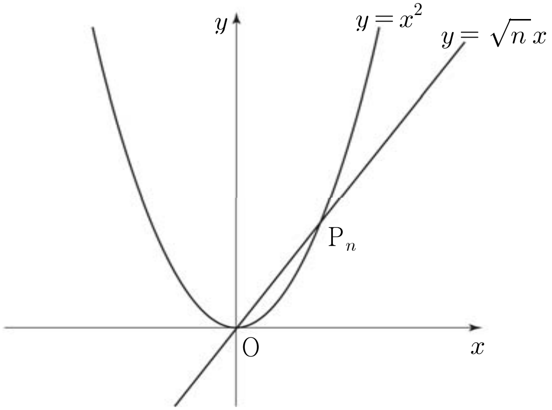
〔13 ~ 14〕 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 그림과 같이 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\sqrt{n}\,x$가 제1사분면에서 만나는 점을 P_n이라 하자.
13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. 점 P_4의 좌표를 (a, b)라 할 때, x, y에 대한 연립일차방정식

$$\begin{pmatrix} k & a \\ b & k-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은?〔3점〕

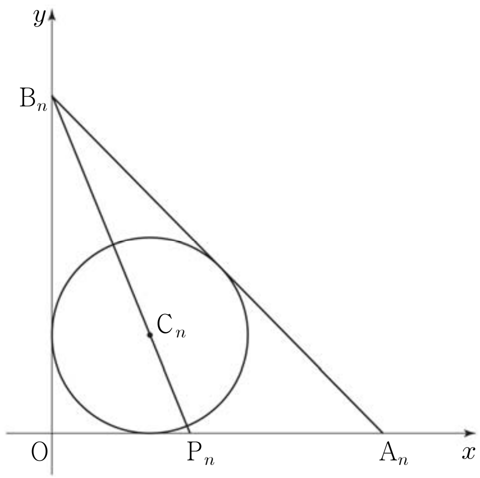
① -14　② -12　③ -10
④ -8　⑤ -6

14. 점 P_n을 지나고 직선 $y=\sqrt{n}\,x$와 수직인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 Q_n, R_n이라 하자.

삼각형 $\mathrm{OQ}_n\mathrm{R}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}\frac{2S_n}{\sqrt{n}}$의 값은? (단, O는 원점이다.)〔4점〕

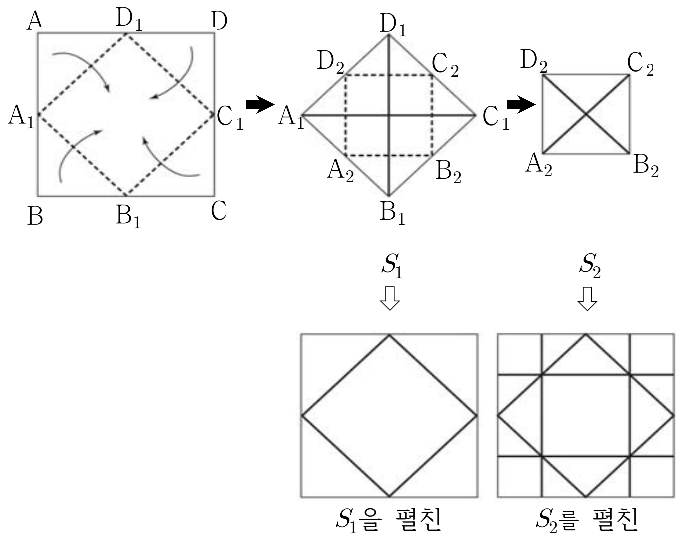
① 80　② 85　③ 90
④ 95　⑤ 100

20. 자연수 n에 대하여 그림과 같이 두 점 $\mathrm{A}_n(n, 0)$, $\mathrm{B}_n(0, n+1)$이 있다. 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$에 내접하는 원의 중심을 C_n이라 하고, 두 점 B_n과 C_n을 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 P_n이라 하자. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OP}_n}}{n}$의 값은?(단,O는원점이다.)〔4점〕



① $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$　② $\sqrt{2}-1$　③ $2-\sqrt{2}$
④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ $2\sqrt{2}-2$

21. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 모양의 종이 ABCD에서 각 변의 중점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1이라 하고 $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}$, $\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1}$, $\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1}$, $\overline{\mathrm{D}_1\mathrm{A}_1}$을 접는 선으로 하여 네 점 A, B, C, D가 한 점에서 만나도록 접은 모양을 S_1이라 하자.
S_1에서 정사각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$의 각 변의 중점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2라 하고 $\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2}$, $\overline{\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2}$, $\overline{\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2}$, $\overline{\mathrm{D}_2\mathrm{A}_2}$를 접는 선으로 하여 네 점 A_1, B_1, C_1, D_1이 한 점에서 만나도록 접은 모양을 S_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 모양을 S_n이라 하고, S_n을 정사각형 모양의 종이 ABCD와 같도록 펼쳤을 때 접힌 모든 선들의 길이의 합을 l_n이라 하자. 예를 들어, $l_1 = 4\sqrt{2}$이다.
l_5의 값은? (단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]



① $24+28\sqrt{2}$ ② $28+28\sqrt{2}$ ③ $28+32\sqrt{2}$
④ $32+32\sqrt{2}$ ⑤ $36+32\sqrt{2}$

29. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (|x|\le 2) \\ -2x+3 & (|x|>2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(-x)\{f(x)+k\}$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하시오. [4점]

30. $x \ge 1$일 때, $\log x$의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 함수 $y=\{f(x)+1\}g(x)$의 그래프와 직선 $y=n$이 만나는 점의 x좌표 중 가장 작은 값을 a_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\left(\log a_n + \frac{1}{n+1}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

4월 교육청 : B형 응시자도 풀어야 하는 A형 문항 정답 및 해설

13. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬 이해하기

점 P_n은 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\sqrt{n}\,x$가 만나는 점이므로 $x^2=\sqrt{n}\,x$

$x=\sqrt{n}$ ($\because$ $x>0$)

$\therefore$ $\mathrm{P}_n(\sqrt{n},\, n)$

$\mathrm{P}_4(2,4)$에서 $a=2$, $b=4$

$\begin{pmatrix} k & 2 \\ 4 & k-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지려면 행렬

$\begin{pmatrix} k & 2 \\ 4 & k-2 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$k(k-2)-8=0$

$k^2-2k-8=0$

$(k-4)(k+2)=0$

$\therefore$ $k=4$ 또는 $k=-2$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 -8

14. [출제의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제해결하기

점 $\mathrm{P}_n(\sqrt{n},\, n)$을 지나고 직선 $y=\sqrt{n}\,x$와 수직인

직선의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{n}}(x-\sqrt{n})+n$이므로

$\mathrm{Q}_n((n+1)\sqrt{n},\, 0)$, $\mathrm{R}_n(0,\, n+1)$

$S_n=\dfrac{1}{2}\times(n+1)\sqrt{n}\times(n+1)$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}\frac{2S_n}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{5}\left\{\frac{2}{\sqrt{n}}\times\frac{(n+1)^2\sqrt{n}}{2}\right\}$

$\displaystyle=\sum_{n=1}^{5}(n+1)^2=\sum_{n=1}^{5}(n^2+2n+1)$

$\displaystyle=\frac{5\times6\times11}{6}+2\times\frac{5\times6}{2}+5=90$

20. [출제의도] 무한수열의 극한을 활용하여 문제해결하기

그림과 같이 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$에 내접하는 원의 중심을 $\mathrm{C}_n(r_n,\, r_n)$이라 하고 내접하는 원이 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$의 세 변과 만나는 점을 각각 D_n, E_n, F_n이라 하자.

$\triangle\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n\mathrm{C}_n \backsim \triangle\mathrm{B}_n\mathrm{OP}_n$

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n} : \overline{\mathrm{B}_n\mathrm{O}} = \overline{\mathrm{F}_n\mathrm{C}_n} : \overline{\mathrm{OP}_n}$

$n+1-r_n : n+1 = r_n : \overline{\mathrm{OP}_n}$

$\overline{\mathrm{OP}_n}=\dfrac{(n+1)r_n}{n+1-r_n}$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n}=\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{E}_n}$, $\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{A}_n}=\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{A}_n}$이고

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{E}_n}+\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{A}_n}=\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{A}_n}$이므로

$(n+1-r_n)+(n-r_n)=\sqrt{2n^2+2n+1}$

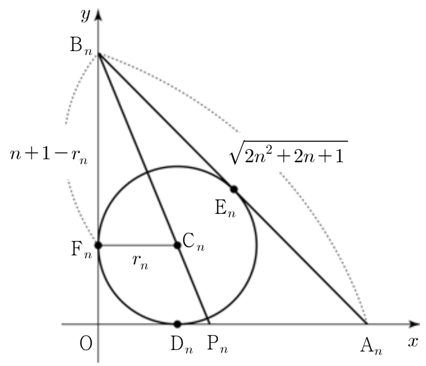
$r_n=\dfrac{1}{2}\left(2n+1-\sqrt{2n^2+2n+1}\right)$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 계산하면

