CSM17

EBS NEXT STEP

<수능특강편>

수학I

Chapter 01 지수와 로그

1

수능특강 1단원 Lv1 1번 문항 변형

$(2^{-1} \div 2^{-4}) \times 3^{-2}$ 의 값은? 1.

① $\frac{8}{9}$ ② $\frac{16}{9}$ ③ $\frac{4}{27}$ ④ $\frac{8}{27}$ ⑤ $\frac{16}{27}$

2

수능특강 1단원 Lv1 5번 문항 변형

$\log_{\sqrt{3}} 12 - \frac{2}{\log_2 9}$ 의 값은? 2.

① $2+\log_3 2$ ② $2+2\log_3 2$ ③ $2+3\log_3 2$
④ $3+\log_3 2$ ⑤ $3+2\log_3 2$

3

수능특강 1단원 Lv2 2번 문항 변형

$2 \le n \le 40$ 인 자연수 n과 정수 a에 대하여 집합 $U=\{x \mid x$는 실수$\}$의 두 부분집합

$$A=\{x \mid x\text{는 } a\text{의 } n\text{제곱근}\},\ B=\{\sqrt[3]{-2}\}$$

가 $A-B=\varnothing$을 만족시키도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. (단, A는 공집합이 아니다.) 3.

4

수능특강 1단원 Lv2 6번 문항 변형

세 양수 a, b, $c\,(a \ne 1)$이

$$a^{b+c}=16,\ a^{bc}=2,\ \log_2(b+c)-\log_2 c=1$$

을 만족시킬 때, $a+b+c$의 값은? 4.

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

5

수능특강 1단원 Lv2 8번 문항 변형

1이 아닌 세 양수 a, b, c가

$$b^{\log_a 2} - c^{\log_a 2} = 4,\ 3\log_b c = 2$$

를 만족시킬 때, $\log_a bc$의 값은? 5.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6

수능특강 1단원 Lv3 6번 문항 변형

1이 아닌 세 양수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 세 수 $\log_a b$, $\log_b c$, $\log_c a$는 이 순서대로 공비가 3인 등비수열을 이룬다.

(나) $b \times c = 4a^2$

$a+b+c$의 값은? 6.

① $\sqrt{2}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{7\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

7

수능특강 1단원 Lv3 1번 문항 변형

$2 \le n \le 10$ 인 자연수 n과 실수 a가

$$\sqrt[n]{a^n} - \sqrt[n+1]{a^{n+1}} = 3a + 10$$

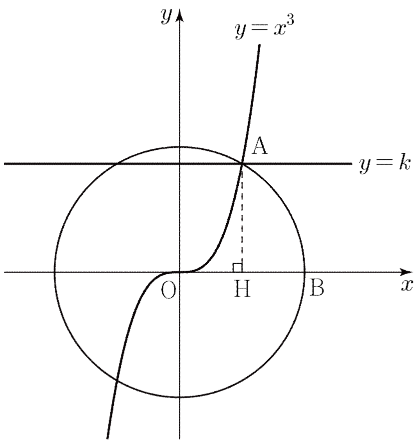
을 만족시킬 때, 모든 순서쌍 (n, a)의 개수는? 7.

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

8

수능특강 1단원 Lv3 2번 문항 변형

그림과 같이 함수 $y=x^3$의 그래프와 직선 $y=k\,(k>0)$이 만나는 점을 A라 하고, 중심이 O이고 선분 OA를 반지름으로 하는 원이 x축과 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 B, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 삼각형 OAH의 넓이의 두 배일 때, k^4의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) 8.



9

수능특강 1단원 Lv2 4번 문항 변형

$2 \leq n \leq 4$, $|m| \leq 19$인 두 정수 n, m에 대하여 $\dfrac{\sqrt[n]{2^m}}{\sqrt[n+1]{3^{m+1}}}$의 값이 유리수가 되도록 하는 순서쌍 (n, m)의 개수를 구하시오. 9.

