

제 2 교시

수학 영역(B형)

AL.G.O.

5지 선다형

1. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ 에 대하여

$3X - A = X + B$ 를 만족시키는 행렬 X 의 모든 성분의 합은?

[2점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 + a_6 + a_7 = 12$ 일 때, $a_2 + a_{10}$ 의 값은? [2점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

3. 일차변환 $f: (x, y) \rightarrow (ax + by, x - 2y)$ 에 의하여 점 $(1, 2)$ 가 점 $(2, b)$ 로 옮겨질 때, $a + b$ 의 값은? [2점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \frac{n^2 - 2n}{n + 1} \right)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a \sin(x-1)}{2(x-1)} & (x > 1) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + bx^3 + c}{x^{2n} + 1} & (x \leq 1) \end{cases}$$

가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속일 때, $a+b+c$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

6. 삼각방정식 $\sin 2x - \sin x = 1 - \cos 2x$ 의 모든 실근의 합은?
(단, $0 \leq \theta < 2\pi$ 이다.) [3점]

- ① 2π ② $\frac{5\pi}{2}$ ③ 3π ④ $\frac{7\pi}{2}$ ⑤ 4π

7. 연속함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = e^x + a(\ln x + 1)$$

를 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [3점]

- ① 0 ② $\frac{1}{e}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ e

8. x, y 에 대한 연립일차방정식

$$\begin{pmatrix} a & 4 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

가 $x=0, y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합은? [3점]

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

9. 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ 로 나타내어지는 일차변환 f 가 있다.

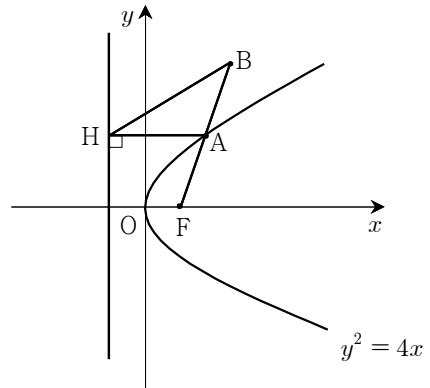
일차변환 f 에 의하여 점 P 가 점 P_1 으로, 점 P_1 이 점 P_2 로, 점 P_2 가 점 P_3 로 옮겨진다. 원점 O 와 두 점 P, P_3 가 한 직선위에 있고, $\overline{OP}=8, \overline{OP_3}=1$ 일 때, 삼각형 $P_1P_2P_3$ 의 넓이의 최댓값은? [3점]

- ① $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{7}{2}\sqrt{3}$

10. 그림과 같이 초점이 F 인 포물선 $y^2 = 4x$ 위에 점 A 가 있다.

선분 FA 의 연장선 위에 $2\overline{FA} = \overline{FB}$ 가 되도록 점 B 를 잡고, 점 A 에서 준선에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

$\tan(\angle HAB) = -2\sqrt{2}$ 일 때, 삼각형 ABH 의 넓이는? [3점]



- ① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $3\sqrt{2}$ ④ 5 ⑤ $4\sqrt{2}$

11. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 1$ 이고, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 할 때,

$$a_n(2S_n - 1) = 2S_n^2 \quad (n \geq 2) \dots\dots (*)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

a_n 과 S_n 의 관계에 의하여

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

이므로 주어진 식(*)에서

$$(S_n - S_{n-1})(2S_n - 1) = 2S_n^2$$

$$S_n + 2S_n S_{n-1} - S_{n-1} = 0$$

이다. 위 식의 양변을 $S_n S_{n-1}$ 로 나누어 정리하면

$$\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = \boxed{(가)} \quad (n \geq 2)$$

