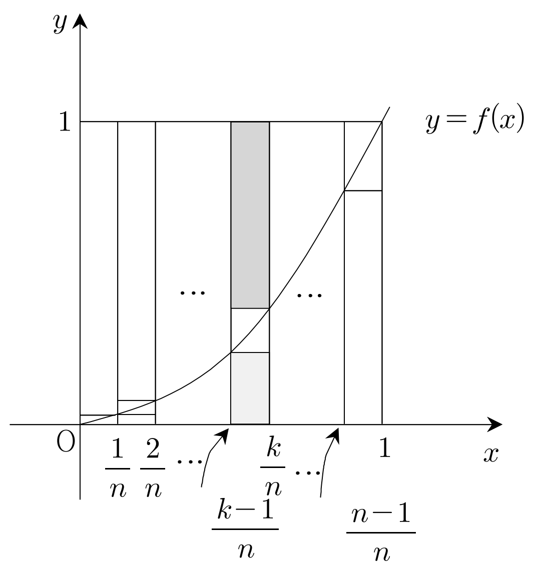
01 정적분과 급수

01 구분구적법

[출처] 2007 모의_공공 사관학교 고3 07월 8

68. 함수 $f(x)=x^3$에 대하여 A_n, B_n을 다음과 같이 정의하자.

$$A_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{n}\ ,\ B_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{1-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$$



이 때, [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n+B_n)=1$

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}B_n=\frac{3}{4}$

ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n-B_n)=-\frac{1}{4}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 11

69. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[0, 1]$을 n등분한 각 분점 (양 끝점도 포함)을 차례로

$0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=1$

이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $n=2m$ (m은 자연수)이면
$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m}\le\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 이다.

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left\{\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right\}=\int_0^1 f(x)dx$

ㄷ. $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}\le\int_0^1 f(x)dx\le\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{n}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 04월 14

70. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=1,\ f(1)=2$
>
> (나) $f'(x)>0,\quad f''(x)>0$ (단, $0<x<1$)

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $y=\{f(x)\}^2$의 그래프는 구간 $(0,1)$에서 아래로 볼록하다.

ㄴ. $\displaystyle\int_0^1\{f(x)+f(1-x)\}dx<3$

ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2+\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2}{2}\cdot\frac{1}{n}\geq\int_0^1\{f(x)\}^2dx$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

06 미적

13 정적분의활용

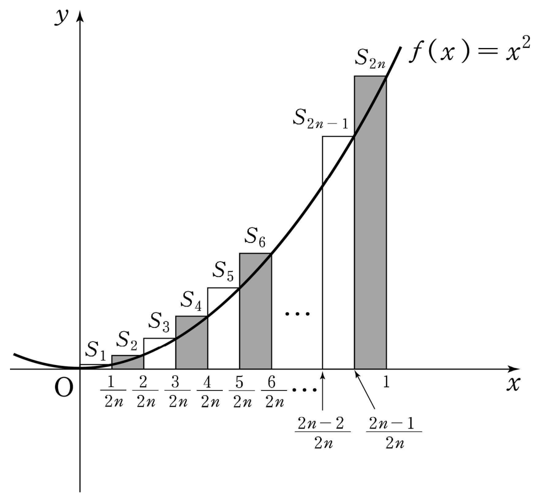
01 정적분과 급수

02 정적분과 급수1 (다항함수)

[출처] 2006 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 12

71. 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 그림과 같이 구간 $[0,1]$을 $2n$등분한 후, 구간 $\left[\frac{k-1}{2n},\ \frac{k}{2n}\right]$를 밑변으로 하고 높이가 $f\left(\frac{k}{2n}\right)$인 직사각형의 넓이를 S_k라 하자.

(단, n은 자연수이고 $k=1,2,3,\cdots,2n$이다.)



<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k=\int_0^{\frac{1}{2}}x^2dx$

ㄴ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(S_{2k}-S_{2k-1})=0$

ㄷ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_{2k}=\frac{1}{2}\int_0^1x^2dx$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2015 모의_공공 경찰대 고3 07월 15

72. 함수 f는 임의의 실수 x, y에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$f(1)>0,\ f(xy)=f(x)f(y)-x-y$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{6}{\sqrt{n}}f\left(2+\frac{4k}{n}\right)\right\}^2$ 의 값은?

① 510 ② 624 ③ 756
④ 832 ⑤ 948

06 미적

13 정적분의활용

01 정적분과 급수

04 정적분과 급수3 (나열된 항)

[출처] 2019 모의_공공 경찰대 고3 07월 25

73. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{[x]^2+x}{[x]} & (1\le x<3)\\ \dfrac{7}{2} & (x\ge 3)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $f(x)$와 $a\ge 3$인 실수 a에 대하여

$$g(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(a)+f\left(a-\frac{2}{n}\right)+f\left(a-\frac{4}{n}\right)+\cdots+f\left(a-\frac{2(n-1)}{n}\right)}{n}$$

이라 할 때, $8\times g(3)$의 값을 구하시오.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

06 미적 13 정적분의활용

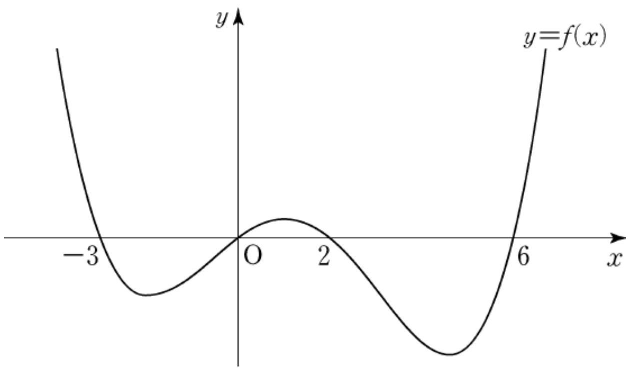
01 정적분과 급수

05 정적분과 급수4 (활용)

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 06월 19

74. 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(m+\frac{k}{n}\right)<0$을 만족시키는 정수 m의 개수는?



① 3 ② 4 ③ 5

④ 6 ⑤ 7

06 미적 13 정적분의활용

01 정적분과 급수

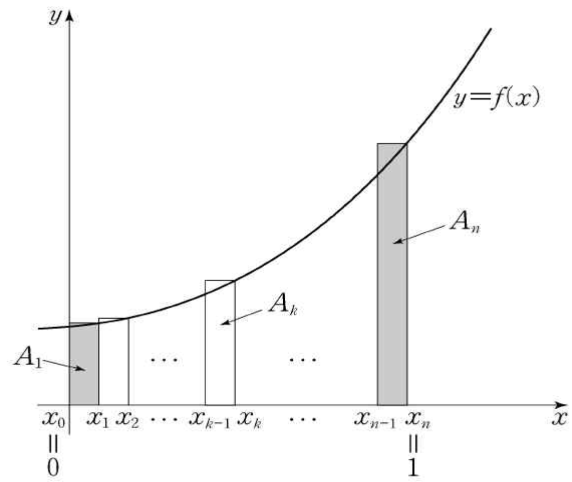
06 정적분과 급수5 (함수에서 식 세우기)

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 11월 21

75. 함수 $f(x)=x^2+ax+b\,(a\geq 0,\ b>0)$가 있다. 그림과 같이 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 1]$을 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로

$$0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=1$$

이라 하자. 닫힌구간 $[x_{k-1},\ x_k]$를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이를 A_k라 하자. $(k=1,\ 2,\ \cdots,n)$



양 끝에 있는 두 직사각형의 넓이의 합이

$$A_1+A_n=\frac{7n^2+1}{n^3}$$

일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k$의 값을 구하시오.

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 10

76. $F'(x)=f(x)$인 이차함수 $y=f(x)$와 임의의 두 실수 a, c에 대하여 서로 다른 두 점 A(a, F(a)), B(a+c, F(a+c))를 지나는 직선의 기울기와 같은 값을 갖는 것은?

① $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{2n}\right)\frac{c}{n}$

② $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{1}{n}$

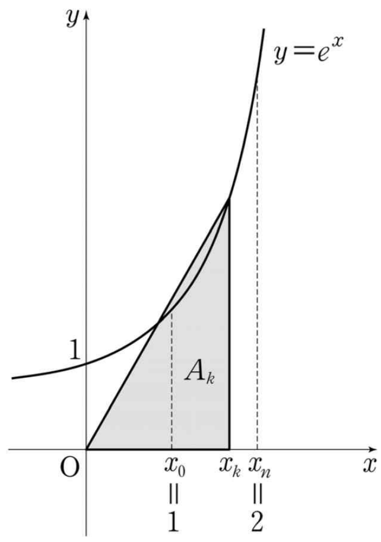
③ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+c+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

④ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(c+\frac{ak}{n}\right)\frac{1}{2n}$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}\right)\frac{2}{n}$

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 18

77. 함수 $f(x)=e^x$이 있다. 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌 구간 $[1, 2]$를 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $1=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n=2$라 하자. 세 점 $(0, 0)$, $(x_k, 0)$, $(x_k, f(x_k))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 $A_k (k=1, 2, \cdots, n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k$의 값은?



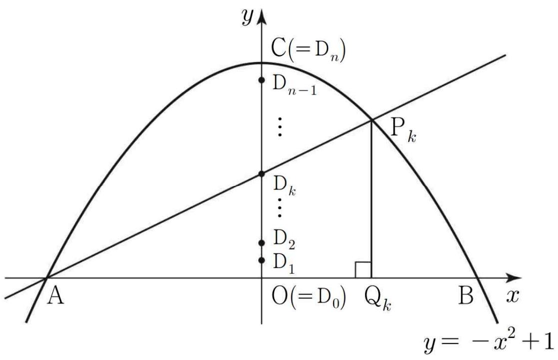
① $\frac{1}{2}e^2-e$ ② $\frac{1}{2}(e^2-e)$ ③ $\frac{1}{2}e^2$

④ e^2-e ⑤ $e^2-\frac{1}{2}e$

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 04월 28

78. 그림과 같이 곡선 $y=-x^2+1$ 위에 세 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 1)$이 있다. 2 이상의 자연수 n에 대하여 선분 OC를 n등분할 때, 양 끝점을 포함한 각 분점을 차례로 $\mathrm{O}=\mathrm{D}_0$, D_1, D_2, $\cdots$, D_{n-1}, $\mathrm{D}_n=\mathrm{C}$라 하자. 직선 AD_k가 곡선과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P_k라 하고, 점 P_k에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_k라 하자. $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

삼각형 $\mathrm{AP}_k\mathrm{Q}_k$의 넓이를 S_k라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}S_k=\alpha$이다. 24α의 값을 구하시오.



06 미적

13 정적분의활용

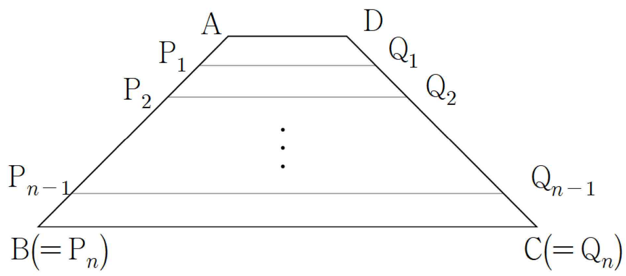
01 정적분과 급수

07 정적분과 급수6 (도형에서 식 세우기)

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 23

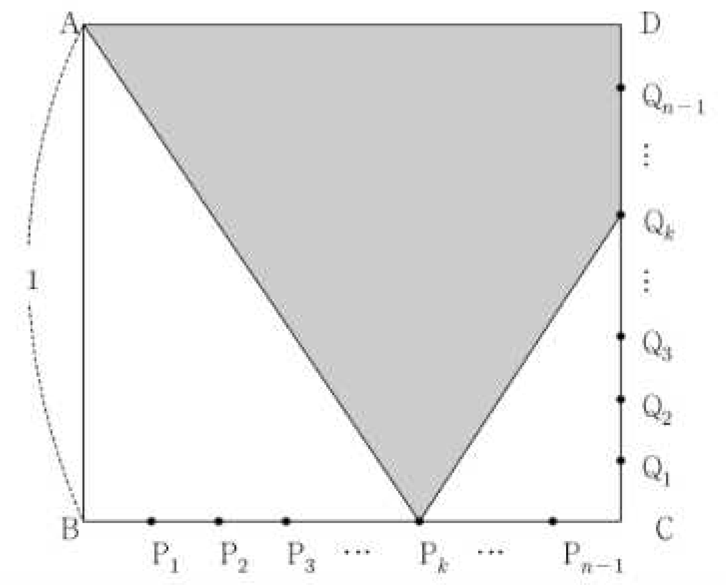
79. $\overline{\mathrm{AD}}=1$, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$인 등변사다리꼴 ABCD에서 변 AB를 n등분한 점을 각각 P_1, P_2, $\cdots$, P_{n-1}이라 하고 각 점에서 변 BC에 평행한 직선을 그어 변 CD와 만나는 점을 각각 Q_1, Q_2, $\cdots$, Q_{n-1}이라 할 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}^3+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}^3+\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3}^3+\cdots+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}^3\right)$의 값을 구하시오.



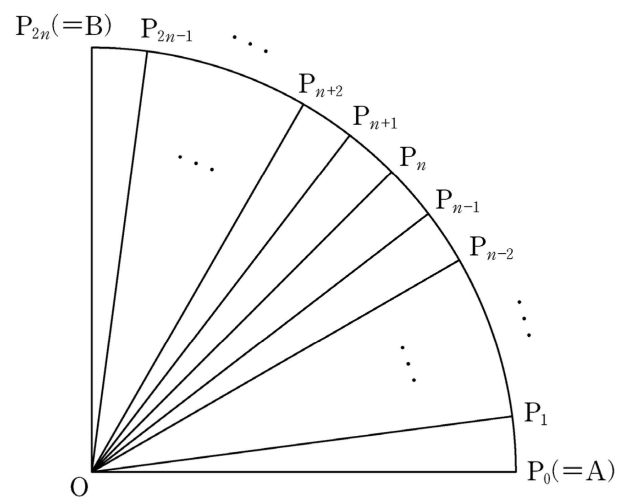
[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 04월 29

80. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 2 이상의 자연수 n에 대하여 변 BC를 n등분한 각 분점을 점 B에서 가까운 것부터 차례로 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \cdots,\ \mathrm{P}_{n-1}$이라 하고, 변 CD를 n등분한 각 분점을 점 C에서 가까운 것부터 차례로 $\mathrm{Q}_1,\ \mathrm{Q}_2,\ \mathrm{Q}_3,\ \cdots,\ \mathrm{Q}_{n-1}$이라 하자. $1 \le k \le n-1$인 자연수 k에 대하여 사각형 $\mathrm{AP}_k\mathrm{Q}_k\mathrm{D}$의 넓이를 S_k라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=\alpha$일 때, 150α의 값을 구하시오.



[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

81. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 자연수 n에 대하여 호 AB를 $2n$등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $\mathrm{P}_0(=\mathrm{A}),\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \cdots,\ \mathrm{P}_{2n-1},\ \mathrm{P}_{2n}(=\mathrm{B})$라 하자.

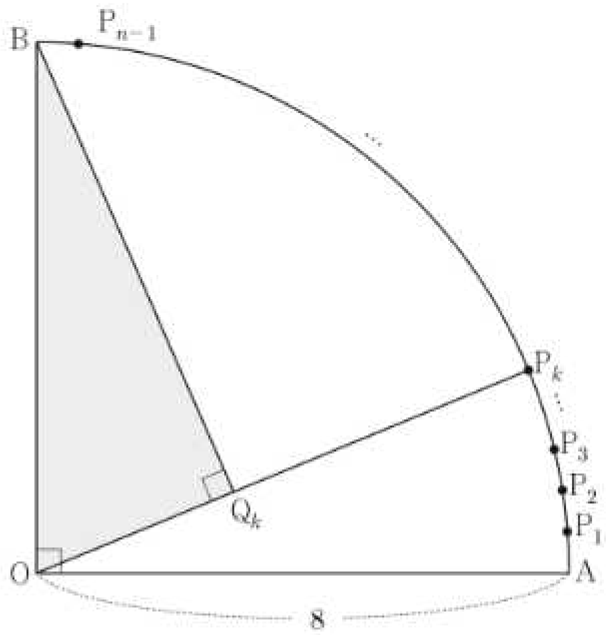


주어진 자연수 n에 대하여 $S_k(1 \le k \le n)$을 삼각형 $\mathrm{OP}_{n-k}\mathrm{P}_{n+k}$의 넓이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$의 값은?

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{13}{12\pi}$ ③ $\frac{7}{6\pi}$
④ $\frac{5}{4\pi}$ ⑤ $\frac{4}{3\pi}$

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 04월 28

82. 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고, 반지름의 길이가 8인 부채꼴 OAB가 있다. 2 이상의 자연수 n에 대하여 호 AB를 n등분한 각 분점을 점 A에서 가까운 것부터 차례로 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{n-1}이라 하자. $1 \le k \le n-1$인 자연수 k에 대하여 점 B에서 선분 OP_k에 내린 수선의 발을 Q_k라 하고, 삼각형 OQ_kB의 넓이를 S_k라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=\frac{\alpha}{\pi}$ 일 때, α의 값을 구하시오.



06 미적

13 정적분의활용

02 정적분과 넓이

02 넓이2 (그래프 그리기)

[출처] 2012 모의_공공 사관학교 고3 07월 19

83. 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{\sin 2x}{1+\sin x}$에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(x) \ge 0$

ㄴ. $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $2-2\ln 2$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

06 미적 13 정적분의활용

02 정적분과 넓이

03 넓이3 (대칭성)

[출처] 2013 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

84. $0 \le x \le \pi$에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x+2}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=\pi$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. S_1+S_2의 값은?

① $\ln\dfrac{3}{2}$ ② $\ln\dfrac{4}{3}$ ③ $2\ln\dfrac{3}{2}$

④ $2\ln\dfrac{4}{3}$ ⑤ $4\ln\dfrac{3}{2}$

06 미적 13 정적분의활용

02 정적분과 넓이

04 넓이4 (함수 결정 후 넓이)

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 07월 28

85. $f(1)=1$인 이차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=x^2$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.

(나) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right\}=27$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 18

86. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(t,\ f(t))(t>0)$에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하고, 점 A를 지나고 점 A에서의 접선과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자. 모든 양수 t에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^{t})$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $e-2$ ② e ③ $e+2$

④ $e+4$ ⑤ $e+6$

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 03월 17

87. 두 함수 $f(x)=ax^2\ (a>0)$, $g(x)=\ln x$의 그래프가 한 점 P에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와 곡선 $y=g(x)$위의 점 P에서의 접선의 기울기가 서로 같다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{2\sqrt{e}-3}{6}$ ② $\frac{2\sqrt{e}-3}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{e}-1}{2}$

④ $\frac{4\sqrt{e}-3}{6}$ ⑤ $\sqrt{e}-1$

06 미적 13 정적분의활용

03 정적분과 넓이의 해석

01 넓이와 해석1 (넓이조건과 관계식)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 11월 21

88. 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f(x)dx=2,\ \int_0^1 |f(x)|dx=2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 함수 $F(x)$가

$$F(x)=\int_0^x |f(t)|dt\ (0\le x\le 1)$$

일 때, $\int_0^1 f(x)F(x)dx$의 값은?