10

[고난도]

수능특강 1단원 Lv3 4번 문항 변형

자연수 n에 대하여 $n\log_{2n}4$의 값이 자연수가 되도록 하는 n의 값을 작은 것부터 차례로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$ 라 할 때, $\log_2 a_4 + \log_2 a_6$의 값을 구하시오. 10.

Chapter 02 **지수함수와 로그함수**

11

수능특강 2단원 Lv1 5번 문항 변형

부등식 $4^{\log_2(x-3)} < 9^{1+\log_3 5}$ 을 만족시키는 정수 x 의 개수는? 11.

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

12

수능특강 2단원 Lv2 3번 문항 변형

좌표평면에서 1이 아닌 양수 a 와 상수 k 에 대하여 곡선 $y=a^x$ 이 두 점 $\mathrm{A}\left(-1, \frac{9}{2}-2a\right)$, $\mathrm{B}(2, k)$ 를 지난다. 직선 AB의 기울기가 음수일 때, $\frac{a}{k}$ 의 값은? 12.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

13

수능특강 2단원 Lv2 2번 문항 변형

좌표평면에서 1이 아닌 양수 a에 대하여 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=-\log_a x$가 직선 $y=1$과 만나는 점 중 x좌표가 작은 점을 P, 두 곡선 $y=a^x$, $y=a^{-x}$이 직선 $x=1$과 만나는 점 중 y좌표가 큰 점을 Q라 하고, 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하자. 삼각형 PP′Q의 넓이가 $\frac{3}{8}$이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? 13.

① $\frac{25}{12}$ ② $\frac{13}{6}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{17}{4}$

14

수능특강 2단원 Lv2 4번 문항 변형

1이 아닌 양수 a에 대하여 정의역이 $\{x \mid 2 \le x \le 5\}$인 함수 $y=\log_a \frac{8}{x-1}$의 최댓값이 $-\frac{1}{2}$일 때, 최솟값은 m이다. $a+m$의 값은? 14.

① $-\frac{5}{4}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

15

수능특강 2단원 Lv2 8번 문항 변형

상수 a에 대하여 방정식 $2^{x+2}-2^{4-x}=a$의 근이 3일 때, 부등식 $2^{x}-2^{6-x}<a$를 만족시키는 자연수 x의 개수는 b이다. $a+b$의 값은? 15.

① 32 ② 33 ③ 34 ④ 35 ⑤ 36

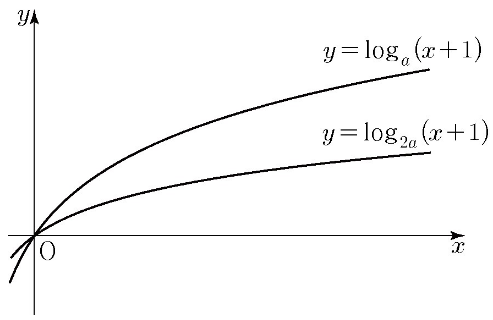
16

수능특강 2단원 Lv3 4번 문항 변형

그림과 같이 두 양수 a, $k\,(a>1)$에 대하여 좌표평면에서 두 곡선

$$y=\log_{a}(x+1),\ y=\log_{2a}(x+1)$$

과 직선 $x=k$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 C라 하자. x축 위의 점 D에 대하여 직선 AD의 기울기가 2이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$일 때, 삼각형 BCD의 넓이가 2이다. 삼각형 OAD의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) 16.



17

수능특강 2단원 Lv2 7번 문항 변형

0이 아닌 정수 k에 대하여 직선 $y=-x+k$가 세 곡선

$$y=2^x,\ y=\log_2 x,\ y=\log_2(4x+8)$$

과 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자. 두 삼각형 OAB와 OAC의 넓이가 $\frac{3}{2}$으로 같을 때, k^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) 17.

18

수능특강 2단원 Lv3 3번 문항 변형

좌표평면에서 서로 다른 세 점 A, B, C가 각각 세 곡선

$$y=\log_2 x,\ y=\log_2\frac{16}{x},\ y=\log_2(x+4)$$

위의 점이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 점 A, B의 x좌표가 서로 같다.