이다. 수열 $\left\{ \frac{1}{S_n} \right\}$ 은

첫째항이 $\frac{1}{S_1} = \frac{1}{a_1} = 1$, 공차가 $\boxed{(가)}$ 인 등차수열이므로

$$S_n = \boxed{(나)}$$

이다. 따라서

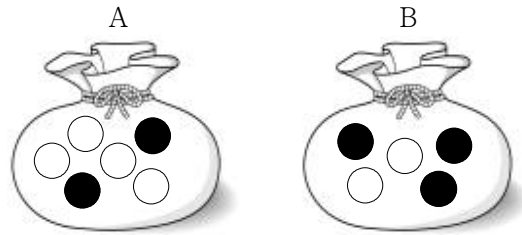
$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ \boxed{(다)} & (n \geq 2) \end{cases}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p 라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $p + \frac{g(10)}{f(10)}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{30}{17}$ ② $\frac{32}{17}$ ③ 2 ④ $\frac{36}{17}$ ⑤ $\frac{38}{17}$

12. 주머니 A에는 흰 공 4개와 검은 공 2개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 모두 주머니 B에 넣은 후, 주머니 B에서 임의로 꺼낸 2개의 공이 흰 공 1개와 검은 공 1개 일 때, A에서 꺼낸 공이 흰 공 1개와 검은 공 1개일 확률은? [3점]



- ① $\frac{46}{89}$ ② $\frac{47}{89}$ ③ $\frac{48}{89}$ ④ $\frac{49}{89}$ ⑤ $\frac{50}{89}$

13. 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점을 F와 F'이라 하자.

이 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 $\angle PFF' = \frac{\pi}{3}$ 일 때, \overline{PF} 의 값은? [3점]

- ① $\frac{31}{11}$ ② $\frac{32}{11}$ ③ 3 ④ $\frac{34}{11}$ ⑤ $\frac{35}{11}$

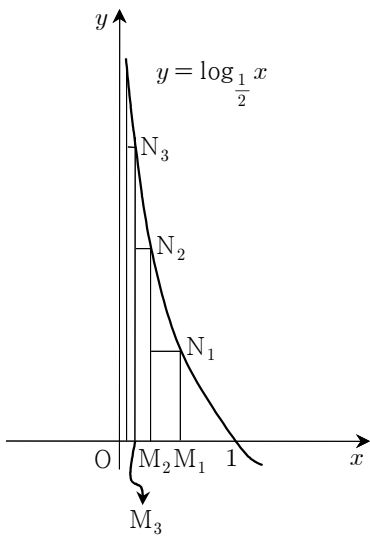
14. 함수 $f(x) = x - 1$ 에 대하여 분수방정식

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)+2} = \frac{a}{\{f(x+1)\}^2}$$

의 실근이 존재하지 않도록 하는 모든 정수 a의 값의 곱은? [4점]

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

15. 그림과 같이 점 $(1, 0)$ 과 원점 O 의 중점을 M_1 , 점 M_1 을 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 와 만나는 점을 N_1 이라 하자. 점 M_1 과 원점 O 의 중점을 M_2 , 점 M_2 을 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 와 만나는 점을 N_2 이라 하자. 이와 같은 방법으로 점 M_n 과 원점 O 의 중점을 M_{n+1} , 점 M_{n+1} 을 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 와 만나는 점을 N_{n+1} 이라 하자. 선분 $M_n M_{n+1}$ 과 선분 $M_n N_n$ 을 두 변으로 하는 직사각형의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{1}{4}$
- ② $\frac{1}{2}$
- ③ $\frac{3}{4}$
- ④ 1
- ⑤ $\frac{5}{4}$

16. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$AB = B + E, \quad A^2 B^2 = B$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A^{-1}B = BA^{-1}$
 ㄴ. $A^2 = A - E$
 ㄷ. $\sum_{n=1}^{200} (A^{2n} + B^{2n}) = 2E$

- ① ㄴ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. $x > 1$ 에서 정의된 함수 $f(x) = (\ln x)^2 + \frac{x}{e}$ 의 역함수를

$g(x)$ 라 하자. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{g(x)-g(2)} = k$ 일 때, k 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{2e}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ $\frac{2}{e}$ ④ $\frac{3}{e}$ ⑤ $\frac{4}{e}$

18. 양수 x 에 대하여 $\log x$ 의 지표와 가수를 각각 $f(x), g(x)$ 라 하자. 연립방정식

$$\begin{cases} \left[\frac{n}{3} \right] = \frac{n}{3} \\ [f(n)g(n)] = f(n) - f(99) \end{cases}$$