① $4-\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{2}$ ③ $5-\sqrt{2}$

④ $1+2\sqrt{2}$ ⑤ $2+2\sqrt{2}$

06 미적

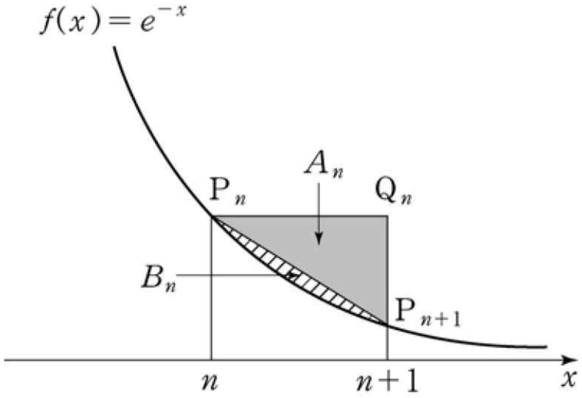
13 정적분의활용

03 정적분과 넓이의 해석

03 넓이와 해석3 (넓이로 정의된 함수)

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 11월 미분과 적분 28

89. 함수 $f(x)=e^{-x}$과 자연수 n에 대하여 점 P_n, Q_n을 각각 $\mathrm{P}_n(n,\ f(n))$, $\mathrm{Q}_n(n+1,\ f(n))$이라 하자. 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이를 A_n, 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$과 함수 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 B_n이라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx=f(n)-(A_n+B_n)$

ㄴ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n=\frac{1}{2e}$

ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B_n=\frac{3-e}{2e(e-1)}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 28

90. $0<a<1$인 실수 a에 대하여 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 두 함수

$y=\sin x$, $y=a\tan x$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(a)$라 할 때, $f'\left(\frac{1}{e^2}\right)$의 값은?

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$
④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

06 미적 13 정적분의활용

03 정적분과 넓이의 해석

04 넓이와 해석4 (포함과 배제)

[출처] 2013 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

91. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 1$일 때, $f(x) = e^x - 1$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1) = -f(x) + e - 1$이다.

$\int_0^3 f(x)dx$의 값은?

① $2e-3$ ② $2e-1$ ③ $2e+1$
④ $2e+3$ ⑤ $2e+5$

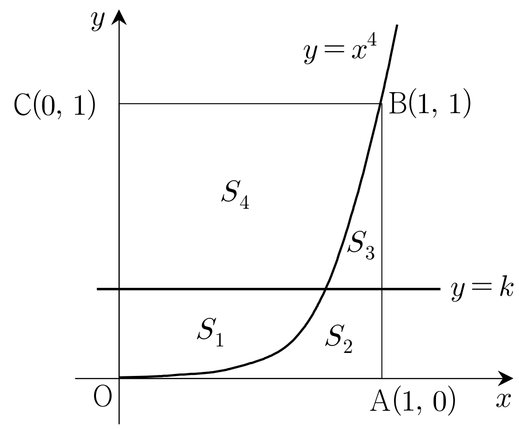
06 미적 13 정적분의활용

03 정적분과 넓이의 해석

05 넓이와 해석5 (활용)

[출처] 2009 모의_공공 사관학교 고3 07월 16

92. 좌표평면 위에 네 점 O$(0, 0)$, A$(1, 0)$, B$(1, 1)$, C$(0, 1)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC가 있다. 곡선 $y = x^4$과 직선 $y = k (0 < k < 1)$에 의해 정사각형 OABC를 네 영역으로 나눌 때, 그림과 같이 네 영역의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4라 하자. 이때, $|S_1 - S_3| + |S_2 - S_4|$의 최솟값은?



① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

06 미적 13 정적분의활용

03 정적분과 넓이의 해석

06 역함수와 정적분1 (대칭성)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 03월 28

93. 연속함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=1,\ f(3)=3,\ f(7)=7$
>
> (나) $x \neq 3$인 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)<0$이다.
>
> (다) $\int_1^7 f(x)dx = 27,\ \int_1^3 g(x)dx = 3$

$12\int_3^7 |f(x)-x|dx$의 값을 구하시오.

06 미적 13 정적분의활용

03 정적분과 넓이의 해석

07 역함수와 정적분2 (정적분과 급수)

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 10월 20

94. 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(2)=1$
>
> (나) $\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{4}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{5}{6}$

④ $\frac{6}{7}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 13

95. 모든 실수에서 연속이고 역함수가 존재하는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제 1사분면에 있는 두 점 $(2, a)$, $(4, a+8)$을 지난다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{2k}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(a+\frac{8k}{n}\right)=50$$

을 만족시키는 상수 a의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

06 미적 13 정적분의활용

03 정적분과 넓이의 해석

08 역함수와 정적분3 (함수 구하기)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 21

96. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2+3}$에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=f(x)-g(x)\ (0<x<4)$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $h(1)=0$

ㄴ. 두 양수 a, $b\,(a<b<4)$에 대하여 $\displaystyle\int_a^b h(x)dx$의 값이 최대일 때, $b-a=2$이다.

ㄷ. $h(x)$의 도함수 $h'(x)$의 최댓값은 $\dfrac{7}{6}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

06 미적

13 정적분의활용

04 정적분과 부피

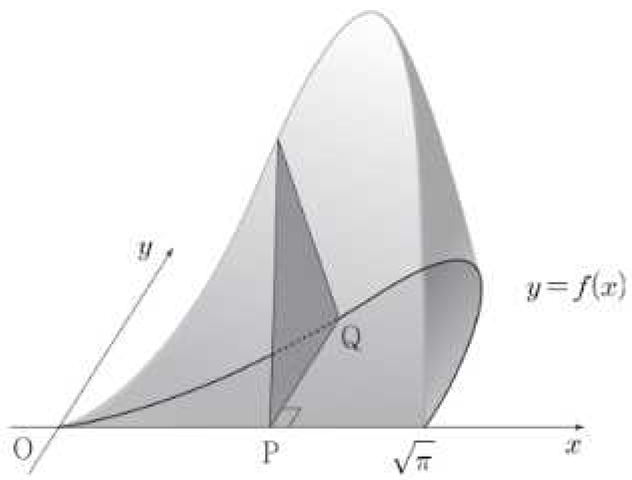
01 부피1 (좌표평면과 함수)

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 04월 19

97. 그림과 같이 함수

$$f(x)=\sqrt{x(x^2+1)\sin(x^2)}\ (0\le x\le\sqrt{\pi})$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 두 점 $\mathrm{P}(x, 0)$, $\mathrm{Q}(x, f(x))$를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면이 선분 PQ를 한 변으로 하는 정삼각형이다. 이 입체도형의 부피는?



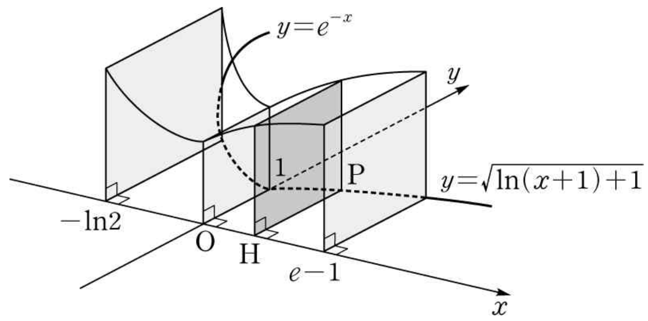
① $\dfrac{\sqrt{3}(\pi+2)}{8}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}(\pi+3)}{8}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}(\pi+4)}{8}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}(\pi+2)}{4}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}(\pi+3)}{4}$

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 03월 20

98. 그림과 같이 함수

$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & (x<0) \\ \sqrt{\ln(x+1)}+1 & (x\ge 0)\end{cases}$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(x, f(x))$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 PH를 한 변으로 하는 정사각형을 x축에 수직인 평면 위에 그린다. 점 P의 x좌표가 $x=-\ln 2$에서 $x=e-1$까지 변할 때, 이 정사각형이 만드는 입체도형의 부피는?



① $e-\dfrac{3}{2}$ ② $e+\dfrac{2}{3}$ ③ $2e-\dfrac{3}{2}$

④ $e+\dfrac{3}{2}$ ⑤ $2e-\dfrac{2}{3}$

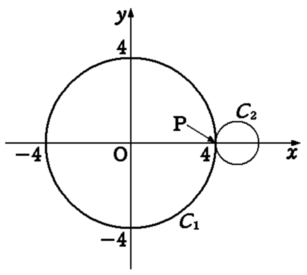
06 미적 13 정적분의활용

05 평면운동과 곡선의 길이

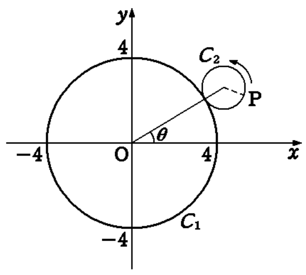
04 평면운동2 (매개변수 함수 구하기)

[출처] 2012 모의_공공 사관학교 고3 07월 22

99. [그림 1]과 같이 좌표평면 위에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4인 큰 원 C_1과 반지름의 길이가 1인 작은 원 C_2가 점 $(4,\ 0)$에서 외접하고 있다. 이때 작은 원 위의 한 점을 P라 하자. [그림 2]와 같이 원 C_2가 원 C_1에 접한 상태로 굴러갈 때, 두 원의 중심을 연결한 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하자. θ의 값이 0에서 $\frac{\pi}{2}$까지 변할 때, 점 $(4,\ 0)$에서 출발한 점 P가 움직인 거리는?



[그림 1]



[그림 2]

① 8 ② 9 ③ 10

④ 11 ⑤ 12

[준킬러][미적] 6적분법(빠른 정답)

준킬러미적 2023.01.06

1. [정답] ④
2. [정답] ④
3. [정답] ②
4. [정답] ④
5. [정답] ④

6. [정답] 72
7. [정답] ④
8. [정답] ②
9. [정답] ①
10. [정답] ③

11. [정답] ②
12.[정답] 51
13. [정답] 6
14. [정답] ⑤
15. [정답] ②

16. [정답] ④
17. [정답] ⑤
18. [정답] ④
19. [정답] ⑤
20. [정답] ④

21. [정답] ④
22. [정답] 17
23. [정답] ⑤
24. [정답] 8
25. [정답] ②

26. [정답] ⑤
27. [정답] 12
28. [정답] ①
29. [정답] 26
30. [정답] ①

31. [정답] 14
32. [정답] ③
33.[정답] ③
34. [정답] ⑤
35. [정답] ⑤

36. [정답] ①
37. [정답] ③
38. [정답] ①
39. [정답] 12
40. [정답] ⑤

41. [정답] ④
42. [정답] ④
43. [정답] 24
44. [정답] ④
45. [정답] ①

46. [정답] ⑤
47. [정답] ④
48. [정답] 9
49. [정답] ④
50. [정답] ①

51. [정답] ④
52. [정답] ③
53. [정답] ⑤
54. [정답] ④
55. [정답] ③

56. [정답] ⑤
57. [정답] ①
58. [정답] ①
59. [정답] ④
60. [정답] 325

61. [정답] 12
62. [정답] 127
63. [정답] ⑤
64. [정답] ②
65. [정답] ③

66. [정답] 19
67. [정답] ②
68. [정답] ②
69. [정답] ②
70. [정답] ⑤

71. [정답] ⑤
72. [정답] ⑤

73. [정답] 23
74. [정답] ⑤
75. [정답] 14

76. [정답] ②
77. [정답] ③
78. [정답] 11
79. [정답] 10
80. [정답] 100

81. [정답] ①
82. [정답] 32
83. [정답] ⑤
84. [정답] ③
85. [정답] 54

86. [정답] ①
87. [정답] ②
88. [정답] ④
89. [정답] ⑤
90. [정답] ②

91. [정답] ①
92. [정답] ③
93. [정답] 24
94. [정답] ⑤
95. [정답] ③

96. [정답] ②
97. [정답] ①
98. [정답] ④
99. [정답] ③

[준킬러][미적] 6적분법(해설)

준킬러미적 2023.01.06

1) [정답] ④

[해설]

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

조건 (가)에서

$$f(0)=\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(axe^{2x}+bx^2)=0$$

조건 (나)에서 임의의 $x_1(x_1<0)$에 대하여

$$f'(x_1)=\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\lim_{x\to x_1}3=3$$

이므로 $x<0$일 때 $f'(x)=3$이고

$$f(x)=\int 3dx=3x+C\ (C\text{는 적분상수})$$

$\lim_{x\to 0-}f(x)=C=f(0)=0$이므로 $x<0$일 때 $f(x)=3x$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-}$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-}=\lim_{x\to 0+}\frac{axe^{2x}+bx^2}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}(ae^{2x}+bx)=a$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-}=\lim_{x\to 0-}\frac{3x}{x}=3$$

이므로 $a=3$이다.

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3e}{2}+\frac{b}{4}=2e$에서 $b=2e$이므로

$f(x)=\begin{cases}3x & (x\le 0)\\ 3xe^{2x}+2ex^2 & (x>0)\end{cases}$이고

$$f'(x)=\begin{cases}3 & (x\le 0)\\ 3e^{2x}+6xe^{2x}+4ex & (x>0)\end{cases}$$

이므로 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=3e+3e+2e=8e$

2) [정답] ④

[해설]

$F(x)+xf(x)=F(x)+xF'(x)=\{xF(x)\}'$

주어진 식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$$xF(x)=\int(2x+2)e^x dx$$

$$=(2x+2)e^x-\int 2e^x dx$$

$$=(2x+2)e^x-2e^x+C$$

$$=2xe^x+C\ (C\text{는 적분상수})$$

$F(1)=2e$이므로

$F(1)=2e+C=2e$에서 $C=0$

$F(x)=2e^x$

따라서 $F(3)=2e^3$

3) [정답] ②

[해설]

조건 (가)에서 $\{f(x)\}^2f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$의 양변을 각각 x에 대하여 적분하면

$$\int\{f(x)\}^2f'(x)dx=\int\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$f(x)=t$라 할 때 $f'(x)=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int\{f(x)\}^2f'(x)dx=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C_1$$

$$=\frac{1}{3}\{f(x)\}^3+C_1\ (C_1\text{은 적분상수})$$

$$\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln(x^2+1)+C_2\ (C_2\text{는 적분상수})$$

그러므로 $\{f(x)\}^3=3\ln(x^2+1)+C$ (C는 적분상수)

조건 (나)에서 $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

따라서 $\{f(x)\}^3=3\ln(x^2+1)$이므로

$$\{f(1)\}^3=3\ln 2$$

4) [정답] ④

[해설]

조건 (가)에서

$$\int 2\{f(x)\}^2f'(x)dx=\int\{f(2x+1)\}^2f'(2x+1)dx$$

이므로

$\frac{2}{3}\{f(x)\}^3=\frac{1}{3}\{f(2x+1)\}^3\times\frac{1}{2}+C$ (단, C는 적분상수)

$\{f(2x+1)\}^3=4\{f(x)\}^3+C'\,(C'=-6C)$ …… ㉠

㉠에 $x=-1$을 대입하면

$\{f(-1)\}^3=4\{f(-1)\}^3+C'$

에서 $C'=-3\{f(-1)\}^3$ …… ㉡

㉠에 $x=-\frac{1}{8}$을 대입하면

$$\left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3=4\left\{f\left(-\frac{1}{8}\right)\right\}^3+C'=4+C'$$

㉠에 $x=\frac{3}{4}$을 대입하면

$$\left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3=4\left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3+C'=16+5C'$$

㉠에 $x=\frac{5}{2}$를 대입하면

$$\{f(6)\}^3=4\left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3+C'$$

$2^3=64+21C'$

$C'=-\frac{8}{3}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$-3\{f(-1)\}^3=-\frac{8}{3}$

이므로

$\{f(-1)\}^3=\frac{8}{9}$

따라서 $f(-1)=\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$

5) [정답] ④

[해설]

$g(f(x))=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=1$

조건 (나)에서 $g'(f(x))\neq 0$이고

$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$이므로

$f(x)g'(f(x))=\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{1}{x^2+1}$

$\frac{f'(x)}{f(x)}=x^2+1$

양변을 x에 대하여 적분하면

$\ln|f(x)|=\frac{1}{3}x^3+x+C$ (단, C는 적분상수)

$|f(x)|=e^{\frac{1}{3}x^3+x+C}$

조건 (가)에서 $f(0)=1>0$이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f(x)=e^{\frac{1}{3}x^3+x+C}$

$f(0)=1$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=e^{\frac{1}{3}x^3+x}$이므로

$f(3)=e^{12}$

6) [정답] **72**

[해설]

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=xe^x$$

$$\frac{f(x)}{x}=(x-1)e^x+C\ (C는\ 적분상수)$$

$f(1)=0$이므로 $C=0$

$f(x)=x(x-1)e^x$

$f(3)=6e^3,\ f(-3)=12e^{-3}$

따라서 $f(3)\times f(-3)=72$

7) [정답] ④

[해설]

$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$에서 $x=1,\ y=-1$을 대입하면

$f(1)=-f(-1)=-k$ 이고

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{f(x)+f(h)}{1+f(x)f(h)}-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)\times(1-f(x)^2)}{h\times(1+f(x)f(h))}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}\times\lim_{h\to0}\frac{(1-f(x)^2)}{(1+f(x)f(h))}$$

$$=f'(0)\times(1-f(x)^2)$$

$$=1-f(x)^2$$

$$\therefore f(x)^2=1-f'(x)$$

$$\int_0^1\{f(x)\}^2dx$$

$$=\int_0^1\{1-f'(x)\}dx$$

$$=[x-f(x)]_0^1=1-f(1)$$

$$=1+k$$

8) [정답] ②

[해설]

$$2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

㉠에 x 대신 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+x^2f(x)=x+x^2$$

양변을 $2x^2$ 으로 나누면

$$\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots ㉡$$

㉠−㉡을 하면

$$\frac{3}{2}f(x)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\frac{1}{3x}+\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3}$$

따라서

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{1}{3x}+\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{2}{3x}-\frac{1}{3}x\right]_{\frac{1}{2}}^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}\ln2-1\right)-\left(\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{2\ln2}{3}+\frac{1}{2}$$

9) [정답] ①

[해설]

$f(g(x))=x,\ g(f(x))=x$이므로

$f'(g(x))g'(x)=1,\ g'(f(x))f'(x)=1$

따라서

$$\int_1^3\left\{\frac{f(x)}{f'(g(x))}+\frac{g(x)}{g'(f(x))}\right\}dx$$

$$=\int_1^3\{f(x)g'(x)+g(x)f'(x)\}dx$$

$$=\int_1^3\{f(x)g(x)\}'dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_1^3$$

$$=f(3)g(3)-f(1)g(1)$$

$f(1)=3$에서 $g(3)=1,\ g(1)=3$에서 $f(3)=1$

따라서

$$f(3)g(3)-f(1)g(1)=1\times1-3\times3=-8$$

10) [정답] ③

[해설]

$$\int_0^{\frac{a}{2}}\{f(x)+f(a-x)\}dx=\int_0^{\frac{a}{2}}f(x)dx+\int_0^{\frac{a}{2}}f(a-x)dx$$