(나) 두 곡선 $y=\log_2 x$와 $y=\log_2\frac{16}{x}$이 삼각형 ABC의 무게중심을 지난다.

삼각형 ABC의 넓이는? 18.

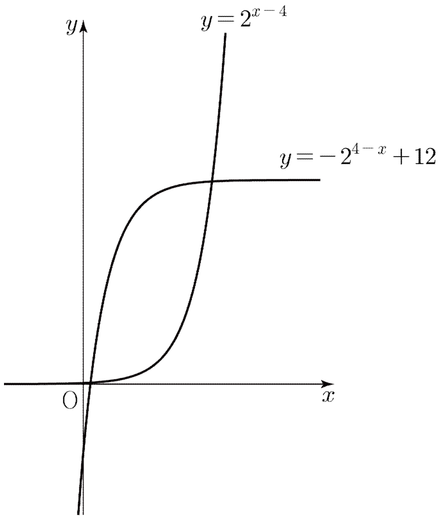
① $6\log_2 3-6$　② $6\log_2 3-4$　③ $8\log_2 3-6$
④ $8\log_2 3-4$　⑤ $12\log_2 3-8$

19

수능특강 2단원 Lv3 5번 문항 변형

자연수 k에 대하여 두 곡선 $y=2^{x-4}$, $y=-2^{4-x}+12$가 직선 $x=k$와 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하고, k가 아닌 실수 t에 대하여 직선 $x=t$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$가 되도록 하는 모든 t의 값의 합이 9일 때, k의 값은? (단, $0<k<8$) 19.

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7



20

[고난도]

수능특강 2단원 Lv3 6번 문항 변형

양수 k에 대하여 곡선 $y=-\log_4 x+k$가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 A, x축과 만나는 점을 B라 하고, 점 A에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하자. 점 B를 지나고 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 R라 할 때,

$$3\times\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$$

가 성립한다. $10k$의 값을 구하시오. 20.

Chapter 03

삼각함수

21

수능특강 3단원 Lv2 4번 문항 변형

$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ 이고 $3\cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta - 1 = 0$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? 21.

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

22

수능특강 3단원 Lv1 5번 문항 변형

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $y = |\cos 4x|$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{3}$ 과 만나는 네 점의 x좌표를 각각 a, b, c, d라 할 때, $\tan(a-c) \times \cos(c+d)$ 의 값은? (단, $a < b < c < d$)22.

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

23

수능특강 3단원 Lv1 8번 문항 변형

$0 \le \theta < 2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

$$3x^2-(2\sqrt{2}\cos\theta)x+\sin\theta+1=0$$

이 실근을 갖도록 하는 θ의 최솟값과 최댓값을 각각 α, β라 하자. $\beta-\alpha$의 값은? 23.

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ π ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{3}\pi$

24

[내신]

수능특강 3단원 Lv2 2번 문항 변형

$0<\theta<2\pi$일 때, 다음 조건을 만족시키는 각 θ에 대하여 $\sin\theta\times\tan\theta$의 값은? 24.

(가) 좌표평면에서 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이다.

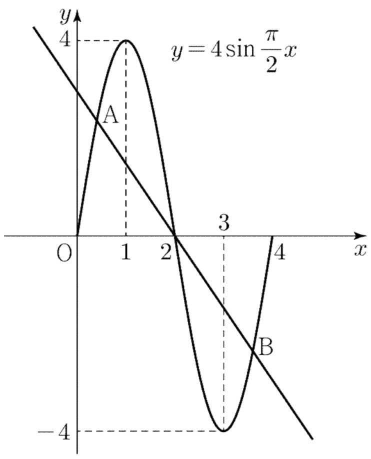
(나) $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

25

수능특강 3단원 Lv2 5번 문항 변형

그림과 같이 $0 \le x \le 4$에서 정의된 함수 $y=4\sin\frac{\pi}{2}x$의 그래프가 기울기가 m이고 점 $(2,\ 0)$을 지나는 직선과 점 $(2,\ 0)$이 아닌 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B의 x좌표가 각각 α, $5\alpha\ (\alpha>0)$일 때, 선분 AB의 길이는? 25.