$\overline{\mathrm{OP}_n}=\dfrac{(n+1)\left(2n+1-\sqrt{2n^2+2n+1}\right)}{1+\sqrt{2n^2+2n+1}}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OP}_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(2n+1-\sqrt{2n^2+2n+1}\right)}{n\left(1+\sqrt{2n^2+2n+1}\right)}$

$=\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$



21. [출제의도] 등비수열을 활용하여 추론하기

종이 ABCD를 접는 선은 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인

정사각형이므로, S_1을 펼친 그림에서 접힌 모든 선들의

길이의 합은 $4\sqrt{2}$이다.

S_1을 접는 선은 한 변의 길이가 1인 정사각형이고

종이가 2겹이므로, S_2를 펼친 그림에서 새로 접힌 모든 선들의 길이의 합은 8이다.

S_2를 접는 선은 한 변의 길이가 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$인 정사각형이고

종이가 4겹이므로, S_3을 펼친 그림에서 새로 접힌 모든 선들의 길이의 합은 $8\sqrt{2}$이다.

그러므로 새로 접힌 모든 선들의 길이의 합은

첫째항이 $4\sqrt{2}$이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이다.

따라서 S_n을 펼친 그림에서 접힌 모든 선들의 길이의 합 l_n은 첫째항이 $4\sqrt{2}$이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열의 제n항까지의 합이다.

$\therefore$ $l_5=\dfrac{4\sqrt{2}\times\left\{(\sqrt{2})^5-1\right\}}{\sqrt{2}-1}=24+28\sqrt{2}$

29. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

$\displaystyle\lim_{x\to2-0}f(x)=5$, $\displaystyle\lim_{x\to2+0}f(x)=-1$

$-x=t$라 하면

$x\to2-0$일 때, $t\to-2+0$

$x\to2+0$일 때, $t\to-2-0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to2-0}f(-x)=\lim_{t\to-2+0}f(t)=5$

$\displaystyle\lim_{x\to2+0}f(-x)=\lim_{t\to-2-0}f(t)=7$

함수 $f(-x)\{f(x)+k\}$가

$\displaystyle\lim_{x\to2-0}f(-x)\{f(x)+k\}=5(5+k)$,

$\displaystyle\lim_{x\to2+0}f(-x)\{f(x)+k\}=7(-1+k)$,

$f(-2)\{f(2)+k\}=5(5+k)$

이므로 $x=2$에서 연속이 되기 위해서는

$5(5+k)=7(-1+k)$

따라서 $k=16$

30. [출제의도] 지표와 가수를 활용하여 문제해결하기

정수 $k(k \geq 0)$에 대하여

$10^k \leq x < 10^{k+1}$에서 $\log x$의 지표와 가수는

$f(x) = k$, $g(x) = \log x - k$이므로

$y = \{f(x)+1\}g(x) = (k+1)(\log x - k)$가

$y = n$과 만나는 점의 x좌표는

$(k+1)(\log x - k) = n$

$\log x = k + \dfrac{n}{k+1}$ (단, $n < k+1$)

$\therefore\ x = 10^{k+\frac{n}{k+1}}$

$n=1$일 때, $x = 10^{1+\frac{1}{2}}$, $10^{2+\frac{1}{3}}$, $10^{3+\frac{1}{4}}$, $\cdots$

$\therefore\ a_1 = 10^{1+\frac{1}{2}}$

$n=2$일 때, $x = 10^{2+\frac{2}{3}}$, $10^{3+\frac{2}{4}}$, $10^{4+\frac{2}{5}}$, $\cdots$

$\therefore\ a_2 = 10^{2+\frac{2}{3}}$

$n=3$일 때, $x = 10^{3+\frac{3}{4}}$, $10^{4+\frac{3}{5}}$, $10^{5+\frac{3}{6}}$, $\cdots$

$\therefore\ a_3 = 10^{3+\frac{3}{4}}$

$\vdots$

$\therefore\ a_n = 10^{n+\frac{n}{n+1}}$

$$\sum_{n=1}^{10}\left(\log a_n + \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{10}\left(\log 10^{n+\frac{n}{n+1}} + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{10}(n+1) = 65$$