$\int_0^{\frac{a}{2}}f(a-x)dx$에서 $t=a-x$라고 놓으면 $dx=-dt$이고

$x=0$일 때 $t=a$이고, $x=\frac{a}{2}$일 때 $t=\frac{a}{2}$이다.

$$\therefore\ \int_0^{\frac{a}{2}}f(a-x)dx=\int_a^{\frac{a}{2}}f(t)(-dt)=\int_{\frac{a}{2}}^a f(t)dt=\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx$$

$$\therefore\ \int_0^{\frac{a}{2}}\{f(x)+f(a-x)\}dx=\int_0^{\frac{a}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx$$

$$=\int_0^a f(x)dx$$

11) [정답] ②

[해설]

조건 (가)에서

$f(2a-x)=f(a+(a-x))$

$=f(a-(a-x))=f(x)$

이때 조건 (나)에서 $\int_0^a f(x)dx=8$이므로

$\int_0^a \{f(2x)+f(2a-x)\}dx$

$=\int_0^a \{f(2x)+f(x)\}dx$

$=\int_0^a f(2x)dx+\int_0^a f(x)dx$

$=\int_0^a f(2x)dx+8$

$2x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$

또 $x=0$일 때 $t=0$, $x=a$일 때 $t=2a$이므로

$\int_0^a f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{2a} f(t)dt$

$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^a f(t)dt+\int_a^{2a} f(t)dt\right\}$

$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^a f(t)dt+\int_0^a f(t)dt\right\}$

$=\int_0^a f(t)dt=8$

$\therefore \int_0^a \{f(2x)+f(2a-x)\}dx$

$=8+8=16$

12)[정답] 51

[해설]

$f(x)=\frac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$ 에서

$f(\pi-x)=\frac{e^{\cos(\pi-x)}}{1+e^{\cos(\pi-x)}}$

$=\frac{e^{-\cos x}}{1+e^{-\cos x}}$

$=\frac{e^{-\cos x}\times e^{\cos x}}{(1+e^{-\cos x})\times e^{\cos x}}$

$=\frac{1}{e^{\cos x}+1}$

그러므로

$a=f(\pi-x)+f(x)$

$=\frac{1}{e^{\cos x}+1}+\frac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$

$=\frac{1+e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}=1$

$b=\int_0^{\pi} f(x)dx$

$=\int_0^{\pi}\{1-f(\pi-x)\}dx$

$=\int_0^{\pi} 1\,dx-\int_0^{\pi} f(\pi-x)dx$

$\pi-x=t$로 놓으면

$x=\pi-t$이므로 $\frac{dx}{dt}=-1$

$x=0$일 때, $t=\pi$이고

$x=\pi$일 때, $t=0$이므로

$b=\pi+\int_{\pi}^{0} f(t)dt$

$=\pi-\int_0^{\pi} f(t)dt=\pi-b$

$b=\pi-b$이므로 $b=\frac{\pi}{2}$

따라서 $a+\frac{100}{\pi}b=1+\frac{100}{\pi}\times\frac{\pi}{2}$

$=1+50=51$

[다른풀이]

$b=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-x)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)+f(\pi-x)\}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$

13) [정답] 6

[해설]

$\int_0^1 (x-1)f'(x+1)dx = -4$ 에서 $x+1=t$ 로 놓으면

$\frac{dx}{dt}=1$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=2$

$\int_0^1 (x-1)f'(x+1)dx$

$= \int_1^2 (t-2)f'(t)dt = \left[(t-2)f(t)\right]_1^2 - \int_1^2 f(t)dt$

$= f(1) - \int_1^2 f(t)dt = 2 - \int_1^2 f(t)dt = -4$

따라서 $\int_1^2 f(x)dx = 6$

14) [정답] ⑤

[해설]

$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & (|x| \le 1) \\ 0 & (|x|>1) \end{cases}$ 이므로 $f(x)=f(-x)$가 성립한다.

$\therefore \int_{-n}^{n} \frac{\{f(x)\}^n}{n}dx = 2\int_{-n}^{0} \frac{\{f(x)\}^n}{n}dx$

$= 2\int_{-1}^{0} \frac{\{f(x)\}^n}{n}dx = 2\int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^n}{n}dx$

$= 2\int_0^1 \frac{x^n}{n}dx = 2\left[\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right]_0^1$

$= \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} \int_{-n}^{n} \frac{\{f(x)\}^n}{n}dx$

$= \sum_{n=1}^{10} 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= 2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\} = \frac{20}{11}$

[다른 풀이]

$y=x^n$와 $y=(1-x)^n$은 직선 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\int_0^1 x^n dx = \int_0^1 (1-x)^n dx$가 성립한다.

따라서 앞의 풀이에서

$\int_{-n}^{n} \frac{\{f(x)\}^n}{n}dx = 2\int_0^n \frac{\{f(x)\}^n}{n}dx$

$= 2\int_0^1 \frac{\{f(x)\}^n}{n}dx$

$= 2\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n}dx$

$= 2\int_0^1 \frac{x^n}{n}dx$

$\vdots$

로 식을 변형하여 문제를 해결할 수 있다.

15) [정답] ②

[해설]

$f(t)-g(t)=0$ 이므로 준 식을 변형하면

$t\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx = 0$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\sin^2 x - \cos^2 x\, dx = 0$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \{(t+1)\sin^2 x - 1\}\, dx = 0$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{(t+1)\frac{1-\cos 2x}{2} - 1\right\} dx = 0$

$(t+1)\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 0$

$(t+1)\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

$\therefore t = \frac{\pi+2}{\pi-2}$

16) [정답] ④

[해설]

ㄱ. $0 < x^2 < 1$ 이므로, $x^2\sin\frac{x^2}{2} < \sin\frac{x^2}{2}$ …… ①

$0 < \frac{x^2}{2} < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{6}$ 이므로, $\sin\frac{x^2}{2} < \cos\frac{x^2}{2}$ …… ②

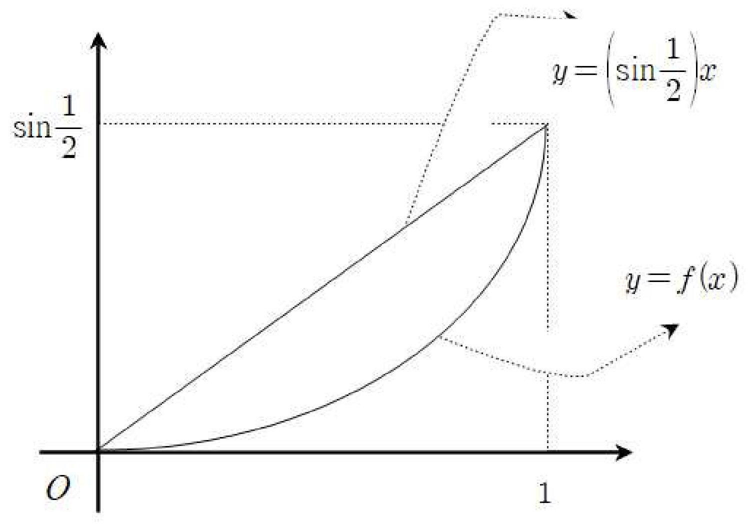
①, ② 에 의해 $x^2\sin\frac{x^2}{2} < f(x) < \cos\frac{x^2}{2}$ (참)

ㄴ. $f'(x) = x\cos\frac{x^2}{2}$, $f''(x) = \cos\frac{x^2}{2} - x^2\sin\frac{x^2}{2} > 0$

(∵ ㄱ. 에 의해)

따라서, $y=f(x)$ 는 $0<x<1$ 에서 아래로 볼록. (거짓)

ㄷ.



$0<x<1$ 에서 아래로 볼록이므로, [그림1]에서

$f(x) \leqq \left(\sin\frac{1}{2}\right)x$

따라서, $\int_0^1 f(x)\,dx \leqq \int_0^1 \left(\sin\frac{1}{2}\right)x\,dx = \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}$ (참)

17) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $g(x)=f(x)-x$ 라 하면 $f(x)$ 가 다항함수이므로 $g(x)$ 도 다항함수이고 모든 실수에서 연속이다.

$g(0)=f(0)$ 이므로 $0<g(0)<1$ 을 만족한다.
$g(1)=f(1)-1$ 이므로 $-1<g(1)<0$ 을 만족한다. 따라서 중간값 정리에 의해 방정식 $g(x)=f(x)-x=0$ 의 실근이 개구간 $(0,\ 1)$ 에 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄴ. $g(x)$ 는 폐구간 $[0,\ 1]$ 에서 연속이고, 개구간 $(0,\ 1)$ 에서 미분가능이므로 평균값 정리에 의해

$g'(b)=f'(b)-1=\frac{g(1)-g(0)}{1-0}$ (단, $0<b<1$)

을 만족하는 b 가 적어도 하나 존재한다. 여기서 $g(1)$ 은 음수이고 $g(0)$ 은 양수이므로 $g'(b)$ 는 음수이다. 따라서 개구간 $(0,\ 1)$ 에 $g'(b)=f'(b)-1<0$ 을 만족하는 실수 b 가 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄷ. $h(x)=\int_0^x f(t)\,dt-x$ 라 놓으면

$h'(x)=f(x)-1$

$0<f(x)<1$ 이므로 $-1<f(x)-1<0$ 이다. 즉, 개구간 $(0,\ 1)$ 에서 $h'(x)$ 는 항상 음의 값이므로 함수 $h(x)$ 는 단조감소함수이다. 따라서 $h(0)=0$ 이므로

$h(x)=\int_0^x f(t)\,dt-x<0$

$\therefore \int_0^x f(t)\,dt<x$ (단, $0<x<1$) (참)

18) [정답] ④

[해설]

$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}dt$

$=\int_0^x \frac{e^t}{1+e^t}dt$

에서 $1+e^t=s$로 놓으면

$e^t=\frac{ds}{dt}$

이고, $t=0$일 때 $s=2$이고, $t=x$일 때 $s=1+e^x$이므로

$f(x)=\int_2^{1+e^x}\frac{1}{s}dt$

$=[\ln s]_2^{1+e^x}$

$=\ln(1+e^x)-\ln 2$

$=\ln\frac{1+e^x}{2}$

$(f\circ f)(a)=f(f(a))$

$=f\left(\ln\frac{1+e^a}{2}\right)$

$=\ln\frac{1+e^{\ln\frac{1+e^a}{2}}}{2}$

이때,

$e^{\ln\frac{1+e^a}{2}}=\left(\frac{1+2^a}{2}\right)^{\ln e}=\frac{1+e^a}{2}$

이므로

$(f\circ f)(a)=\ln\frac{1+e^{\ln\frac{1+e^a}{2}}}{2}$

$=\ln\frac{1+\frac{1+e^a}{2}}{2}$

$=\ln\frac{3+e^a}{4}$

한편, $(f\circ f)(a)=\ln 5$이므로

$\ln \dfrac{3+e^a}{4}=\ln 5$

이때, $y=\ln x$는 일대일 함수이므로

$\dfrac{3+e^a}{4}=5,\ e^a=17$

따라서

$a=\ln 17$

19) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $\displaystyle\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}\,dx=k$

에서 $1-x=t$라 하면

$\displaystyle\int_1^0 \{f'(1-t)g(t)-g'(1-t)f(t)\}(-1)dt=k$

즉, $\displaystyle\int_0^1 \{f'(1-x)g(x)-g'(1-x)f(x)\}\,dx=k$

$\displaystyle\therefore \int_0^1 \{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}\,dx=-k$ (참)

ㄴ. $\{f(x)g(1-x)\}'$

$=f'(x)g(1-x)-f(x)g'(1-x)$

이므로 양변에 정적분을 취하면

$\displaystyle[f(x)g(1-x)]_0^1=\int_0^1 f'(x)g(1-x)\,dx-\int_0^1 f(x)g'(1-x)\,dx$

…… ㉠

이때, $\displaystyle\int_0^1 f(x)g'(1-x)dx$에서 $1-x=t$라 하면

$\displaystyle\int_0^1 f(x)g'(1-x)\,dx=\int_1^0 f(1-t)g'(t)(-1)\,dt$

$\displaystyle=\int_0^1 g'(x)f(1-x)\,dx$

이므로 ㉠의 식은

$\displaystyle[f(x)g(1-x)]_0^1=\int_0^1 f'(x)g(1-x)\,dx-\int_0^1 g'(x)f(1-x)\,dx$

$\displaystyle=\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx=k$

$\therefore k=[f(x)g(1-x)]_0^1=f(1)g(0)-f(0)g(1)$

따라서 $f(0)=f(1),\ g(0)=g(1)$이면

$k=f(1)g(0)-f(0)g(1)=0$ (참)

ㄷ. $f(x)=\ln(1+x^4),\ g(x)=\sin\pi x$이면

$f(0)=\ln 1=0,\ g(0)=\sin 0=0$이므로

$k=f(1)g(0)-f(0)g(1)=0$ (참)

20) [정답] ④

[해설]

$\displaystyle\int_a^{2a} x^{-2}\cdot\{f(x)\}^2dx$

$\displaystyle=[-x^{-1}\cdot\{f(x)\}^2]_a^{2a}-\int_a^{2a}\{-x^{-1}\cdot 2f(x)f'(x)\}dx$

$\displaystyle=[-2a^{-1}\cdot\{f(2a)\}^2+a^{-1}\cdot\{f(a)\}^2]+\int_a^{2a}\frac{f(2x)}{x}dx$

그런데, $f(2x)=2f(x)f'(x)$이고 $f(a)=0$이므로

$f(2a)=2f(a)f'(a)=0$

$\displaystyle\therefore \int_a^{2a} x^{-2}\cdot\{f(x)\}^2dx=\int_a^{2a}\frac{f(2x)}{x}dx$

$\displaystyle=\int_{2t}^{4t}\frac{2f(t)}{t}\cdot\frac{1}{2}dt$ ($\because$ $2x=t \to 2dx=dt$)

$\displaystyle=\int_{2t}^{4t}\frac{f(t)}{t}dt=k$

21) [정답] ④

[해설]

$\displaystyle\int_0^1 f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_0^1-\int_0^1 f'(x)g(x)dx$

$\displaystyle=f(1)g(1)-f(0)g(0)-\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx$

$g(1)=1,\ g(0)=0$이고

$1+x^3=t$로 치환하면

$\displaystyle f(1)-\int_1^2\frac{1}{t^2}dt=f(1)-\frac{1}{6}$

$f(1)-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}$이므로 $f(1)=\dfrac{1}{3}$

22) [정답] 17

[해설]

$y=e^x$로 고치면, $g(y)=\begin{cases} f(\ln y) & (1\le y\le e) \\ g\left(\dfrac{y}{e}\right)+5 & (e\le y\le e^2)\end{cases}$

$$\int_1^{e^2} g(y)dy=\int_1^e f(\ln y)dy+\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{y}{e}\right)+5\right\}dy=6e^2+4$$

$\dfrac{y}{e}=t,\ dy=e\,dt$라 두면,

$$\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{y}{e}\right)+5\right\}dy=e\int_1^e g(t)dt+5e^2+5e$$

$\displaystyle\int_1^e g(t)dt=\int_1^e f(\ln t)dt$이므로

$$\int_1^{e^2} g(y)dy=(1+e)\int_1^e f(\ln y)dy+5e^2+5e=6e^2+4$$

$$\therefore \int_1^e f(\ln y)dy=e+4 \qquad \therefore a=1,\ b=4 \quad \therefore a^2+b^2=17$$

23) [정답] ⑤

[해설]

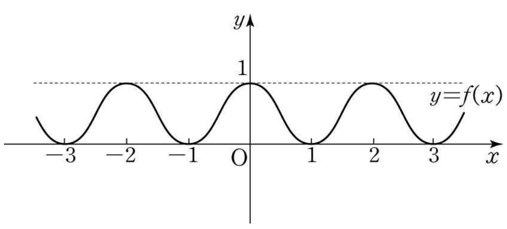
$f(x)=\dfrac{(x^2-1)^2}{x^4+1}$에서

$$f'(x)=\frac{2(x^2-1)\cdot 2x(x^4+1)-(x^2-1)^2\cdot 4x^3}{(x^4+1)^2}$$
$$=\frac{4x(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x^4+1)^2}$$

$-1\le x<1$에서 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. (참) $f(x)$가 우함수이므로

$$\int_{-1}^0 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$$

$f(x+2)=f(x)$이므로

$$\int_{-2}^2 f(x)dx=4\int_0^1 f(x)dx$$

ㄴ. (참) $1<x<2$일 때의 $f'(x)$의 값은 $-1<x<0$일 때의 $f'(x)$의 값과 같다.

따라서, $1<x<2$일 때 $f'(x)>0$이다.

ㄷ. (참) $2<x<3$일 때 $f'(x)<0$이므로

$$\int_1^3 x|f'(x)|dx$$
$$=\int_1^2 xf'(x)dx-\int_2^3 xf'(x)dx$$
$$=[xf(x)]_1^2-\int_1^2 f(x)dx$$
$$-\left([xf(x)]_2^3-\int_2^3 f(x)dx\right)$$
$$=2f(2)-f(1)-3f(3)+2f(2)$$
$$\left(\because \int_1^2 f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx\right)$$
$$=2-0-0+2$$
$$=4$$

24) [정답] 8

[해설]

$y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$f(x)\cos x$는 원점에 대하여 대칭이고

$xf(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.