① $\frac{2\sqrt{31}}{3}$ ② $\sqrt{31}$ ③ $\frac{4\sqrt{31}}{3}$
④ $\frac{5\sqrt{31}}{3}$ ⑤ $2\sqrt{31}$

26

수능특강 3단원 Lv2 8번 문항 변형

두 양수 a, $k\,(k<1)$에 대하여 $0<x<\frac{5\pi}{2a}$일 때,
방정식 $\sin ax = k$의 모든 실근의 합이 10이고
방정식 $\sin ax = -k$의 모든 실근의 합이 9이다.
$k\sin a$의 값은? 26.

① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{11}{16}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{13}{16}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

27

수능특강 3단원 Lv2 10번 문항 변형

$0 < x \leq 2\pi$ 에서 부등식 $|3\sin x + 1| \leq 1$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는 $p \leq x \leq q$ 또는 $r \leq x \leq s$ 이다. $\sin(p+q)+\cos(r+s)$ 의 값은? (단, $p < q < r < s$) 27.

① $-\frac{2+\sqrt{5}}{3}$ ② $-\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{2-\sqrt{5}}{3}$
④ $\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{2+\sqrt{5}}{3}$

28

수능특강 3단원 Lv3 1번 문항 변형

$-\frac{\pi}{m} < x < \frac{\pi}{2m}$ 에서 함수 $y = |\tan mx|$ 의 그래프와 직선 $y = n\ (n > 0)$ 이 만나는 점 중 x 좌표가 작은 것부터 순서대로 A, B, C 라 하자. 삼각형 OAB 의 넓이를 S_1, 삼각형 OAC 의 넓이를 S_2 라 하면 $2S_1 = S_2 = 3$ 일 때, $m \times n$ 의 값은? (단, m, n 은 상수이고, O 는 원점이다.) 28.

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{6}\pi$

29

[내신] 수능특강 3단원 Lv3 2번 문항 변형

$0 \le x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin^2 x + 2a\cos x + 3a + 3$ 의 최댓값이 13 이 되도록 하는 실수 a 의 값은? 29.

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

30

[고난도] 수능특강 3단원 Lv3 3번 문항 변형

자연수 n 에 대하여 두 함수

$$f(x) = \sin \pi x,\ g(x) = n\cos\frac{\pi}{n}x$$

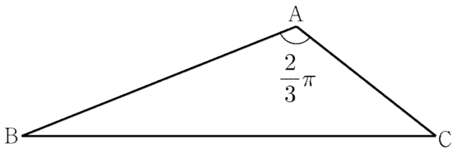
가 있다. $0 < x \le 12n$ 에서 방정식 $(f \circ g)(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 120 이 되도록 하는 n 의 값을 구하시오. 30.

Chapter 04 **사인법칙과 코사인법칙**

31

수능특강 4단원 Lv1 8번 문항 변형

그림과 같이 $\angle \mathrm{BAC}=\frac{2}{3}\pi$이고 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=5:3$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 넓이가 $15\sqrt{3}$일 때, 선분 BC의 길이는? 31.

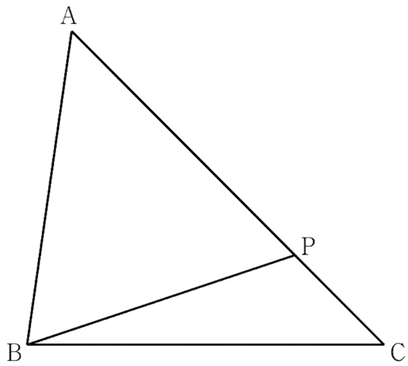


① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

32

수능특강 4단원 Lv2 3번 문항 변형

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{BC}}=4\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{CA}}=7$인 삼각형 ABC에서 선분 AC를 $5:2$로 내분하는 점을 P라 하자. 삼각형 BCP의 외접원의 넓이는? 32.