를 만족하는 자연수 n 의 값을 작은 것부터 차례대로

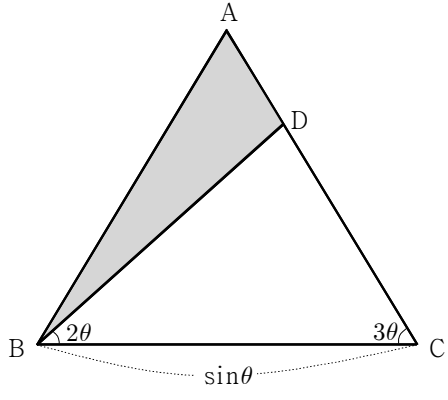
$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 이라 할 때, $a_{30} + a_{31}$ 의 값은? (단, $[x]$ 는

x 보다 크지 않은 최대의 정수이고, $3.16 < 10^{\frac{1}{2}} < 3.17$ 이다.)

[4점]

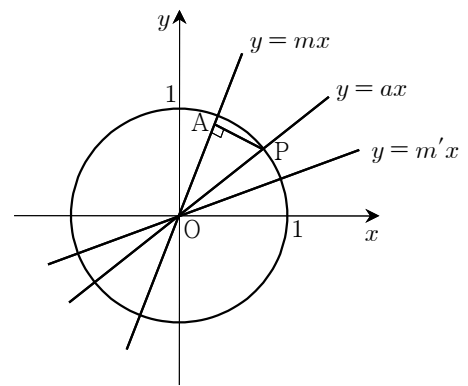
- ① 183 ② 189 ③ 195 ④ 317 ⑤ 417

19. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형 ABC에서 변 AC 위에 점 D가 있다. $\angle DBC = 2\theta$, $\angle C = 3\theta$, $\overline{BC} = \sin\theta$ 이다. 삼각형 ABD의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ 이다.) [4점]



- ① $\frac{1}{10}$
- ② $\frac{3}{20}$
- ③ $\frac{2}{10}$
- ④ $\frac{1}{4}$
- ⑤ $\frac{3}{10}$

20. 그림과 같이 $0 < m' \leq a \leq m$ 을 만족하는 원점 O를 지나는 세 직선 $y = mx$, $y = ax$, $y = m'x$ 가 있다. 직선 $y = ax$ 와 원 $x^2 + y^2 = 1$ 이 제 1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 점 P에서 직선 $y = mx$ 에 내린 수선의 발을 A라고 하자. $\sqrt{3}(1 + mm') = m - m'$ 를 만족할 때, $\overline{OA} + \overline{AP} + 2(\overline{OA} \times \overline{AP})$ 의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]



- ① $2 - \sqrt{2}$
- ② $1 - \sqrt{2}$
- ③ 0
- ④ $1 + \sqrt{2}$
- ⑤ $2 + \sqrt{2}$

21. 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \int_0^x \{f(t)\}^2 dt$$

를 만족시킨다. $f(1) = 5$ 일 때, $\int_0^1 x\{f(x)\}^3 dx$ 의 값은? [4점]

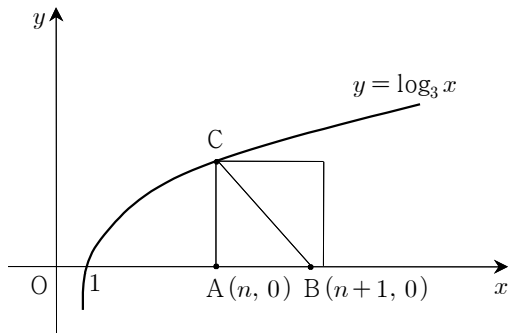
- ① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

단답형

22. 곡선 $y = e^{2x} + x^2 + a$ 위의 점 $(a, e^{2a} + 2)$ 에서의 접선의 기울기가 양수일 때, $10a^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x) + e^{5x} - 1}{\sin 2x}$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 그림과 같이 자연수 n 에 대하여 x 축 위의 두 점 $A(n, 0)$, $B(n+1, 0)$ 이 있다. 직선 $x=n$ 과 곡선 $y=\log_3 x$ 가 만나는 점을 C 라 하자. 선분 AC 를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 S_1 , 삼각형 ABC 의 넓이를 S_2 라 하자. $2(S_1 - S_2) \leq 3$ 를 만족하는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오. [3점]