따라서 $\displaystyle\int_{-\pi}^{*\pi}(x+\cos x)f(x)dx=2\int_0^{\pi}xf(x)dx$이다.

$$\int_0^{\pi}x^2f'(x)dx=\left[x^2f(x)\right]_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}xf(x)dx$$
$$=0-2\int_0^{\pi}xf(x)dx=-8\pi$$

따라서 $\displaystyle 2\int_0^{\pi}xf(x)dx=8\pi$

$\therefore\ k=8$

25) [정답] ②

[해설]

조건 (가)에서 $f(x)g(x)=x^4-1$이므로

$f(1)g(1)=0,\ f(-1)g(-1)=0$

또 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=4x^3$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편, $\displaystyle\int_{-1}^1\{f(x)\}^2g'(x)dx$ 에서

$u(x)=\{f(x)\}^2,\ v'(x)=g'(x)$로 놓으면

$u'(x)=2f(x)f'(x),\ v(x)=g(x)$이므로

$$\int_{-1}^1\{f(x)\}^2g'(x)dx=\left[\{f(x)\}^2g(x)\right]_{-1}^1$$
$$-2\int_{-1}^1 f(x)f'(x)g(x)dx$$

$$=0-2\int_{-1}^{1}f(x)f'(x)g(x)dx$$

조건 (나)에서 $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2g'(x)dx=120$ 이므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)f'(x)g(x)dx=-60$$

이때 ㉠에서 $f'(x)g(x)=4x^3-f(x)g'(x)$이므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)\{4x^3-f(x)g'(x)\}dx=-60$$

$$4\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx-\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2g'(x)dx=-60$$

따라서 $4\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx-120=-60$ 에서

$4\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx=60$ 이므로

$$\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx=15$$

26) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $f(2+x)=f(2-x)=f(1+(1-x))$
$=f(1-(1-x))=f(x)$

$f(x+2)=f(x)$ (참)

ㄴ. $\int_2^5 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_2^5=f(5)-f(2)=4$이고 ㄱ에 의하여

$f(5)=f(1)$이고, $f(2)=f(0)$이므로

$f(1)-f(0)=4$ (참)

ㄷ. $f(0)=a$라 하면 $f(1)=a+4$

$f(x)=t$라 치환하면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$$\int_0^1 f(f(x))f'(x)dx=\int_{f(0)}^{f(1)}f(t)dt=6$$

ㄱ, ㄴ에 의하여 $\int_a^{a+4}f(t)dt=6=2\int_a^{a+2}f(t)dt$에서

$$\int_0^2 f(t)dt=3,\ \int_0^{10}f(x)dx=5\int_0^2 f(x)dx=15$$

$f(1+x)=f(1-x)$이므로

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx=\frac{3}{2}$$

$$\int_1^{10}f(x)dx=\int_0^{10}f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx$$

$=15-\frac{3}{2}=\frac{27}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

27) [정답] **12**

[해설]

$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$

$$\int_1^5\frac{40}{g'(f(x))\{f(x)\}^2}dx=40\int_1^5\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}dx$$

$f(x)=t$라 하면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$

$g(2)=1,\ g(5)=5$에서 $f(1)=2,\ f(5)=5$이므로 $x=1$일 때 $t=2,\ x=5$일 때 $t=5$이다.

따라서

$$40\int_1^5\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}dx=40\int_2^5\frac{1}{t^2}dt$$

$$=40\left[-\frac{1}{t}\right]_2^5=12$$

28) [정답] ①

[해설]

$$\int_{-1}^5 f(x)(x+\cos2\pi x)dx$$

$$=\int_{-1}^5 xf(x)dx+\int_{-1}^5 f(x)\cos2\pi xdx \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (가)에 의하여

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx=0,\ \int_{-1}^1 f(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx$$

$$\int_{-1}^5 xf(x)dx$$

$$=\int_{-1}^1 xf(x)dx+\int_1^3 xf(x)dx+\int_3^5 xf(x)dx$$

$$=\int_{-1}^1 xf(x)dx+\int_{-1}^1(x+2)f(x+2)dx$$

$$+\int_{-1}^1(x+4)f(x+4)dx$$

$$=\int_{-1}^1 xf(x)dx+\int_{-1}^1(x+2)f(x)dx$$

$$+\int_{-1}^1(x+4)f(x)dx$$

$$=3\int_{-1}^1 xf(x)dx+6\int_{-1}^1 f(x)dx$$

$$=12\int_0^1 f(x)dx=24 \quad \cdots\cdots ㉡$$

조건 (가), (나)에 의하여 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)\cos 2\pi(-x)=f(x)\cos 2\pi x$

$f(x+2)\cos 2\pi(x+2)=f(x)\cos 2\pi x$

$$\int_{-1}^{5} f(x)\cos 2\pi x dx$$

$$=\int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x dx+\int_{1}^{3} f(x)\cos 2\pi x dx + \int_{3}^{5} f(x)\cos 2\pi x dx$$

$$=\int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x dx + \int_{-1}^{1} f(x+2)\cos 2\pi(x+2) dx + \int_{-1}^{1} f(x+4)\cos 2\pi(x+4) dx$$

$$=\int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x dx+\int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x dx + \int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x dx$$

$$=3\int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x dx$$

$$=6\int_{0}^{1} f(x)\cos 2\pi x dx$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\int_{0}^{1} f(x)\cos 2\pi x dx=\frac{1}{6}\left(\frac{47}{2}-24\right)=-\frac{1}{12}$$

따라서

$$\int_{0}^{1} f'(x)\sin 2\pi x dx$$

$$=\Big[f(x)\sin 2\pi x\Big]_{0}^{1}-2\pi\int_{0}^{1} f(x)\cos 2\pi x dx$$

$$=-2\pi\int_{0}^{1} f(x)\cos 2\pi x dx$$

$$=\frac{\pi}{6}$$

29) [정답] 26

[해설]

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+6}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ae^{2x}+be^x+c+6}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(ae^x+b+\frac{c+6}{e^x}\right)$$

극한값이 1에 수렴하므로 $c=-6,\ b=1$

$$\therefore\ f(x)=ae^{2x}+e^x-6$$

조건 (나)에서

$$f(\ln 2)=ae^{2\ln 2}+e^{\ln 2}-6=4a+2-6=0$$

$$a=1$$

즉, $f(x)=e^{2x}+e^x-6$

$\int_{0}^{14} g(x)dx$에서 $x=f(t)$라 하면 $dx=f'(t)dt$이고

$x=0$일 때, $f(t)=(e^t+3)(e^t-2)=0$에서

$$e^t=2,\qquad t=\ln 2$$

$x=14$일 때, $f(t)=e^{2t}+e^t-6=14$에서

$$(e^t+5)(e^t-4)=0,\qquad e^t=4,\qquad t=\ln 4$$

$$\therefore\ \int_{0}^{14} g(x)dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4} g(f(t))f'(t)\,dt$$

$$=\int_{\ln 2}^{\ln 4} tf'(t)\,dt$$

$$=\Big[tf(t)\Big]_{\ln 2}^{\ln 4}-\int_{\ln 2}^{\ln 4} f(t)\,dt$$

$$=14\ln 4-\int_{\ln 2}^{\ln 4}(e^{2t}+e^t-6)dt$$

$$=14\ln 4-\left[\frac{1}{2}e^{2t}+e^t-6t\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$$

$$=28\ln 2-(8-6\ln 2)$$

$$=34\ln 2-8$$

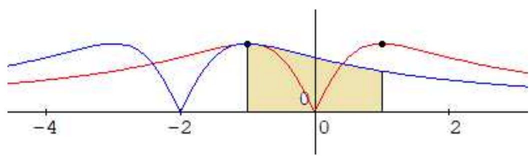
따라서 $p=-8,\ q=34$이므로

$$p+q=26$$

30) [정답] ①

[해설]

그림과 같이 $a=-1,\ b=-2$일 때이다.



$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx=\int_{1}^{3}\frac{x}{x^2+1}\,dx=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_{1}^{3}=\frac{1}{2}\ln 5$$

31) [정답] 14

[해설]

조건 (가)에서

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{a}} f(x)\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{a}}\sin(ax)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{a}\cos(ax)\right]_{0}^{\frac{\pi}{a}}=\frac{2}{a}$$

$\frac{2}{a} \geq \frac{1}{2}$이므로

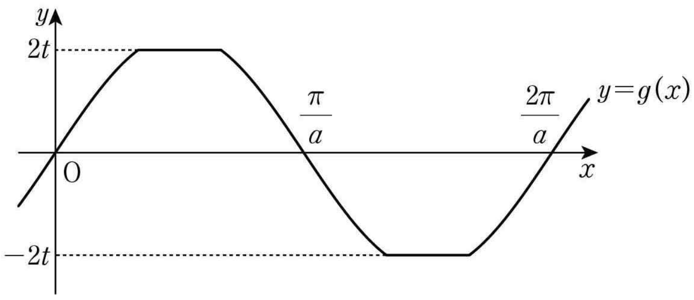
$0 < a \leq 4$ $\cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서

$$\int_0^{3\pi} \{|f(x)+t|-|f(x)-t|\}dx = 0$$

$g(x) = |f(x)+t|-|f(x)-t|$라 하면

$$g(x) = \begin{cases} -2t & (-1 \leq \sin(ax) < -t) \\ 2\sin(ax) & (-t \leq \sin(ax) < t) \\ 2t & (t \leq \sin(ax) \leq 1) \end{cases}$$



함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같으므로

$0 < k < \frac{2\pi}{a}$인 모든 실수 k에 대하여

$\int_0^k g(x)dx > 0$이고, $\int_0^{\frac{2\pi}{a}} g(x)dx = 0$이다.

함수 $g(x)$는 주기가 $\frac{2\pi}{a}$이고 $\int_0^{3\pi} g(x)dx = 0$이므로

$3\pi = \frac{2\pi}{a} \times n$ (n은 자연수), $a = \frac{2}{3n}$

㉠에서 $0 < \frac{2}{3}n \leq 4$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값은

$\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}$, 4이므로 그 합은 14이다.

32) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $a_1 + a_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\, dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x(1+\tan^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \ \sec^2 x\, dx$$

$\tan x = t$일 때, $\sec^2 x = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \ \sec^2 x\, dx = \int_0^1 t\, dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} \text{ (참)}$$

ㄴ. 마찬가지로 생각하면

$$a_2 + a_4 = \int_0^1 t^2\, dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$\therefore\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ (참)

ㄷ. 일반적으로 $a_{4k+1} + a_{4k+2} + a_{4k+3} + a_{4k+4}$

$= (a_{4k+1} + a_{4k+3}) + (a_{4k+2} + a_{4k+4})$

$$= \int_0^1 t^{4k+1}\, dt + \int_0^1 t^{4k+2}\, dt = \frac{1}{4k+2} + \frac{1}{4k+3}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{100} a_k = \sum_{k=0}^{24} (a_{4k+1} + a_{4k+2} + a_{4k+3} + a_{4k+4})$$

$$= \sum_{k=0}^{24} \left(\frac{1}{4k+2} + \frac{1}{4k+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{98} + \frac{1}{99} \text{ (거짓)}$$

33)[정답] ③

[해설]

ⅰ) $x > 1$ 또는 $x < -1$일 때

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0$이므로

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} + \cos 2\pi x}{x^{2n}+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^{2n}} \times \cos 2\pi x}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = 1$$

ⅱ) $x = 1$일 때

$$f(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1^{2n} + \cos 2\pi}{1^{2n}+1} = 1$$

ⅲ) $x = -1$일 때

$$f(-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{2n} + \cos 2\pi(-1)}{(-1)^{2n}+1} = 1$$

ⅳ) $-1 < x < 1$일 때

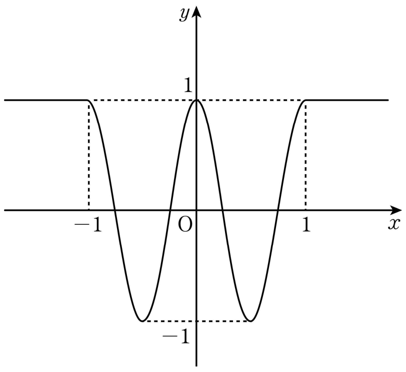
$\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0$이므로

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} + \cos 2\pi x}{x^{2n}+1} = \cos 2\pi x$$

ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)로부터 함수 $f(x)$는

$f(x)=\begin{cases}1 & (|x|\ge 1)\\ \cos 2\pi x & (|x|<1)\end{cases}$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



$g(x)=\int_{-x}^{2} f(t)dt+\int_{2}^{x} tf(t)dt$ 에서

함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고,

함수 $y=xf(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$g(-2)=\int_{2}^{2} f(t)dt+\int_{2}^{-2} tf(t)dt$

$=0+\int_{2}^{-2} tf(t)dt$

$=\int_{2}^{-2} tf(t)dt=0$

$g(2)=\int_{-2}^{2} f(t)dt+\int_{2}^{2} tf(t)dt$

$=\int_{-2}^{2} f(t)dt+0$

$=2\int_{0}^{2} f(t)dt$

$=2\left\{\int_{0}^{1} f(t)dt+\int_{1}^{2} f(t)dt\right\}$

$=2\left[\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t\right]_0^1+2\left[t\right]_1^2$

$=0+2=2$

따라서 $g(-2)+g(2)=0+2=2$

[참고]

함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이면

$f(-x)=f(x)$이고,

$g(x)=xf(x)$라 하면

$g(-x)=(-x)f(-x)$

$=-xf(x)$

$=-g(x)$이므로

함수 $y=xf(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

34) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $0\le t<3$일 때 점 P는 점 A$(1,1)$을 x축 방향으로 t만큼 평행이동한 점이므로 점 P의 좌표는 $(t+1,1)$ $\therefore$ (참)

ㄴ. 점 P$(t+1,1)$은 함수 $f(x)=kx^2$ 위의 점이므로

$k=\frac{1}{(t+1)^2}$

$f'(x)=2kx$이므로

$g(t)=f'(t+1)=\frac{2}{t+1}$ $\therefore$ (참)

ㄷ. $3\le t\le 7$일 때 점 P는 점 B$(4,1)$을 y축 방향으로 $(t-3)$만큼 평행이동한 점이므로 점 P의 좌표는 $(4,t-2)$이다. 점 P는 함수 $f(x)=kx^2$ 위의 점이므로 $k=\frac{t-2}{16}$

$g(t)=f'(4)=\frac{t-2}{2}$

$\therefore g(t)=\begin{cases}\frac{2}{t+1} & (0\le t<3)\\ \frac{t-2}{2} & (3\le t\le 7)\end{cases}$

$\int_0^7 g(t)dt=\int_0^3 g(t)dt+\int_3^7 g(t)dt$

$=\int_0^3 \frac{2}{t+1}dt+\int_3^7 \frac{t-2}{2}dt$

$=\left[2\ln|t+1|\right]_0^3+\left[\frac{1}{4}t^2-t\right]_3^7$

$=6+4\ln 2$ $\therefore$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

35) [정답] ⑤

[해설]

곡선 $y=e^x$에서 $y'=e^x$

곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(t,\ e^t)$에서의 접선의 방정식이 $y=f(x)$이므로

$f(x)=e^t(x-t)+e^t$

함수 $y=|f(x)+k-\ln x|$에서

$h(x)=f(x)+k$
$=e^t x+(1-t)e^t+k$

라 하자.

함수 $y=|f(x)+k-\ln x|$가 미분가능하고,

실수 k가 최소일 때는

곡선 $y=h(x)$와 곡선 $y=\ln x$가 한 점에서 만날 때이다.

곡선 $y=h(x)$와 곡선 $y=\ln x$가 만나는 점의 x좌표를 p라 하면

$$e^t p+(1-t)e^t+k=\ln p \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $h'(x)=e^t$이고, $y=\ln x$에서 $y'=\dfrac{1}{x}$이므로

$$e^t=\frac{1}{p} \quad \cdots\cdots ㉡$$

$$\ln p=\ln\frac{1}{e^t}=-t \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{p}\times p+(1-t)e^t+k=-t$$

$$k=(t-1)e^t-t-1$$

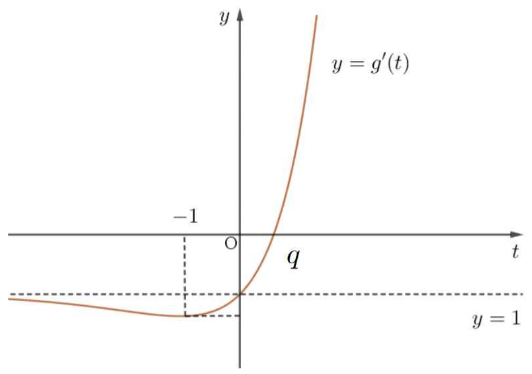
따라서

$$g(t)=(t-1)e^t-t-1$$

ㄱ. $g'(t)=e^t+(t-1)e^t-1$
$=te^t-1$

한편, $g''(t)=e^t+te^t=(t+1)e^t$

이므로 함수 $y=g'(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y=g'(t)$의 그래프와 t축이 만나는 점의 t의 좌표를 q라 하면 $p>0$이므로 함수 $y=g(t)$는 $t=q$에서 극솟값을 갖는다.

$g(q)=qe^q-e^q-q-1$
$=-e^q-q<0$

이므로 $m<0$이 되도록 하는 두 실수 a, b가 존재한다. (참)

ㄴ. $g(c)=(c-1)e^c-c-1=0$에서

$$e^c=\frac{c+1}{c-1}$$

따라서

$g(-c)=(-c-1)e^{-c}+c-1$

$=-(c+1)\times\dfrac{c-1}{c+1}+c-1$

$=0$ (참)

ㄷ. $g'(t)=te^t-1$이고 ㄴ에서 $\beta=c$, $\alpha=-c$이므로

$$\frac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)}=\frac{1+g'(c)}{1+g'(-c)}=\frac{ce^c}{-ce^{-c}}=-e^{2c}$$

한편, $g(1)=-2$이므로

$c>1$이다.

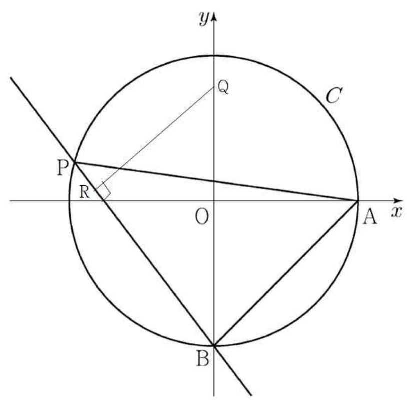
이때, $-e^{2c}<e^2$이므로

$$\frac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)}<e^2 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

36) [정답] ①

[해설]



$\overline{QB}=2+2\cos\theta=2(1+\cos\theta)$이고 직각삼각형 QRB에서

$\angle QBR=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로

$$\overline{BR}=\overline{QB}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2(1+\cos\theta)\sin\theta$$

삼각형 APB의 외접원의 반지름의 길이가 2이므로

사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{BP}}{\sin\theta}=2\times2$이므로 $\overline{BP}=4\sin\theta$

따라서

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\overline{BP}-\overline{BR}\\&=4\sin\theta-2(1+\cos\theta)\sin\theta\\&=2\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta\end{aligned}$$

이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (2\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta)d\theta$$

$$= \left[-2\cos\theta - \sin^2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(-2\cos\frac{\pi}{3} - \sin^2\frac{\pi}{3}\right) - \left(-2\cos\frac{\pi}{6} - \sin^2\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \left(-1 - \frac{3}{4}\right) - \left(-\sqrt{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-3}{2}$$

37) [정답] ③

[해설]

(i) $0 < x < 1$일 때

$f'(x) = \int e^x dx = e^x + C$ (단, C는 적분상수)

조건 (가)에서 $f'(0) = 1$이므로 $1 + C = 1$

$\therefore\ C = 0$

$f(x) = \int e^x dx = e^x + C_1$ (단, C_1은 적분상수)

조건 (가)에서 $f(0) = 1$이므로 $1 + C_1 = 1$

$\therefore\ C_1 = 0 \therefore\ f(x) = e^x$

(ii) $1 \le x < 2$일 때

조건 (나)에 의해 $f'(x)$는 증가하는 함수이므로

$f'(x) \ge f'(1) = e$

따라서 $f'(x) = e$일 때 적분값이 최소가 된다.