① 9π ② 10π ③ 11π ④ 12π ⑤ 13π

33

수능특강 4단원 Lv2 1번 문항 변형

$\angle \mathrm{ABC} = \frac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{BC}} = 8$ 인 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2$ 의 값이 최소가 되도록 하는 선분 AC의 길이는? 33.

① $2\sqrt{13}$ ② $\sqrt{53}$ ③ $3\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{55}$ ⑤ $2\sqrt{14}$

34

수능특강 4단원 Lv2 9번 문항 변형

넓이가 $2\sqrt{14}$ 인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 선분 AC의 길이는? 34.

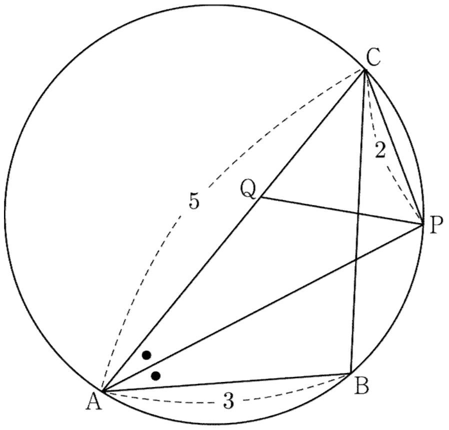
(가) 삼각형 ABC는 예각삼각형이다.
(나) $\overline{\mathrm{AB}} = 3$, $\overline{\mathrm{BC}} = 5$

① $2\sqrt{7}$ ② $\sqrt{29}$ ③ $\sqrt{30}$ ④ $\sqrt{31}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

35

수능특강 4단원 Lv2 2번 문항 변형

$\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=5$ 인 삼각형 ABC 의 외접원과 $\angle BAC$ 의 이등분선이 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 P 라 할 때, $\overline{CP}=2$ 이다. 선분 AC 위의 점 Q 가 $\overline{QC}=\overline{PC}$ 를 만족시킬 때, 삼각형 APQ 의 외접원의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) 35.



36

수능특강 4단원 Lv1 7번 문항 변형

삼각형 ABC 가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이는? 36.

(가) $\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{CA}=18$
(나) 삼각형 ABC 의 넓이는 $2\sqrt{2}$ 이다.

① $\sqrt{2}$　② $\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$　③ $\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$　④ $\dfrac{11\sqrt{2}}{8}$　⑤ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

37

[고난도]

수능특강 4단원 Lv2 4번 문항 변형

좌표평면 위에 두 반원의 호

$$C_1 : x^2+y^2=16\ (y \geq 0),$$
$$C_2 : x^2+y^2=25\ (y \geq 0)$$

이 있다. 반원 C_1 위의 서로 다른 두 점 P, Q와 반원 C_2 위의 점 R에 대하여 $\overline{\mathrm{PR}}=1$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이다.) 37.

〈보 기〉

ㄱ. $\overline{\mathrm{PQ}}=4$이면 $\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{21}$이다.

ㄴ. $\overline{\mathrm{QR}}=3$이면 삼각형 OQR의 외접원의 지름의 길이는 5이다.

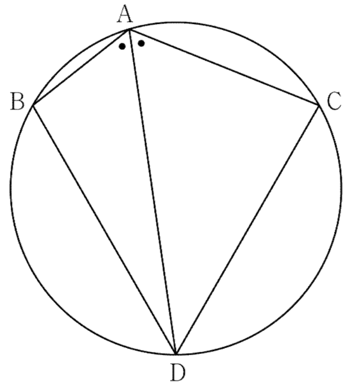
ㄷ. 반원 C_1 위의 점 S에 대하여 $\overline{\mathrm{RS}}=3$이고 $\sin(\angle\mathrm{OQS})=\dfrac{4}{5}$이면 두 삼각형 ORS, OQS의 외심 사이의 거리는 3이다. (단, 점 S는 호 PQ 위의 점이다.)