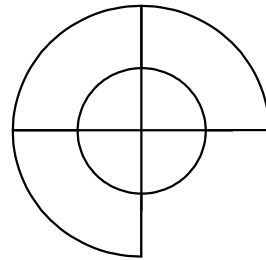


25. 어느 지역의 해수면에서의 기압을 P_0 (hPa)이라 하고, 해수면으로부터의 높이가 h (km)인 지점에서의 기압을 P (hPa)이라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log P = \log P_0 - \log 2^{\frac{h}{5.5}}$$

이 지역에서 해수면으로부터의 높이가 H_A (km)인 A지점에서의 기압은 P_A (hPa)이고, 높이가 H_B (km)인 B지점에서의 기압이 P_B (hPa)이다. $H_B - H_A = 22$ (km)일 때, $\frac{P_A}{P_B}$ 의 값을 구하시오. (단, hPa은 기압의 단위이다.) [3점]

26. 그림과 같이 중심이 같고 반지름이 다른 원과 중심각의 크기가 $\frac{3}{2}\pi$ 인 부채꼴이 있다. 원과 부채꼴의 중심을 지나고 서로 수직인 두 선분에 의해서 7개의 영역으로 나누어져 있다. 4가지 색으로 7개의 영역을 색칠하여 각 영역을 구분하려고 한다. 안쪽 영역에 4가지 색을 모두 사용하여 색칠하고 바깥쪽 영역에는 4가지 색 중에서 3가지 색을 선택하여 색칠하려고 할 때, 색칠할 수 있는 방법의 수를 구하시오. [4점]



27. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \frac{e^{f(x)}}{x}$$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=g(x)$ 가 점 $(e, 1)$ 에서 만나고, 이 점에서의 접선이 서로 수직이다.

$f'(e) + \frac{1}{f'(e)} = \frac{k}{e}$ 일 때, $100k$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

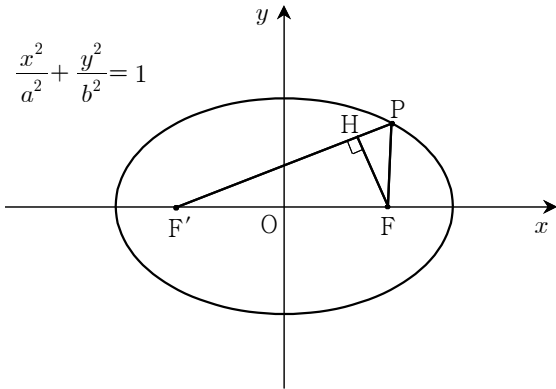
- (가) $f(x) + f(-x) = 0$
 (나) $f(2) = 0, f(3) > 2$

연립부등식 $\begin{cases} \frac{x-3}{x+4} \leq 0 \\ x - \frac{2}{f(x)} \geq \frac{x}{f(x)} \end{cases}$ 을 만족시키는 모든 정수 x 의

값의 곱을 M 이라 할 때, $100M$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 그림과 같이 두 초점이 F, F'인 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위에

제 1사분면의 점 P가 있다. 점 F에서 선분 F'P에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 F'FH의 넓이가 최대일 때, 삼각형 HF'F와 삼각형 FPH의 둘레의 길이가 각각 $6(1 + \sqrt{2})$, 10이다. $\frac{b^2}{a^2} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 실수 전체의 집합에서 이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(-x)$, $f(x) > 0$, $f(x) + f'(x) > 0$ 이다.
- (나) $f(x) = f''(x)$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$

$x=0$ 에서 $x=1$ 까지 곡선 $y=f(x)$ 의 길이를 l 이라 하자.

$l = \frac{q}{p}$ 일 때, $q-p$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인

자연수이고, $\ln 2.7 = 1$ 로 계산한다.) [4점]

- ※ 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.