즉, 점 $(1,\ e)$를 지나고 기울기가 e인 직선의 방정식은

$f(x) = ex$이다.

그러므로 (i), (ii)에서

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$$

$$\ge \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 ex\,dx$$

$$= [e^x]_0^1 + \left[\frac{1}{2}ex^2\right]_1^2 = \frac{5}{2}e - 1$$

따라서 $\int_0^2 f(x)dx$의 최솟값은 $\frac{5}{2}e - 1$이다.

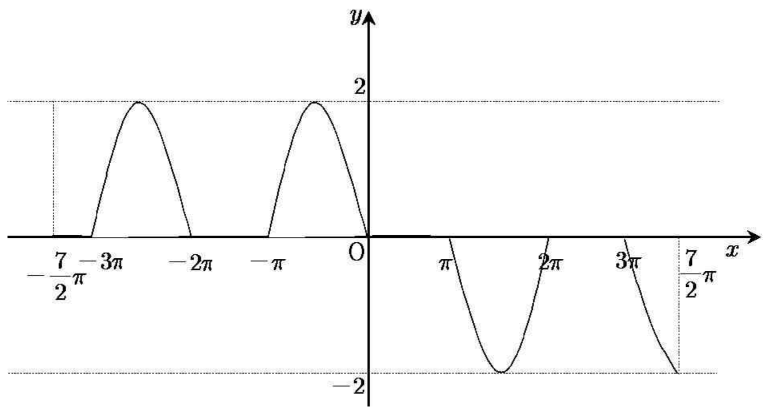
38) [정답] ①

[해설]

$f(x)$를 범위에 따라 정리해보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \left(-\frac{7\pi}{2} \le x \le -3\pi,\ -2\pi \le x \le -\pi,\ 0 \le x \le \pi,\ 2\pi \le x \le 3\pi\right) \\ -2\sin x & (-3\pi \le x \le -2\pi,\ -\pi \le x \le 0) \\ 2\sin x & \left(\pi \le x \le 2\pi,\ 3\pi \le x \le \frac{7\pi}{2}\right) \end{cases}$$

그래프는 다음과 같다.



모든 실수 x에 대하여

$\int_a^x f(t)dt \ge 0$이 되도록 하는 실수 a의

최솟값 $\alpha = -\frac{7}{2}\pi$, 최댓값 $\beta = -3\pi$

$\therefore\ \beta - \alpha = -3\pi - \left(-\frac{7}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}\pi$

39) [정답] 12

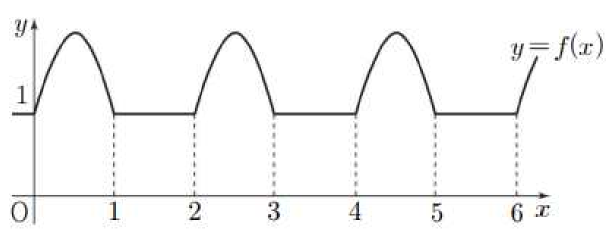
[해설]

(가)와 (나)에서 $f(2) = f(0) = 1,\ f(1) = 1$

$1 \le x \le 2$에서 함수 $f(x)$는 연속이고

$1 < x < 2$에서 $f'(x) \ge 0$이므로 $f(x) = 1$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$$\int_0^6 f(x)dx = 3\int_0^2 f(x)dx$$

$$= 3\int_0^1 (\sin\pi x + 1)dx + 3\int_1^2 dx$$

$$= 3 \times \left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x + x\right]_0^1 + 3$$

$=6+\dfrac{6}{\pi}$

따라서 $p=6,\ q=6$이고 $p+q=12$

40) [정답] ⑤

[해설]

함수 $h(x)=f(nx)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 함수 $g(x)$의 치역이 $\{0,\ 1\}$이다.

한편, 구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(nx)$의 함숫값이 0이 되는 x의 값은

$$x=\frac{k}{2n}\ \text{(단, } -2n\le k\le 2n\text{인 정수)}$$

그러므로 함수 $g(x)$는 어떤 정수 k에 대하여 $\left[\dfrac{k}{2n},\ \dfrac{k+1}{2n}\right]$에서 0이어야 한다.

한편,

$$\int_0^{\frac{1}{2n}} f(nx)dx=\int_0^{\frac{1}{2n}}\pi\sin 2\pi x dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2n}\cos 2n\pi x\right]_0^{\frac{1}{2n}}$$
$$=\frac{1}{2n}-\left(-\frac{1}{2n}\right)$$
$$=\frac{1}{n}$$

즉, $f(x)\ge 0$인 구간에서 함수 $f(nx)$의 정적분은

$$\frac{1}{n}\times n\times 2=2$$

조건에서 $\displaystyle\int_{-1}^{1}h(x)dx=2$이므로 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}1 & (f(nx)>0)\\ 0 & (f(nx)\le 0)\end{cases}\quad \cdots\cdots ㉠$$

이어야 한다.

$$\int_{-1}^{1}xh(x)dx$$
$$=\int_0^{-1}xf(nx)g(x)dx+\int_0^{1}xf(nx)g(x)dx$$
$$=\int_0^{1}xf(nx)dx\ (\because ㉠)$$
$$=\int_0^{1}\pi x\sin 2n\pi x\,dx\ (\because ㉡)$$
$$=\left[-\frac{x}{2n}\cos(2n\pi x)\right]_0^1-\int_0^1\left(-\frac{1}{2n}\cos 2n\pi x\right)dx$$
$$=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\times\left[\frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{2n}$$

조건에서 $\displaystyle\int_{-1}^{1}x\,h(x)dx=-\frac{1}{32}$이므로 $-\dfrac{1}{2n}=-\dfrac{1}{32}$

$\therefore n=16$

41) [정답] ④

[해설]

ㄱ. 주어진 식에 $x=0$ 을 대입하면

$f(0)=e^0-1+\displaystyle\int_0^0 f(t)dt=1-1+0=0\quad\therefore$ 참

ㄴ. 주어진 식을 x 에 대하여 미분하면

$f'(x)=e^x+f(x)$, $f'(0)=e^0+f(0)=1\quad\therefore$ 거짓

ㄷ. ㄴ에서 $f'(x)-f(x)=e^x>0$ 이므로

$f'(x)>f(x)\quad\therefore$ 참

42) [정답] ④

[해설]

조건(나)에서

$$\cos x\int_0^x f(t)dt=-\sin x\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)dt$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$-\sin x\int_0^x f(t)dt+\cos x\cdot f(x)$$
$$=-\cos x\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)dt-\sin x\cdot f(x)$$

등식의 양변에 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(t)dt+\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}f(t)dt-\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}f(t)dt+\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1$ ($\because$ 조건(가))

$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

43) [정답] 24

[해설]

$F(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

$F(g(x))=\frac{1}{2}F(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(g(x))g'(x)=\frac{1}{2}f(x)$

$x=2$를 대입하면 $f(g(2))g'(2)=\frac{1}{2}f(2)\cdots\cdots$ ㉠

$F(x)=\int_{0}^{x}\{3(t-1)^2+5\}dt$

$=\int_{0}^{x}(3t^2-6t+8)dt=\left[t^3-3t^2+8t\right]_0^x$

$=x^3-3x^2+8x$

$F(g(2))=\frac{1}{2}F(2)=6$에서 $g(2)=a$로 놓으면

$a^3-3a^2+8a=6,\ a^3-3a^2+8a-6=0$

$(a-1)(a^2-2a+6)=0\ \therefore\ a=1$

즉, $g(2)=1$이므로 ㉠에 대입하면

$f(1)g'(2)=\frac{1}{2}f(2)$

이때, $f(1)=5,\ f(2)=8$이므로

$g'(2)=\frac{4}{5}=p\ \therefore\ 30p=30\times\frac{4}{5}=24$

44) [정답] ④

[해설]

(나)에서 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=k$라 두면 $g(x)=k\cos x+3$

(가)에서 $x=0$을 대입하면 $-k=(k+3+a)\cdot 0-2$이므로

$k=2$이고, $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면 $0=(3+a)\cdot 1-2$이므로

$a=-1$이다. 따라서 $g(x)=2\cos x+3$이므로

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt=(2\cos x+2)\sin x-2$

$f(x)=-2\sin^2 x+(2\cos x+2)\cos x\ \therefore\ f(0)=4$

45) [정답] ①

[해설]

$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{x+1}f(t)dt$ .... ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1)$이므로 $f(x+1)=\frac{2}{\pi}f'(x)$

$\pi^2\int_{0}^{1}xf(x+1)dx=\pi^2\int_{0}^{1}x\times\frac{2}{\pi}f'(x)dx=2\pi\int_{0}^{1}xf'(x)dx$

$\int_{0}^{1}xf'(x)dx$에서 $u=x,\ v'=f'(x)$로 놓으면

$u'=1,\ v=f(x)$이므로

$\int_{0}^{1}xf'(x)dx=\left[xf(x)\right]_0^1-\int_{0}^{1}f(x)dx=f(1)-\int_{0}^{1}f(x)dx$

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로
$f(1)=1$에서 $f(-1)=-1$이다.

$-1=f(-1)=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{1}f(t)dt$에서 $\int_{0}^{1}f(t)dt=\frac{2}{\pi}$

$\therefore\ \pi^2\int_{0}^{1}xf(x+1)dx=2\pi\times\left\{f(1)-\int_{0}^{1}f(x)dx\right\}$

$=2\pi\times\left(1-\frac{2}{\pi}\right)=2(\pi-2)$

46) [정답] ⑤

[해설]

$g(x)=-\sin x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt+\cos x\cdot f(x)$

ㄱ. $g(0)=0$ ($\because f(0)=0$) (참)

ㄴ. $g(-x)=-\sin(-x)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-x}f(t)dt+\cos(-x)\cdot f(-x)$

$= \sin x \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-x} f(t)dt + \int_{-x}^{x} f(t)dt \right) - \cos x \cdot f(x)$

$= \sin x \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt - \cos x \cdot f(x) = -g(x)$ (참)

ㄷ. $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g(0)$이므로 평균값의 정리에 의해

$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$에서 $g'(c) = 0$인 c가 적어도 하나 존재한다.

마찬가지로 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $g'(c) = 0$인 c가 적어도 하나 존재한다. (참)

47) [정답] ④

[해설]

$\int_0^2 xf(tx)dx = 4t^2$에서 $tx = y$로 놓으면

$t = \frac{dy}{dx}$에서 $dx = \frac{dy}{t}$

$x = 0$일 때, $y = 0$

$x = 2$일 때, $y = 2t$이므로

$\int_0^2 xf(tx)dx = \int_0^{2t} \frac{y}{t} f(y) \frac{dy}{t} = \frac{1}{t^2} \int_0^{2t} yf(y)dy = 4t^2$

$\therefore \int_0^{2t} yf(y)dy = 4t^4$

양변을 t에 관하여 미분하면

$2tf(2t) \times (2t)' = 16t^3 \quad \therefore f(2t) = 4t^2 \quad \therefore f(2) = 4$

48) [정답] 9

[해설]

$x - t = u$라 하면 $t = x - u$

$\begin{cases} t = 0, & u = x \\ t = x, & u = 0 \end{cases}$

$dt = -du$이므로 $F(x) = \int_0^x tf(x-t)dt = -\int_x^0 (x-u)f(u)du$

$= \int_0^x (x-u)f(u)du = x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$

$F'(x) = \int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(u)du$

$F'(a) = \int_0^a \frac{1}{u+1}du = [\ln(u+1)]_0^a = \ln(a+1) = \ln 10$

$\therefore a = 9$

49) [정답] ④

[해설]

$\int_{-1}^x f(t)dt = F(x)$ 이므로 $F'(x) = f(x)$, $F(-1) = 0$

$\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^{-1} xf(x)dx$ 이므로

$\int_0^1 xf(x)dx - \int_0^{-1} xf(x)dx = 0$

$\int_0^1 xf(x)dx + \int_{-1}^0 xf(x)dx = 0$

$\int_{-1}^1 xf(x)dx = 0$

정적분의 부분적분법에 의하여,

$\int_{-1}^1 F(x)dx = \left[xF(x)\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 xf(x)dx$

$= F(1) + F(-1) - 0$

$= F(1) + 0$

$= \int_{-1}^1 f(x)dx = 12$

50) [정답] ①

[해설]

$u'(x) = x$, $v(x) = g(x)$라 하면

$u(x) = \frac{1}{2}x^2$, $v'(x) = g'(x)$

조건 (가)에 의하여 $g(1) = 0$, $g'(x) = \frac{f(x^2+1)}{x}$

$\int_1^2 xg(x)dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 g(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 g'(x)dx$

$= 2g(2) - \frac{1}{2}g(1) - \int_1^2 \left\{\frac{1}{2}x^2 \times \frac{f(x^2+1)}{x}\right\}dx$

$= 2 \times 3 - \frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{2}\int_1^2 xf(x^2+1)dx$

$x^2+1=t$라 하자.

$$\int_1^2 xg(x)dx$$

$$=6-\frac{1}{2}\int_2^5 \frac{1}{2}f(t)dt$$

$$=6-\frac{1}{4}\times 16=2$$

51) [정답] ④

[해설]

$f(x)=\int_a^x \{2+\sin(t^2)\}dt$에서

$f'(x)=2+\sin x^2$이고

$f''(x)=\cos x^2(2x)=2x\cos x^2$이다.

이때 $f''(a)=2a\cos a^2=\sqrt{3}a$에서

$\cos a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\quad \therefore\ a^2=\dfrac{\pi}{6}$

한편, $f^{-1}(0)=b$로 놓으면

$$f(b)=\int_a^b \{2+\sin(t^2)\}dt=0$$

에서 $b=a$이다. 이때

$f'(b)=f'(a)=2+\sin a^2=2+\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5}{2}$

이므로 $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(b)}=\dfrac{2}{5}$

52) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $x\le 0$일 때, $f(x)=1$이므로

$g(0)=\int_{-1}^0 e^t f(t)dt=\int_{-1}^0 e^t dt=\left[e^t\right]_{-1}^0=1-\dfrac{1}{e}$ (참)

ㄴ. $g'(x)=e^x f(x)=0$이면 $f(x)=0$이므로 $x=1$

함수 $g(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	$e-1-\frac{1}{e}$	$\searrow$

$\therefore g(x)$는 극댓값 $e-1-\dfrac{1}{e}$을 갖는다. (거짓)

ㄷ. ㄴ의 증감표에 의하여 $g(x)=0$은 많아야 2개의 실근을 갖는다.

i) $g(-1)=0$이므로 한 실근을 갖는다.

ii) $g(1)=e-1-\dfrac{1}{e}>0$, $g(2)=-1-\dfrac{1}{e}<0$이므로

중간값의 정리에 의하여 열린 구간 $(1, 2)$에서 적어도 한 실근을 갖는다.

i), ii)에 의하여 $g(x)=0$의 실근의 개수는 2 (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

53) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $0<x<\sqrt{\pi}$에서

$e^{-x}>0$, $\sin(x^2)\ge 0$이고, $\sin 0=0$, $\sin\pi=0$이므로

$f(\sqrt{\pi})=e^{-\pi}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt>0$ (참)

ㄴ. $f'(x)=-e^x\int_0^x \sin(t^2)dt+e^{-x}\sin(x^2)$

$f'(0)=-e^{-0}\int_0^0 \sin(t^2)dt+e^{-0}\sin(0^2)=0$

$f'(\sqrt{\pi})=-e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt+e^{-\sqrt{\pi}}\sin(\sqrt{\pi^2})$

$=-f(\sqrt{\pi})<0$

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0, \sqrt{\pi}]$에서 연속이고, 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$f(a)=\dfrac{f(\sqrt{\pi})-f(0)}{\sqrt{\pi}-0}>0$

를 만족시키는 a가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에서 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄷ.ㄴ을 만족시키는 a $(0<a<\pi)$에 대하여 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, \sqrt{\pi}]$에서 연속이고,

$f'(a)>0, f'(\sqrt{\pi})<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여

$f'(b)=0$

을 만족시키는 n가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에서 적어도 하나 존재한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

54) [정답] ④

[해설]

(i) $0 \le a \le 4$ 일 때,

$$\int_0^a f(x)dx + \int_a^8 g(x)dx$$

$$= \int_0^a \left(\frac{5}{2} - \frac{10x}{x^2+4}\right)dx + \int_a^8 \frac{x}{2}dx$$

$$= \left[\frac{5}{2}x - 5\ln(x^2+4)\right]_0^a + \left[\frac{1}{4}x^2\right]_a^8$$

$$= \frac{5}{2}a - 5\ln(a^2+4) - \frac{1}{4}a^2 + 5\ln4 + 16$$

따라서,

$$S(a) = \frac{5}{2}a - 5\ln(a^2+4) - \frac{1}{4}a^2 + 5\ln4 + 16$$

라 하자.

(ii) $4 < a \le 8$ 일 때,

$$\int_0^a f(x)dx + \int_a^8 g(x)dx$$

$$= \int_0^a \left(\frac{5}{2} - \frac{10x}{x^2+4}\right)dx + \int_a^8 \frac{-x+8}{2}dx$$

$$= \left[\frac{5}{2}x - 5\ln(x^2+4)\right]_0^a + \left[-\frac{1}{4}x^2 + 4x\right]_a^8$$

$$= \frac{5}{2}a - 5\ln(a^2+4) + 5\ln4 + 16 + \frac{1}{4}a^2 - 4a$$

따라서,

$$S(a) = \frac{5}{2}a - 5\ln(a^2+4) + 5\ln4 + 16 + \frac{1}{4}a^2 - 4a$$

라 하자.

따라서 $0 \le a \le 4$ 일 때,

$S'(a) = \dfrac{-(a-1)(a^2-4a+20)}{2(a^2+4)}$ 이므로

$a=1$ 에서 극대이고

$S(0) = 16$ …… ㉠

$S(4) = 22 - 5\ln5$ …… ㉡

$4 < a \le 8$ 일 때

$S'(a) = \dfrac{(a-6)(a+1)(a+2)}{2(a^2+4)}$ 에서

$a=6$ 에서 극소이므로

$S(6) = 16 - 5\ln10$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 최솟값은 $S(6) = 16 - 5\ln10$

[다른 풀이]

$S(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)dx + \int_a^8 g(x)dx$ 라 하면

$S'(a) = \dfrac{dS}{da}(a) = f(a) - g(a)$ 이므로

$0 \le a \le 8$ 에서 $S'(a) = 0$ 을 구하면

$a=1$ 또는 $a=6$ 이다.

그리고 $f(a) - g(a)$ 의 부호를 조사하면

$a=1$ 에서 극대를 가지고 $a=6$ 에서 극소를 가진다.