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

38

수능특강 4단원 Lv3 2번 문항 변형

그림과 같이 반지름의 길이가 $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$인 원 위의 세 점 A, B, C가 $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{2}{3}\pi$를 만족시키고, $\angle\mathrm{BAC}$의 이등분선이 원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자. 두 삼각형 ABD, ADC의 둘레의 길이의 차가 2일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{AC}}$) 38.



① $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$　② $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$　③ $4\sqrt{3}$　④ $\dfrac{17\sqrt{3}}{4}$　⑤ $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

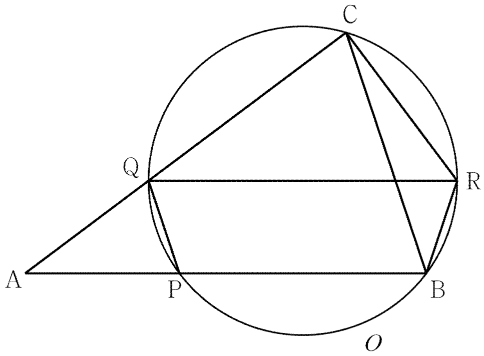
39
[고난도]

수능특강 4단원 Lv2 5번 문항 변형

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=13$인 삼각형 ABC가 있고 선분 AB 위의 점 P와 선분 AC 위의 점 Q가

$$\overline{AP}=\overline{AQ}=5$$

를 만족시킨다. 삼각형 BPQ의 외접원 O가 점 Q를 지나고 직선 AB에 평행한 직선과 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R라 하자. $\overline{BQ}=3\sqrt{10}$일 때, 삼각형 CBR의 넓이가 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 39.



40
[고난도]

수능특강 4단원 Lv3 1번 문항 변형

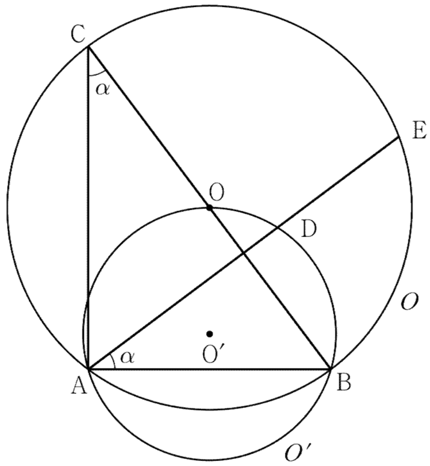
그림과 같이 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 8인 원 O 위의 세 점 A, B, C가 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$를 만족시킨다. 세 점 O, A, B를 지나고 중심이 O′인 원 O'에 대하여 점 O를 포함하는 호 AB 위의 점 D가

$$\angle ACB=\angle DAB=\alpha$$

를 만족시킨다.

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{5}{8},\ \cos 3\alpha=-\frac{9}{16}$$

이고, 직선 AD가 원 O와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E라 할 때, $\overline{O'E}^2$의 값을 구하시오. 40.



Chapter 05 등차수열과 등비수열

41

수능특강 5단원 Lv1 1번 문항 변형

공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_1a_5 + a_3 = 2,\ a_7 = 16$$

을 만족시킬 때, a_{11}의 값은? 41.

① 2^6 ② 2^7 ③ 2^8 ④ 2^9 ⑤ 2^{10}

42

수능특강 5단원 Lv1 2번 문항 변형

$a_1 = 3$이고 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 \times a_4 \times a_5 = a_8$$

일 때, a_6의 값은? 42.

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{27}$ ③ $\frac{1}{81}$ ④ $\frac{1}{243}$ ⑤ $\frac{1}{729}$

43

수능특강 5단원 Lv1 8번 문항 변형

공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$2S_3 + S_5 = S_8$$

일 때, $\frac{a_{21}}{a_5}$의 값은? 43.