$a=0$, $a=6$ 에서 $S(a)$ 의 함숫값은

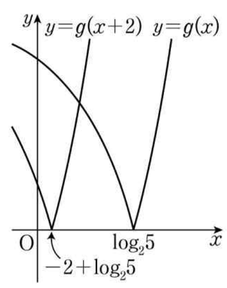
$S(0) = 16$, $S(6) = 16 - 5\ln10$ 이므로

최솟값은 $S(6) = 16 - 5\ln10$

55) [정답] ③

[해설]

$g(x) = |2^x - 5|$ 라 하면 함수 $y = g(x+2)$의 그래프와 함수 $y = g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 그림과 같이 $-2 + \log_2 5$보다 크고 $\log_2 5$보다 작다.



$f'(x) = g(x+2) - g(x)$이므로 $f'(x) = 0$에서

$f'(x) = 2^{x+2} - 5 - (-2^x + 5) = 0,$

$5 \times 2^x = 10,\ x = 1$

$x < 1$에서 $f'(x) < 0$이고, $x > 1$에서 $f'(x) > 0$이므로

함수 $y = f(x)$는 $x = 1$에서 극소이면서 최소이다.

$f(1) = \displaystyle\int_1^3 |2^t - 5|\, dt$

$= \int_1^{\log_2 5}(-2^t+5)dt + \int_{\log_2 5}^3 (2^t-5)dt$

$= \left[-\frac{2^t}{\ln 2}+5t\right]_1^{\log_2 5} + \left[\frac{2^t}{\ln 2}-5t\right]_{\log_2 5}^3$

$= \left(-\frac{3}{\ln 2}+5\log_2 5-5\right)$

$\quad + \left(\frac{3}{\ln 2}+5\log_2 5-15\right)$

$= 10\log_2 5-20$

따라서 $m=10\log_2 5-20=\log_2\left(\frac{5}{4}\right)^{10}$ 이므로

$$2^m = 2^{\log_2\left(\frac{5}{4}\right)^{10}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{10}$$

56) [정답] ⑤

[해설]

조건 (나) $\ln f(x)+2\int_0^x (x-t)f(t)dt=0$에서

$$\ln f(x)+2x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 미분하여 정리하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+2\int_0^x f(t)dt+2xf(x)-2xf(x)=0$$

$$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)}+2\int_0^x f(t)dt=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에서 $f'(x)=-2f(x)\int_0^x f(t)dt$ $\qquad \cdots\cdots ㉢$

ㄱ. 조건 (가)에서 $f(x)>0$이고 $x>0$에서

$\int_0^x f(t)dt>0$이므로

㉢에서 $x>0$의 범위에서 $f'(x)<0$이다.

따라서 $f(x)$는 감소한다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 $x>0$에서 $f'(x)<0$이고,

$x<0$에서 $\int_0^x f(t)dt<0$이고, $f(x)>0$이므로 $f'(x)>0$

따라서 증감표를 나타내면 다음과 같다.

x	$x<0$	$x=0$	$x>0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

따라서 $x=0$에서 극대이자 최댓값을 갖는다.

조건 (나)에 $x=0$을 대입하면

$$\ln f(0)+2\int_0^0 (x-t)f(t)dt=0$$

$\ln f(0)=0$이므로 $f(0)=1$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 1을 갖는다. (참)

ㄷ. $F(x)=\int_0^x f(t)dt$이므로 ㉢에서

$$f'(x)=-2f(x)F(x) \qquad \cdots\cdots ㉣$$

그런데, $y=\{F(x)\}^2$라 할 때, $\frac{dy}{dx}=2F(x)f(x)$이므로

㉣을 부정적분하면

$$f(x)=-\{F(x)\}^2+C$$

$f(0)=1,\ f'(0)=0,\ F(0)=0$이므로 $C=1$

$\therefore f(1)+\{F(1)\}^2=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다

57) [정답] ①

[해설]

$g(x)=\int_0^x tf(x-t)dt\ (x\ge 0)$에서 $x-t=s$라 하면

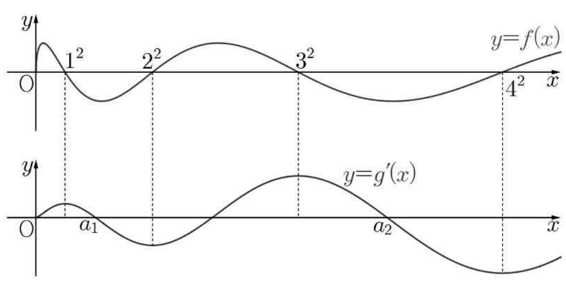
$-dt=ds$이므로

$$g(x)=\int_x^0 (x-s)f(s)(-ds)$$

즉, $g(x)=\int_0^x (x-s)f(s)ds$이므로 양변을 미분하면

$$g'(x)=\int_0^x f(s)ds$$

함수 $f(x)$가 $g'(x)$의 도함수이므로 그래프를 그려보면 다음과 같다.



즉, 극대가 되는 값을 조사해보면

$$1^2<a_1<2^2,\ 3^2<a_2<4^2,\ \cdots$$

$$\therefore (2n-1)^2<a_n<(2n)^2$$

따라서 $n=6$일 때, $11^2<a_6<12^2$이므로 $k=11$

58) [정답] ①

[해설]

$g(x)=\int_{0}^{x}\ln f(t)dt$에서

$$g(0)=0,\ g'(x)=\ln f(x),\ g''(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

조건 (가)에 의하여 $g(1)=2,\ g'(1)=0$

조건 (나)에 의하여 $g'(-1)=g'(1)=0$

$$\int_{-1}^{1}\frac{xf'(x)}{f(x)}dx=\int_{-1}^{1}xg''(x)dx$$

$=\left[xg'(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}g'(x)dx$

$=g'(1)+g'(-1)-2\int_{0}^{1}g'(x)dx$

$=2g'(1)-2\{g(1)-g(0)\}$
$=2\times0-2(2-0)$
$=-4$

59) [정답] ④

[해설]

$g'(x)=\dfrac{x}{f(x)}$, $g'(-x)=-g'(x)$ 이므로

$f(-x)=f(x)$ 이다.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+k$ (단, k는 상수이다.)

점 $(1,\ g(1))$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이므로

$g''(x)=\dfrac{f(x)-xf'(x)}{\{f(x)\}^2}$

$g''(1)=\dfrac{f(1)-f'(1)}{\{f(1)\}^2}=\dfrac{1+k-2}{(1+k)^2}=0$

$k=1$ 이므로 $f(x)=x^2+1$

따라서 $g(1)=\int_{0}^{1}\dfrac{t}{t^2+1}dt=\dfrac{1}{2}\left[\ln(t^2+1)\right]_{0}^{1}=\dfrac{1}{2}\ln2$

60) [정답] 325

[해설]

$f(x)=\int_{1}^{x}\dfrac{n-\ln t}{t}dt$의 양변을 x에 대하여

미분하면 $f'(x)=\dfrac{n-\ln x}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=e^n$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	(0)	$\cdots$	e^n	$\cdots$
$f'(x$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=e^n$에서 최댓값을 가지므로

$g(n)=f(e^n)=\int_{1}^{e^n}\dfrac{n-\ln t}{t}dt$

$n-\ln t=s$라 하면 $\dfrac{ds}{dt}=-\dfrac{1}{t}$이고,

$t=1$일 때 $s=n$, $t=e^n$일 때 $s=0$이므로

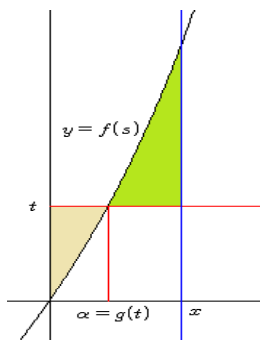
$g(n)=\int_{n}^{0}(-s)ds$

$=\left[-\dfrac{1}{2}s^2\right]_{n}^{0}=\dfrac{1}{2}n^2$

따라서 $\sum_{n=1}^{12}g(n)=\sum_{n=1}^{12}\dfrac{n^2}{2}=325$

61) [정답] 12

[해설]



$F'(x)=t-f(x)=0$에서

$f(\alpha)=t$이므로 $\alpha=f^{-1}(t)=g(t)$

$g(t)=x$로 치환하면 $f(x)=t$이므로

$dt=f'(x)dx=(e^x+1)dx$

$\int_{f(1)}^{f(5)}\dfrac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt$

$=\int_{1}^{5}\dfrac{x}{1+e^x}(e^x+1)dx$

$=\int_{1}^{5}xdx=\left[\dfrac{1}{2}x^2\right]_{1}^{5}=12$

62) [정답] 127

[해설]

$(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$, $(t+1,\ f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는

삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\,|\,tf(t+1)-(t+1)f(t)\,|=\frac{t+1}{t}$

양변을 $t(t+1)$로 나누면

$\frac{1}{2}\left|\frac{f(t+1)}{t+1}-\frac{f(t)}{t}\right|=\frac{1}{t^2}$

$f(t)$는 감소함수이고 $f(t)>0$ 이므로 $\frac{f(t)}{t}>\frac{f(t+1)}{t+1}$

$\therefore\ \frac{f(t)}{t}-\frac{f(t+1)}{t+1}=\frac{2}{t^2}$

$\frac{f(t+1)}{t+1}-\frac{f(t)}{t}=-\frac{2}{t^2}\ \cdots$ (ㄱ)

(ㄱ) 은 $\int_t^{t+1}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{2}{t}+c$ 를 양변 미분한 것이다

$t=1$ 일 때, $\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=2+c=2$ 에서 $c=0$

$\therefore\ \int_t^{t+1}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{2}{t}$

$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(x)}{x}dx$

$=\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}}\frac{f(x)}{x}dx+\int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{4}{7}+\frac{4}{9}=\frac{64}{63}$

$\therefore\ p+q=127$

63) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $f(x)=\int_0^x\sin(\pi\cos t)dt$ 에서

$f'(x)=\sin(\pi\cos x)$

$f'(0)=\sin(\pi\cos 0)=\sin\pi=0$ (참)

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=\int_0^{-x}\sin(\pi\cos t)dt$

$-t=y$로 놓으면 $-\frac{dt}{dy}=1$이고

$t=0$일 때 $y=0$, $t=-x$일 때 $y=x$이므로

$f(-x)=-\int_0^x\sin\{\pi\cos(-y)\}dy$

$=-\int_0^x\sin(\pi\cos y)dy$

$=-f(x)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. $\pi-t=y$라 하면 $-\frac{dt}{dy}=1$이고,

$t=0$일 때 $y=\pi$, $t=\pi$일 때 $y=0$이므로

$f(\pi)=\int_0^{\pi}\sin(\pi\cos t)dt$

$=-\int_{\pi}^{0}\sin\{\pi\cos(\pi-y)\}dy$

$=-\int_{\pi}^{0}\sin(-\pi\cos y)dy$

$=\int_{\pi}^{0}\sin(\pi\cos y)dy$

$=-\int_0^{\pi}\sin(\pi\cos y)dy$

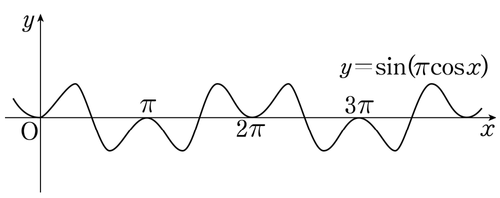
$=-f(\pi)$

$2f(\pi)=0$이므로 $f(\pi)=0$이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

[참고]

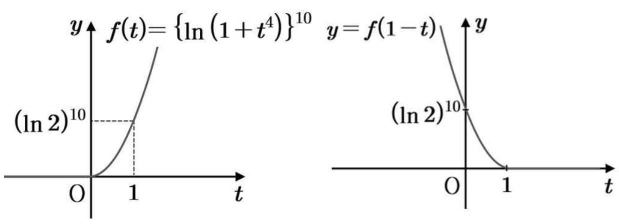
함수 $y=\sin(\pi\cos x)$의 그래프는 그림과 같다.



64) [정답] ②

[해설]

함수 $f(t)$와 함수 $f(1-t)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $x\le 0$에서 $f(x)=0$이므로

$g(x)=-\int_x^0 f(t)f(1-t)dt$

$=-\int_x^0 0\times f(1-t)dt$

$=0$ (참)

ㄴ. 위의 그래프에서 $f(t)$와 $f(1-t)$가 $t=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로

$$g(1)=\int_0^1 f(t)f(1-t)dt$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)dt$$

$$=2g\left(\frac{1}{2}\right)$$ (참)

ㄷ. (i) $t \le 0$, $t \ge 1$일 때 $g(x)=0<1$

(ii) $0<t<1$일 때

$f(t)<1$, $f(1-t)<1$이므로 $f(t)f(1-t)<1$

정적분의 정의는 함숫값의 총합이므로 (i)과 (ii)에 의해

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)dt<1$$

$g(a) \ge 1$인 실수 a는 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

65) [정답] ③

[해설]

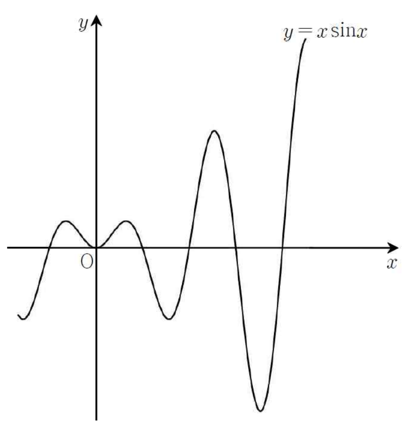
수직선 운동에서 점 P의 속도를 $v(t)=t\sin t$로 보면

$\int_0^x |t\sin t|dt$, $\int_0^x t\sin t dt$는 각각 움직인 거리와 위치의 변화량이다.

$$\int_0^{\pi} t\sin t dt=\Big[-t\cos t+2\sin t\Big]_0^{\pi}=\pi$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} t\sin t dt=\Big[-t\cos t+2\sin t\Big]_{\pi}^{2\pi}=-3\pi$$

$$\int_{2\pi}^{3\pi} t\sin t dt=\Big[-t\cos t+2\sin t\Big]_{2\pi}^{3\pi}=5\pi$$



$$f(x)=\int_0^x |t\sin t|dt-\left|\int_0^x t\sin t dt\right|$$

따라서 $f(x)$=(거리의 합)−|(위치의 변화량)|이다.

ㄱ. $f(2\pi)=(\pi+3\pi)-|\pi-3\pi|=2\pi$ (참)

ㄴ. $\pi<\alpha<2\pi$, $\int_0^{\alpha} t\sin t dt=0$이면

$f(\alpha)=(\pi+\pi)-|\pi-\pi|=2\pi$ (거짓)

ㄷ. $2\pi<\beta \le x \le 3\pi$, $\int_0^{\beta} t\sin t dt=0$이면

$$f(x)=\int_0^x |t\sin t|dt-\left|\int_0^x t\sin t dt\right|$$

$$=6\pi+\int_{\beta}^x t\sin t dt-\int_{\beta}^x t\sin t dt$$

$$=6\pi$$

$$\therefore \int_{\beta}^{3\pi} f(x)dx=6\pi(3\pi-\beta)$$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

66) [정답] **19**

[해설]

$-1 \le x \le 0$일 때, $|f(x)\sin x|=f(x)\sin x$

$0 \le x \le 1$일 때. $|f(x)\sin x|=-f(x)\sin x$

$$\therefore \int_{-1}^0 |f(x)\sin x|dx=2,\ \int_0^1 |f(x)\sin x|dx=3$$

$g(x)$에 $x=0$을 대입하면

$$g(0)=\int_{-1}^0 |f(x)\sin x|dx=2$$

$$\therefore g(0)=2$$

$g(x)$에 $x=1$을 대입하면

$$g(1)=\int_{-1}^1 |f(t)\sin t|dt$$

$$=\int_{-1}^0 |f(x)\sin x|dx+\int_0^1 |f(x)\sin x|dx$$

$$=2+3$$

$$\therefore g(1)=2+3=5$$

$g(x)$에 $x=-1$을 대입하면

$$g(-1)=\int_{-1}^{-1} |f(x)\sin x|dx=0$$

$$\therefore g(-1)=0$$

이때 $g'(x)=|f(x)\sin x|$가

$-1 \le x \le 0$일 때, $|f(x)\sin x|=f(x)\sin x$

$0 \le x \le 1$일 때. $|f(x)\sin x|=-f(x)\sin x$이므로

$\int_{-1}^1 f(-x)g(-x)\sin x dx$에서 $-x=t$로 치환하면

$dx=-dt$, $-1 \le t \le 1$

$$\therefore \int_{-1}^1 f(-x)g(-x)\sin x dx$$

$=\int_{1}^{-1} f(t)g(t)\sin(-t)(-1)dt$

$=-\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\sin t\,dt$

$=-\int_{-1}^{0} g'(t)g(t)dt+\int_{0}^{1} g'(t)g(t)dt$

$=-\left[\frac{1}{2}\{g(t)\}^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}\{g(t)\}^2\right]_{0}^{1}$

$=\frac{1}{2}[\{g(1)\}^2-\{g(0)\}^2]-\frac{1}{2}[\{g(0)\}^2-\{g(-1)\}^2]$

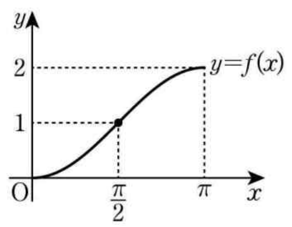
$=\frac{1}{2}(5^2-2^2)-\frac{1}{2}(2^2-0^2)$

$=\frac{17}{2}$

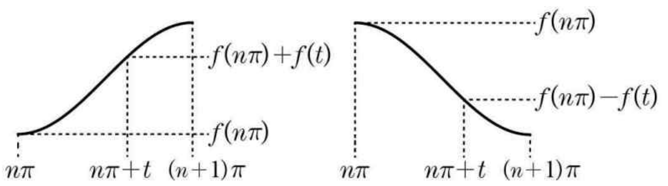
67) [정답] ②

[해설]

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 아래로 볼록이고, 구간 $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$에서 위로 볼록이므로 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

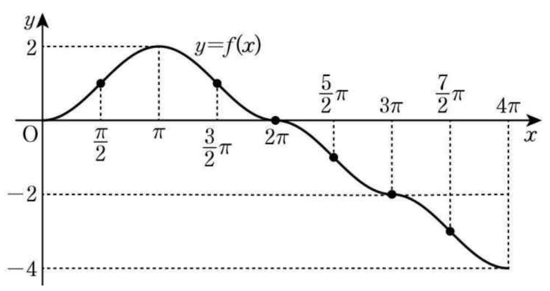


조건 (나)에 의하여 $n\pi<x\le(n+1)\pi$에서 곡선의 모양은 다음 두 가지 중 하나이다.



$0<x<4\pi$에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수가 6인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 함수 $y=f(x)$가 $x=\pi$에서 극대일 때



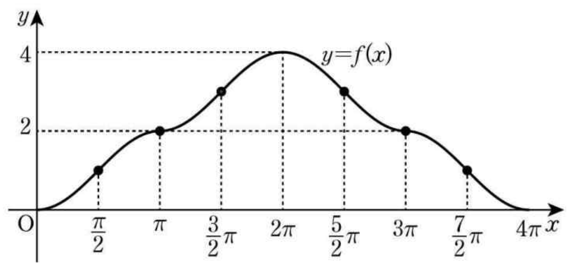
위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 x좌표가 $\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ 3\pi,\ \frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$\int_{0}^{4\pi}|f(x)|dx=4\int_{0}^{\pi} f(x)dx+\pi\times 2$

$=4\int_{0}^{\pi}(1-\cos x)dx+2\pi$

$=4\Big[x-\sin x\Big]_{0}^{\pi}+2\pi=6\pi$

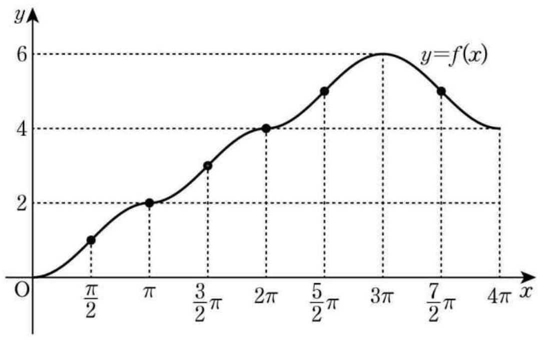
(ⅱ) 함수 $y=f(x)$가 $x=2\pi$에서 극대일 때



위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 x좌표가 $\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ 3\pi,\ \frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$\int_{0}^{4\pi}|f(x)|dx=4\int_{0}^{\pi} f(x)dx+2\pi\times 2=8\pi$

(ⅲ) 함수 $y=f(x)$가 $x=3\pi$에서 극대일 때



위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 x좌표가 $\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$\int_{0}^{4\pi}|f(x)|dx=4\int_{0}^{\pi} f(x)dx+2\pi\times 5=14\pi$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 최솟값은 6π이다.

68) [정답] ②

[해설]

주어진 식 $A_n,\ B_n$ 의 극한값을 각각 구해보자.

$\frac{k-1}{n}=x$라 두면 구간은 $[0,1]$, $dx=\frac{1}{n}$이 된다.

$\therefore \lim_{n\to\infty} A_n=\int_{0}^{1} f(x)dx=\frac{1}{4}$

$\frac{k}{n}=x$라 두면 구간은 $[0,\ 1]$, $dx=\frac{1}{n}$이 된다.

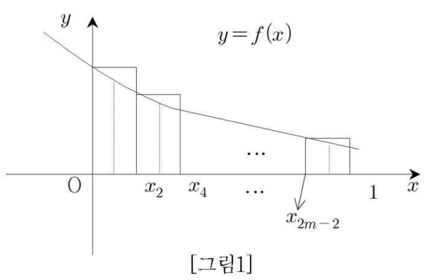
$\therefore \lim_{n\to\infty} B_n=\int_{0}^{1}\{1-f(x)\}dx=\frac{3}{4}$가 된다.

그러므로 옳은 것은 ㄱ과 ㄴ이다.

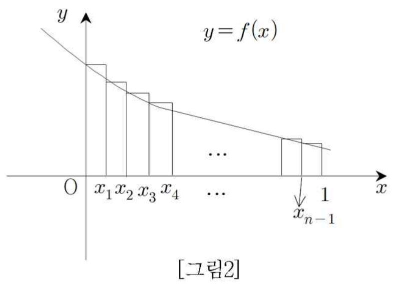
69) [정답] ②

[해설]

ㄱ. (반례)



[그림1]



[그림2]

$x_{2k+2}-x_{2k}=\dfrac{2}{2m}=\dfrac{1}{m}$ 이므로

$\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m}$ 은 [그림1]의 직사각형들의 넓이의 합을 나타낸다. $x_{k+1}-x_k=\dfrac{1}{n}$ 이므로 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 은 [그림2]의 직사각형들의 넓이의 합을 나타낸다.

따라서, $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m}>\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 이다. (거짓)

ㄴ. $x_k=\dfrac{k}{n}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left\{\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx\right\}=\int_0^1 f(x)\,dx \text{ (참)}$$

ㄷ. (반례)

ㄱ의 [그림2]에서 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ 는 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이이고,

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 은 직사각형들의 넓이의 합을 나타내므로

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}>\int_0^1 f(x)\,dx$ (거짓)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

70) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. 구간 $(0,\ 1)$에서 $\dfrac{d\{f(x)\}^2}{dx}=2f(x)f'(x)$

$\dfrac{d^2\{f(x)\}^2}{dx^2}=2\{f'(x)\}^2+2f(x)f''(x)$이므로

$\dfrac{d^2\{f(x)\}^2}{dx^2}>0$

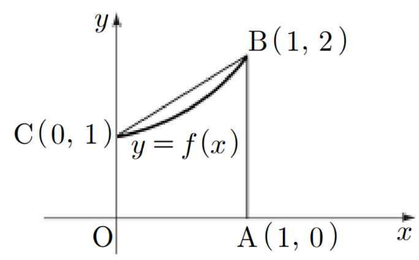
∴ 함수 $y=\{f(x)\}^2$의 그래프는 구간 $(0,\ 1)$에서 아래로 볼록하다. (참)

ㄴ. $1-x=t$라 하면

$\displaystyle\int_0^1 f(1-x)\,dx=\int_0^1 f(t)\,dt$이므로

$\displaystyle\int_0^1\{f(x)+f(1-x)\}\,dx=2\int_0^1 f(x)\,dx$

조건에 의해 구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같고



$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$의 값은 사다리꼴 COAB의 넓이보다 작다.

$\displaystyle\therefore\int_0^1\{f(x)+f(1-x)\}\,dx<3$ (참)

ㄷ. ㄱ과 ㄴ에 의해

$$\frac{\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2+\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2}{2}\cdot\frac{1}{n}\geq\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\{f(x)\}^2\,dx$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2+\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2}{2}\cdot\frac{1}{n}\geq\int_0^1\{f(x)\}^2dx(\text{참})\ \text{따라서}$$

옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

71) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2n}\times f\left(\frac{k}{2n}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2n}\times\left(\frac{k}{2n}\right)^2\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2n}\times\left(\frac{k}{2n}\right)^2\right\}$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}x^2\,dx$ (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(S_{2k}-S_{2k-1})$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2n}\times f\left(\frac{2k}{2n}\right)-\frac{1}{2n}\times f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{2k}{2n}\right)^2-\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8n^3}\sum_{k=1}^{n}(4k-1)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8n^3}(n^2+n-1)=0$ (참)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_{2k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2n}\times f\left(\frac{2k}{2n}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2n}\times\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}=\frac{1}{2}\int_0^1x^2\,dx$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

72) [정답] ⑤

[해설]

$f(xy)=f(x)f(y)-x-y$에 $x=y=1$ 대입하여 정리하면
$f(1)>0$이므로 $f(1)=2$이며, $y=1$을 대입하면,

$f(x)=x+1$이다.

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{6}{\sqrt{n}}f\left(2+\frac{4k}{n}\right)\right\}^2$의 계산을 위해

$x=2+\frac{4k}{n}$이라 하면, $dx=\frac{4}{n}$이며

따라서

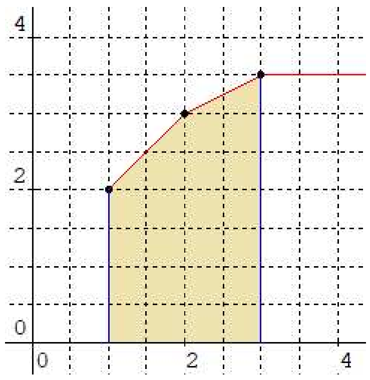
$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{6}{\sqrt{n}}f\left(2+\frac{4k}{n}\right)\right\}^2=9\int_2^6(f(x))^2dx$

$=9\int_2^6x^2+2x+1dx$

$=948$

73) [정답] 23

[해설]



함수 $f(x)$의 그래프

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & (1\leq x<2)\\ 2+\frac{1}{2}x & (2\leq x<3)\\ \frac{7}{2} & (x\geq 3)\end{cases}$$

정적분의 정의에서

$g(3)=\frac{1}{2}\int_1^3f(x)dx=\frac{23}{8},\ \therefore 8\times g(3)=23$

74) [정답] ⑤

[해설]

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(m+\frac{k}{n})=\int_m^{m+1}f(x)dx<0$

에서 정수 m부터 $m+1$사이 정적분값이 음인 m의 값들을 찾으면 된다 $\therefore -3, -2, -1, 2, 3, 4, 5$ 총 7개

75) [정답] 14

[해설]

$A_1=\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right),\ A_n=\frac{1}{n}f(1)$이므로

$A_1+A_n=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f(1)\right\}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{a}{n}+b+1+a+b\right)$

$=\frac{1}{n^3}\{1+an+(1+a+2b)n^2\}=\frac{7n^2+1}{n^3}$

따라서 $a=0$이고 $1+a+2b=7$ 즉, $b=3$이다.

$\therefore\ f(x)=x^2+3$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k=8\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\times\frac{1}{n}\times f\left(\frac{k}{n}\right)$

$=8\int_0^1 xf(x)\,dx=8\int_0^1 x(x^2+3)\,dx$

$=8\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=2+12=14$

76) [정답] ②

[해설]

$F'(x)=f(x)$ 이므로 $\int f(x)dx=F(x)+C$ 이다.

따라서 $\mathrm{A}(a,\ F(a))$, $\mathrm{B}(a+c,\ F(a+c))$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{F(a+c)-F(a)}{(a+c)-a}=\frac{1}{c}\{F(a+c)-F(a)\}$

$=\frac{1}{c}\int_a^{a+c}f(x)dx\ =\frac{1}{c}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{c}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{1}{n}$

77) [정답] ③

[해설]

$x_k=1+\frac{k}{n}$ 따라서, 넓이 $A_k=\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{2}\int_1^2 xf(x)dx$

$=\frac{1}{2}\int_1^2 xe^x dx$

$=\frac{1}{2}\left\{[xe^x]_1^2-\int_1^2 e^x dx\right\}=\frac{1}{2}e^2$

78) [정답] 11

[해설]

점 $\mathrm{D}_k\left(0,\ \frac{k}{n}\right)$이므로 직선 AD_k의 방정식은

$y=\frac{k}{n}x+\frac{k}{n}$

직선 AD_k와 곡선 $y=-x^2+1$과의 교점 P_k는

$\mathrm{P}_k\left(1-\frac{k}{n},\ \frac{2k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$이므로

$\triangle \mathrm{AP}_kQ_k$의 밑변의 길이는 $2-\frac{k}{n}$이고

높이는 $\frac{2k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2$

$\therefore S_k=\frac{1}{2}\left(2-\frac{k}{n}\right)\left\{\frac{2k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(2-\frac{k}{n}\right)\left\{\frac{2k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$

$=\int_0^1\frac{1}{2}(2-x)(2x-x^2)\,dx=\frac{11}{24}$

따라서 $\alpha=\frac{11}{24}$이고 $24\alpha=11$

79) [정답] 10

[해설]

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\overline{\mathrm{P_1Q_1}}^3+\overline{\mathrm{P_2Q_2}}^3+\cdots+\overline{\mathrm{P_nQ_n}}^3\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3=\frac{1}{2}\int_1^3 x^3dx=10$

80) [정답] 100

[해설]

$S_k=1-\frac{1}{2}\times\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\times\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)=1-\frac{k}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{1-\frac{k}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$

$=\int_0^1\left(1-x+\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}\ \therefore\alpha=\frac{2}{3}$

따라서 $150\alpha=100$

81) [정답] ①

[해설]

$S_k=\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin\frac{2k\pi}{4n}=\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}\times\frac{1}{2n}$

($x_k=\frac{k}{2n}$, $\triangle x=\frac{1}{2n}$로 놓으면)

$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\pi x\,dx=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\pi}$

82) [정답] 32

[해설]

삼각형 $\mathrm{OQ}_k\mathrm{B}$에서

$\angle\mathrm{OBQ}_k=\angle\mathrm{AOP}_k=\frac{k\pi}{2n}$이고 $\overline{\mathrm{OB}}=8$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}_k}=8\sin\frac{k\pi}{2n}$, $\overline{\mathrm{BQ}_k}=8\cos\frac{k\pi}{2n}$

$S_k=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}_k}\times\overline{\mathrm{BQ}_k}$

$=\frac{1}{2}\times 8\sin\frac{k\pi}{2n}\times 8\cos\frac{k\pi}{2n}=16\sin\frac{k\pi}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=16\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$

$=16\int_0^1\sin\pi x\,dx=16\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=\frac{32}{\pi}$

따라서 $\alpha=32$

83) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 $0\le\sin 2x\le 1$이고

$1\le 1+\sin x\le 2$이므로

$f(x)=\frac{\sin 2x}{1+\sin x}\ge 0$이다. (참)

ㄴ. $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로 롤의 정리에 의해서

$f'(c)=0$인 c가 열린 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에 존재한다. (참)

ㄷ. 열린 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 $\sin 2x\ne 0$이므로

열린 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 $f(x)>0$이다.

ㄴ에서 $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$이다.

$1+\sin x=t$라 하면 $\cos x dx=dt$이고

$x=0$일 때, $t=1$이고 $x=\frac{\pi}{2}$일 때, $t=2$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x}{1+\sin x}dx$

$=\int_1^2\frac{2(t-1)}{t}dt=2\int_1^2\left(1-\frac{1}{t}\right)dt$

$=2\left[t-\ln t\right]_1^2=2(1-\ln 2)$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

[다른 풀이]

ㄴ. $f'(x)=\frac{2\cos 2x(1+\sin x)-\sin 2x\cos x}{(1+\sin x)^2}$

$f'(0)=2$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$이므로 중간값의 정리에 의해서

$f'(c)=0$인 c가 열린 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에 존재한다. (참)

[별해]

ㄱ. 주어진 구간에서 $1+\sin x>0$이고 $\sin^2 x\ge 0$이므로

$f(x)\ge 0$이다. (참)

ㄴ. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)=0$ 이므로 평균값의 정리에 의하여 c가

주어진 구간에 존재한다. (참)

ㄷ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\sin x}dx$에서 $\sin x=t$로 치환하면

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\sin x}dx=\int_0^1\frac{2t}{1+t}dt=\int_0^1 2-\frac{2}{1+t}dt$

$=2-2\int_1^2\frac{1}{t}dt=2-2\ln 2$ 이므로 참

84) [정답] ③

[해설]

$f(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}(\because 0\le x\le \pi)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에서 x축과 만난다.

이때, $f(x)+f(\pi-x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이다.

$$\therefore\ S_1=S_2$$

$$\therefore\ S_1+S_2=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+2}dx$$

$t=\sin x+2$라 하면

$x=0$일 때, $t=2$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때, $t=3$이고

$dt=\cos x dx$이므로

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+2}dx=2\int_2^3\frac{1}{t}dt$$

$$=2\Big[\ln x\Big]_2^3=2(\ln 3-\ln 2)=2\ln\frac{3}{2}$$

85) [정답] 54

[해설]

$f(1)=g(1)$ 이고 $f(-1)=f(1)=1$ 이므로 $f(-1)=g(-1)=1$

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x좌표는 -1, 1이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right\}=\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx=27$$

이므로 $-1\le x\le 1$에서 $f(x)\ge g(x)$이다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 y축 대칭이므로 함수 $y=f(x)-g(x)$ 의 그래프는 y축 대칭이다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^1|f(x)-g(x)|dx=\int_{-1}^1\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=2\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx=54$$

따라서 구하는 넓이는 54

86) [정답] ①

[해설]

점 A를 지나고 점 A에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$$y-f(t)=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)$$

$y=0$일 때 $x=f(t)f'(t)+t$ 이므로 $\mathrm{C}(f(t)f'(t)+t,\ 0)$

$\overline{\mathrm{AB}}=f(t)$, $\overline{\mathrm{BC}}=f(t)f'(t)$이므로

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\{f(t)\}^2f'(t)$

즉 $\frac{1}{2}\{f(t)\}^2f'(t)=\frac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^t)$에서

$$\{f(t)\}^2f'(t)=e^{3t}-2e^{2t}+e^t$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}\{f(t)\}^2\right]=e^{3t}-2e^{2t}+e^t$$

$\frac{1}{3}\{f(t)\}^3=\frac{1}{3}e^{3t}-e^{2t}+e^t+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=0$이므로 $C=-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}\{f(t)\}^3=\frac{1}{3}e^{3t}-e^{2t}+e^t-\frac{1}{3}$에서

$$\{f(t)\}^3=e^{3t}-3e^{2t}+3e^t-1$$
$$=(e^t-1)^3$$

따라서 $f(x)=e^x-1$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^1(e^x-1)dx=\Big[e^x-x\Big]_0^1$$
$$=(e-1)-1$$
$$=e-2$$

87) [정답] ②

[해설]

$f(x)=ax^2$, $g(x)=\ln x$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점 P의 x좌표를 k라 하면

$ak^2=\ln k$ …… ㉠

$f'(x)=2ax$, $g'(x)=\frac{1}{x}$

두 곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 서로 같으므로

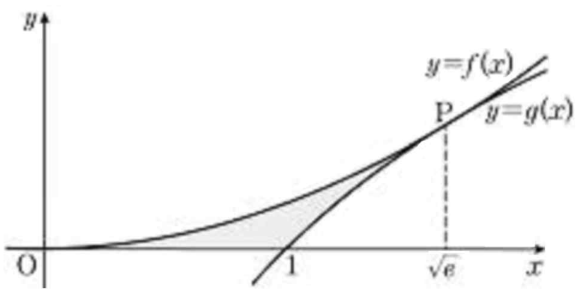
$2ak=\frac{1}{k}$

$2ak^2=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\ln k=\dfrac{1}{2}$, $k=\sqrt{e}$

$$a=\frac{1}{2e}$$

$f(x)=\dfrac{x^2}{2e}$이고 점 P의 좌표는 $\left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{2}\right)$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\sqrt{e}}\frac{x^2}{2e}dx-\int_1^{\sqrt{e}}\ln x dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{6e}\right]_0^{\sqrt{e}}-\left\{\left[\ x\ln x\right]_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}\left(x\times\frac{1}{x}\right)dx\right\}$$

$$=\left[\frac{x^3}{6e}\right]_0^{\sqrt{e}}-\left[x\ln x\right]_1^{\sqrt{e}}+\left[x\right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{e}}{6}-0\right)-\left(\frac{\sqrt{e}}{2}-0\right)+\left(\sqrt{e}-1\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{e}-3}{3}$$

88) [정답] ④

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프가 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 x축과 만나는 점의 x좌표를 k라 하자.