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

44

수능특강 5단원 Lv2 1번 문항 변형

다음 조건을 만족시키고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$이 존재하도록 하는 두 자연수 m, l에 대하여 $m+l$의 최솟값을 구하시오. 44.

(가) $a_m = 0$

(나) $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = a_{2m} + a_{2l}$

45

[내신]

수능특강 5단원 Lv2 2번 문항 변형

공차가 각각 d_1, d_2인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 모든 자연수 n에 대하여

$$c_n = a_n - b_n$$

이라 하자. 수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 45.

〈보 기〉

ㄱ. $d_1 = d_2 + 1$이면 $c_{n+1} = c_n + 1$이다.

ㄴ. $S_n = np$ (p는 상수)이면 $a_n = b_n$이다.

ㄷ. $d_1 > d_2$이고, 어떤 자연수 k에 대하여 $a_k = b_k$이면 $S_n \geq S_k$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

46

수능특강 5단원 Lv2 6번 문항 변형

첫째항이 8인 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 + a_2 + a_3 = \dfrac{1}{a_5} + \dfrac{1}{a_6} + \dfrac{1}{a_7}$

(나) $a_2 < a_3$

부등식 $a_{2n-1} < \dfrac{1}{100}$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. 46.

47

수능특강 5단원 Lv2 4번 문항 변형

등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항이 모두 -1일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n과 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 T_n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_8 = 2S_4 + 64$
(나) $S_4 = T_4$

$a_8 + b_6$의 값은? 47.

① 250 ② 255 ③ 260 ④ 265 ⑤ 270

48

수능특강 5단원 Lv2 5번 문항 변형

공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$과 공비가 4인 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 T_n이라 하자. $a_3b_3 = 192$일 때, $S_mT_m = 45$를 만족시키는 자연수 m의 값은? 48.

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

49

수능특강 5단원 Lv3 2번 문항 변형

모든 자연수 n에 대하여 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{S_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_{14}+S_{17}=a_{18}$

(나) S_n의 최댓값은 84이다.

a_1의 값을 구하시오. 49.

50

수능특강 5단원 Lv3 1번 문항 변형

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 3 이상의 어떤 자연수 k에 대하여

$$a_{k-2}+a_k+a_{k+2}=15,\ S_{2k-1}=S_{4k}=45$$

일 때, a_1의 값은? 50.

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

Chapter 06 수열의 합과 수학적 귀납법

51

수능특강 6단원 Lv2 2번 문항 변형

$\sum_{k=1}^{14} \log_2 \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$ 의 값은? 51.

① $\log_2 \frac{15}{8}$ ② $\log_2 \frac{15}{7}$ ③ $\log_2 \frac{5}{2}$
④ $\log_2 3$ ⑤ $\log_2 \frac{15}{4}$

52

수능특강 6단원 Lv2 1번 문항 변형

수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{10} a_k = 87$
(나) $\sum_{k=1}^{10} k(a_k - a_{k+1}) = 47$

$\sum_{k=1}^{11} a_k$ 의 값은? 52.

① 85 ② 91 ③ 97 ④ 103 ⑤ 109

53

수능특강 6단원 Lv1 7번 문항 변형

$a_1=2$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1}=(-1)^n\times a_n+3$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{98}a_k$ 의 값은? 53.

① 145 ② 146 ③ 147 ④ 148 ⑤ 149

54

수능특강 6단원 Lv1 8번 문항 변형

다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \cdots (*)$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때, (좌변)= $\boxed{(가)}$, 우변= $\boxed{(가)}$ 이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}k(k+1)=\frac{m(m+1)(m+2)}{3} \quad \cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $\boxed{(나)}$ 을(를) 더하면

$$\sum_{k=1}^{m+1}k(k+1)=\boxed{(다)}$$

이므로 $n=m+1$ 일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 값을 p 라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$ 이라 할 때, $p+f(4)+g(3)$ 의 값은? 54.