곡선 $y=f(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

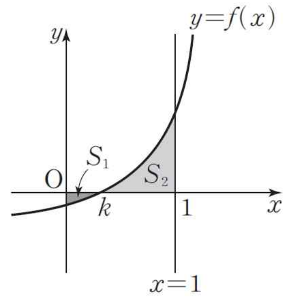
$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=2$에서 $-S_1+S_2=2\cdots\cdots$ ㉠

$\displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx=2\sqrt{2}$에서 $S_1+S_2=2\sqrt{2}\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $S_1=\sqrt{2}-1$, $S_2=\sqrt{2}+1$

(ⅰ) $0\le x\le k$인 경우

$F(x)=\displaystyle\int_0^x(-f(t))dt$이므로



$F'(x)=-f(x)$

$\displaystyle\int_0^k f(x)F(x)dx$에서

$F(x)=s$로 놓으면

$x=0$일 때 $s=0$, $x=k$일 때 $s=\sqrt{2}-1$이고,

$\dfrac{ds}{dx}=F'(x)=-f(x)$이므로

$$\int_0^k f(x)F(x)dx=\int_0^{\sqrt{2}-1}(-s)ds=\left[-\frac{1}{2}s^2\right]_0^{\sqrt{2}-1}$$

$$=-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2$$

(ⅱ) $k\le x\le 1$인 경우

$F(x)=(\sqrt{2}-1)\displaystyle\int_k^x f(t)dt$이므로 $F'(x)=f(x)$

$\displaystyle\int_k^1 f(x)F(x)dx$에서 $F(x)=s$로 놓으면

$x=k$일 때 $s=\sqrt{2}-1$, $x=1$일 때 $s=2\sqrt{2}$이고,

$\dfrac{ds}{dx}=F'(x)=f(x)$이므로

$$\int_k^1 f(x)F(x)dx=\int_{\sqrt{2}-1}^{2\sqrt{2}}s\,ds=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_{\sqrt{2}-1}^{2\sqrt{2}}$$

$$=4-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2$$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$\int_0^1 f(x)F(x)dx$$

$$=\int_0^k f(x)F(x)dx+\int_k^1 f(x)F(x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2+4-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2$$

$$=4-(\sqrt{2}-1)^2=4-(3-2\sqrt{2})$$

$$=1+2\sqrt{2}$$

89) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $f(n)=\displaystyle\int_n^{n+1}f(x)dx+(A_n+B_n)$

$\therefore \int_{n}^{n+1} f(x)dx = f(n) - (A_n + B_n)$ 　　따라서 참

ㄴ. $A_n = \frac{1}{2}(e^{-n} - e^{-n-1}) = \frac{e-1}{2}e^{-n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{\frac{1}{2}(e-1)e^{-2}}{1-e^{-1}} = \frac{1}{2e}$ 　　따라서 참

ㄷ. $B_n = \frac{1}{2}(e^{-n} + e^{-n-1}) - \int_{n}^{n+1} e^{-x}\, dx$

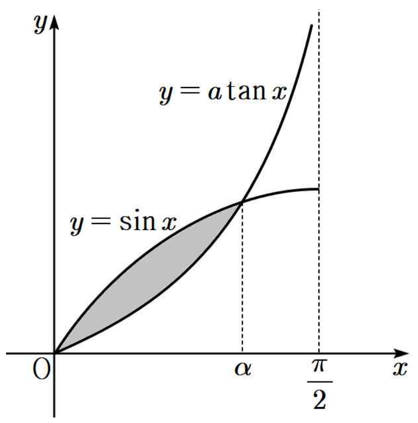
$= \frac{1}{2}(e^{-n} + e^{-n-1}) + (e^{-n-1} - e^{-n}) = \frac{3}{2}e^{-n-1} - \frac{1}{2}e^{-n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \frac{\frac{3}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-1}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{3-e}{2e^2-2e} = \frac{3-e}{2e(e-1)}$ 　　따라서

참

90) [정답] ②

[해설]



두 함수 $y = \sin x$, $y = a\tan x$의 교점의 x좌표를

$\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\sin\alpha = a\tan\alpha$, $\sin\alpha = a \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin\alpha \neq =$이므로 $\cos\alpha = a$

$f(a) = \int_{0}^{\alpha} (\sin x - a\tan x)\,dx$

$= \int_{0}^{\alpha} \sin x\,dx - a\int_{0}^{\alpha} \tan x\,dx$ 　　…… ㉠

㉠을 a에 대하여 미분하면

$f'(a) = \sin\alpha \frac{d\alpha}{da} - \int_{0}^{\alpha} \tan x\,dx - a\tan\alpha \frac{d\alpha}{da}$

$= (\sin\alpha - \cos\alpha\tan\alpha)\frac{d\alpha}{da} - \int_{0}^{\alpha} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$= \Big[\ln\cos x\Big]_{0}^{\alpha}$

$= \ln\cos\alpha$

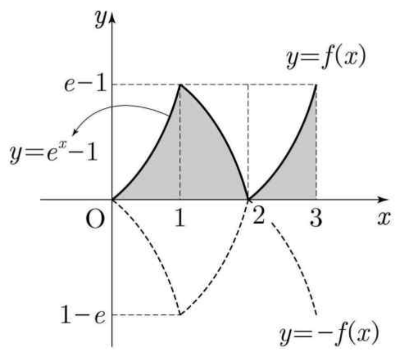
$= \ln a$

$\therefore f'\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln\frac{1}{e^2} = -2$

91) [정답] ①

[해설]

조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



위 그림에서 $\int_{1}^{3} f(x)dx$는 가로와 세로의 길이가 각각 1, $e-1$인 직사각형의 넓이와 같다.

$\therefore \int_{0}^{3} f(x)dx$

$= \int_{0}^{1} (e^x - 1)dx + (e-1) \times 1$

$= \Big[e^x - x\Big]_{0}^{1} + e - 1$

$= 2e - 3$

92) [정답] ③

[해설]

$S_1 + S_2 = k$ (단, $0 < k < 1$)이고

$S_1 = \int_{0}^{k} x\,dy = \int_{0}^{k} y^{\frac{1}{4}}\,dy$

$= \left[\frac{4}{5}y^{\frac{5}{4}}\right]_{0}^{k} = \frac{4}{5}k^{\frac{5}{4}}$

$\therefore\ S_2 = k - \frac{4}{5}k^{\frac{5}{4}}$

또한, $S_3 + S_4 = 1 - k$ 이고

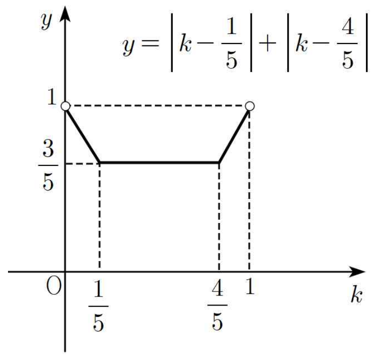
$S_4 = \int_{k}^{1} y^{\frac{1}{4}}\,dy = \left[\frac{4}{5}y^{\frac{5}{4}}\right]_{k}^{1} = \frac{4}{5}\left(1 - k^{\frac{5}{4}}\right)$

$\therefore\ S_3 = (1-k) - \frac{4}{5}\left(1 - k^{\frac{5}{4}}\right) = \frac{1}{5} - k + \frac{4}{5}k^{\frac{5}{4}}$

따라서

$|S_1-S_3|+|S_2-S_4|=\left|k-\frac{1}{5}\right|+\left|k-\frac{4}{5}\right|$

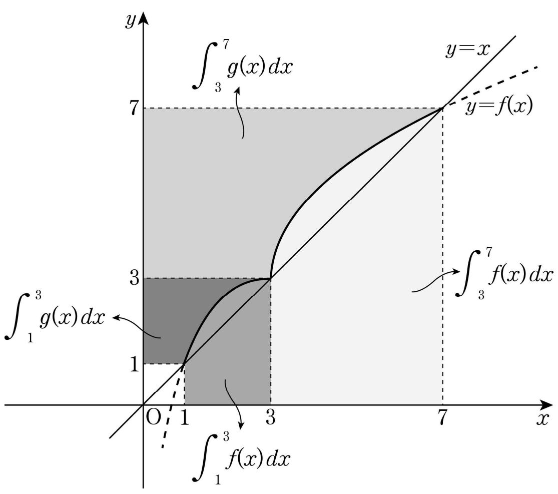
이고 $y=\left|k-\frac{1}{5}\right|+\left|k-\frac{4}{5}\right|$ 는 다음 그림과 같다.



따라서 최솟값은 $\frac{3}{5}$ 이다.

93) [정답] **24**

[해설]



함수 $f(x)$가 $f(1)<f(3)$이고 일대일대응이므로 함수 $f(x)$는 구간 $[1, 3]$에서 증가한다.

그러므로 $\int_1^3 f(x)\,dx=3\times3-1\times1-\int_1^3 g(x)\,dx$

조건 (다)에 의해서 $\int_1^3 g(x)\,dx=3$ 이므로

$\int_1^3 f(x)\,dx=8-3=5$

$\int_3^7 f(x)\,dx=\int_1^7 f(x)\,dx-\int_1^3 f(x)\,dx$

$=27-5=22$

조건 (나)에 의해서 함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(3, 7)$에서 위로 볼록하다. 조건 (가)에 의해서 $f(3)=3$, $f(7)=7$이므로 구간 $[3, 7]$에서 $f(x)-x\ge0$이다.

$12\int_3^7 |f(x)-x|\,dx=12\int_3^7 \{f(x)-x\}\,dx$

$=12\left\{\int_3^7 f(x)\,dx-\int_3^7 x\,dx\right\}$

$=12\times(22-20)=24$

94) [정답] ⑤

[해설]

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$ 이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$

$=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)\right\}+\frac{2}{n}\left\{f\left(\frac{4}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)\right\}$

$+\frac{3}{n}\left\{f\left(\frac{6}{n}\right)-f\left(\frac{4}{n}\right)\right\}+\cdots$

$+\frac{n-1}{n}\left\{f\left(\frac{2n-2}{n}\right)-f\left(\frac{2n-4}{n}\right)\right\}+\frac{n}{n}\left\{f\left(\frac{2n}{n}\right)-f\left(\frac{2n-2}{n}\right)\right\}$

$=-\frac{1}{n}f(0)-\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)-\frac{1}{n}f\left(\frac{4}{n}\right)-\cdots$

$-\frac{1}{n}f\left(\frac{2n-2}{n}\right)+f(2)$

$=f(2)-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$\frac{k}{n}=x_k$라 하면 $\frac{1}{n}=\Delta x$이므로 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(2x_k)\Delta x=\int_0^1 f(2x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\,dt=\frac{1}{8}$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{f(2)-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}=f(2)-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

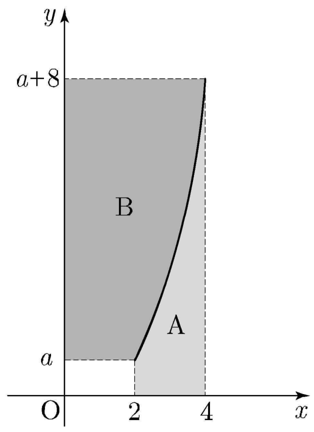
95) [정답] ③

[해설]

$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{2k}{n}\right)=\int_2^4 f(x)\,dx$

$\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(a+\frac{8k}{n}\right)=\int_{a}^{a+8} g(x)dx$

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이고 역함수가 존재하므로 구간 $[2, 4]$에서 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 $(2, a)$에서 $(4, a+8)$까지 증가하는 모양이다.



$\int_{2}^{4} f(x)dx$의 값은 위 그림의 A부분의 넓이와 같고,

$\int_{a}^{a+8} g(x)dx$의 값은 위 그림의 B부분의 넓이와 같다.

$\int_{2}^{4} f(x)dx+\int_{a}^{a+8} g(x)dx=50$에서

$4(a+8)-2a=50$

$\therefore\ a=9$

96) [정답] ②

[해설]

$$f'(x)=\frac{8x(x^2+3)-4x^2\times 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{24x}{(x^2+3)^2}$$

양의 실수 전체의 집합에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$f(x)=x$에서 $x^3-4x^2+3x=x(x-1)(x-3)=0$이므로

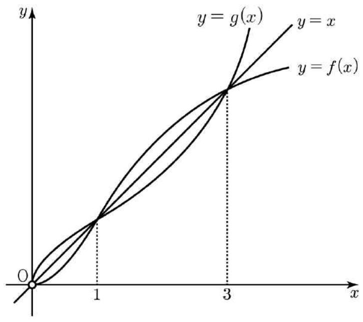
두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 1, 3이다.

$$f''(x)=\frac{24(x^2+3)^2-24x\times 2(x^2+3)\times 2x}{(x^2+3)^4}$$

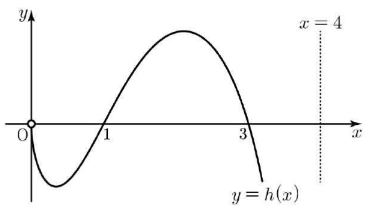
$$=\frac{72(1-x)(1+x)}{(x^2+3)^3}$$

곡선 $y=f(x)$는 열린 구간 $(0, 1)$에서 아래로 볼록하고,열린 구간 $(1, \infty)$에서 위로 볼록하며,변곡점은 $(1, 1)$이다.

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[1, 3]$에서만 $h(x)\ge 0$이고, 함수 $h(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



ㄱ. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 1, 3이므로

$f(1)=g(1)=1,\ h(1)=0$ (참)

ㄴ. 두 양수 a, b에 대하여 $\int_{a}^{b} h(x)dx$의 값이 최대가 되려면 닫힌구간 $[a, b]$에서 $h(x)\ge 0$이고 $b-a$의 값이 최대이어야 하므로 $a=1$, $b=3$

그러므로 $b-a=2$ (참)

ㄷ. $f(g(x))=x$에서 $f'(g(x))g'(x)=1$이고

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=f'(x)-\frac{1}{f'(g(x))}$$

$$g''(x)=-\frac{f''(g(x))g'(x)}{\{f'(g(x))\}^2}$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 1)$에서만 변곡점을 가지므로

$f''(1)=0$

$f(1)=g(1)=1$이므로

$$g''(1)=-\frac{f''(g(1))g'(1)}{\{f'(g(1))\}^2}=-\frac{f''(1)g'(1)}{\{f'(1)\}^2}=0$$

$$h''(1)=f''(1)-g''(1)=0$$

(i) $0<x<1$인 모든 실수 x에 대하여

$f''(x)>0$, $g'(x)>0$, $0<g(x)<1$이므로

$$g''(x)=-\frac{f''(g(x))g'(x)}{\{f'(g(x))\}^2}<0$$

열린구간 $(0, 1)$에서 $h''(x)=f''(x)-g''(x)>0$

(ii) $1<x<4$인 모든 실수 x에 대하여

$g'(x)>0$, $g(x)>1$이고 $x>1$인 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)<0$이므로

$$g''(x)=-\frac{f''(g(x))g'(x)}{\{f'(g(x))\}^2}>0$$

열린구간 $(1,\ 4)$에서 $h''(x)=f''(x)-g''(x)<0$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $h'(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$h''(x)$		$+$	0	$-$	
$h'(x)$		↗	$\frac{5}{6}$	↘	

함수 $h'(x)$는 $x=1$에서 최댓값을 갖는다.

$f'(1)=\frac{3}{2}$이므로

$$h'(1)=f'(1)-\frac{1}{f'(g(1))}=f'(1)-\frac{1}{f'(1)}=\frac{5}{6}$$

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

97) [정답] ①

[해설]

선분 PQ를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이 $S(x)$는

$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\sqrt{x(x^2+1)\sin(x^2)}\right\}^2$

입체도형의 부피 V는

$$V=\int_0^{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{3}}{4}x(x^2+1)\sin(x^2)dx$$

$x^2=t$라 하면 $2x\frac{dx}{dt}=1$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{\pi}$일 때 $t=\pi$이므로

$$V=\frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^{\pi}(t+1)\sin t\,dt$$

$u(t)=t+1$, $v'(t)=\sin t$

$u'(t)=1$, $\quad v(t)=-\cos t$

$$V=\frac{\sqrt{3}}{8}\times\Big[-(t+1)\cos t\Big]_0^{\pi}-\frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^{\pi}(-\cos t)dt$$

$$=\frac{\sqrt{3}(\pi+2)}{8}$$

98) [정답] ④

[해설]

$x<0$일 때, $\overline{\mathrm{PH}}=\mathrm{e}^{-x}$이므로 선분 PH를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는

e^{-2x}

$x\geq 0$일 때,

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\ln(x+1)+1}$

이므로 선분 PH를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는

$\ln(x+1)+1$

따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V=\int_{-\ln 2}^{0}e^{-2x}dx+\int_0^{e-1}\{\ln(x+1)+1\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-\ln 2}^{0}+\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx$$

$$+\int_0^{e-1}1\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2\ln 2}+\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx$$

$$+[x]_0^{e-1}$$

$$=e+\frac{1}{2}+\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx$$

$\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx$에서 $x+1=t$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=1$

또 $x=0$일 때 $t=1$, $x=e-1$일 때 $t=e$이므로

$$\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx=\int_1^{e}\ln t\,dt$$

$$=[t\ln t]_1^e-\int_1^e 1\,dt$$

$$=e-[t]_1^e=1$$

따라서 구하는 부피는

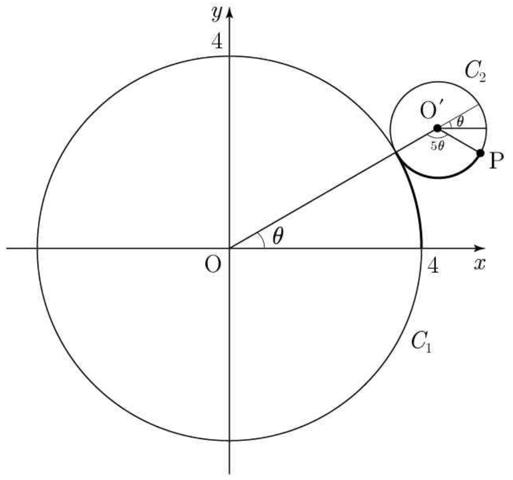
$$V=e+\frac{1}{2}+1=e+\frac{3}{2}$$

99) [정답] ③

[해설]

점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 위치벡터를 $(x,\,y)$라 하면 θ가 0에서 $\frac{\pi}{2}$까지 변할 때, 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\cdot d\theta$$이다.



원 C_2의 중심을 O′이라 하면

$\overrightarrow{OO'}=(5\cos\theta,\ 5\sin\theta)$,

$\overrightarrow{O'O}=(\cos(\pi+5\theta),\ \sin(\pi+5\theta))=(-\cos5\theta,\ -\sin5\theta)$

이므로

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}=(5\cos\theta-\cos5\theta,\ 5\sin\theta-\sin5\theta)$

$\therefore\ \dfrac{dx}{d\theta}=-5\sin\theta+5\sin5\theta$

$\dfrac{dy}{d\theta}=5\cos\theta-5\cos5\theta$

$\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2=(-5\sin\theta+5\sin5\theta)^2+(5\cos\theta-5\cos5\theta)^2$

$=50-50(\sin\theta\sin5\theta+\cos\theta\cos5\theta)$

$=50-50\cos4\theta=50-50(1-2\sin^2 2\theta)$

$=100\sin^2 2\theta$

$\therefore\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\cdot d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}10\sin2\theta d\theta$

$=\Big[-5\cos2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=10$