① 70 ② 72 ③ 74 ④ 76 ⑤ 78

55

수능특강 6단원 Lv2 6번 문항 변형

$a_1=2$ 인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=2a_n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{7}\frac{2^7}{a_k}$의 값을 구하시오. 55.

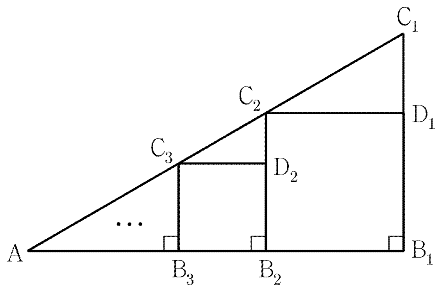
56

수능특강 6단원 Lv3 5번 문항 변형

그림과 같이 $\overline{AB_1}=9$, $\overline{B_1C_1}=3\sqrt{3}$, $\angle AB_1C_1=\frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 AB_1C_1가 있다. 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 B_1C_1 위의 점 D_1, 선분 AC_1 위의 점 C_2를 사각형 $B_1D_1C_2B_2$가 정사각형이 되도록 잡는다.
선분 AB_2 위의 점 B_3, 선분 B_2C_2 위의 점 D_2, 선분 AC_2 위의 점 C_3을 사각형 $B_2D_2C_3B_3$가 정사각형이 되도록 잡는다.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정사각형 $B_nD_nC_{n+1}B_{n+1}$의 한 변의 길이를 a_n이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=pa_n$$

을 만족시킨다. a_1+p의 값은? (단, p는 상수이다.) 56.



① $4\sqrt{3}-3$　② $4\sqrt{3}-4$　③ $4\sqrt{3}-5$
④ $5\sqrt{3}-2$　⑤ $5\sqrt{3}-3$

57

수능특강 6단원 Lv2 5번 문항 변형

$a_1=1$ 이고 $a_{n+1}=3a_n$ 을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$32\times\sum_{k=1}^{10}\frac{S_k(S_k+1)}{a_{2k+1}}=m+\left(\frac{1}{9}\right)^{10}$$

일 때, 상수 m 의 값은? 57.

① 73 ② 76 ③ 79 ④ 82 ⑤ 85

58

수능특강 6단원 Lv2 8번 문항 변형

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n 이라 할 때, 모든 자연수 n 에 대하여

$$S_n=|2a_{n+1}|$$

을 만족시킨다. $a_5=-5$ 일 때, a_1 의 최댓값은? 58.

① 56 ② 64 ③ 72 ④ 80 ⑤ 88

59

[내신]

수능특강 6단원 Lv3 3번 문항 변형

$0 < p \le 7$, $-7 \le q < 0$인 두 정수 p, q와 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = 6,\ a_{n+1} = a_n + pn + 2q$$

를 만족시킨다. 부등식 $a_2 a_4 \le 0$을 만족시키는 정수 p, q의 모든 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하시오. 59.

60

수능특강 6단원 Lv3 2번 문항 변형

자연수 n에 대하여 두 집합 A_n, B_n을

$$A_n = \{x \mid 2^{n-1} \le x < 2^{n+1}\},$$
$$B_n = \{y \mid 2^{2n-3} \le y < 2^{2n+1}\}$$

이라 하자. 집합 $(A_n \cup B_n) - (A_n \cap B_n)$의 원소의 최솟값을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값은? 60.

① $\frac{9}{2} + 2^{18}$　② $\frac{1}{2} + 2^{19}$　③ $\frac{9}{2} + 2^{19}$　④ $\frac{1}{2} + 2^{20}$　⑤ $\frac{9}{2} + 2^{20}$

MEMO

MEMO

EBS NEXT STEP

수능특강편

정답과 해설

정답과 해설 수학 I

1. 정답 ①

$$(2^{-1}\div 2^{-4})\times 3^{-2}=2^3\times 3^{-2}$$
$$=8\times\frac{1}{9}$$
$$=\frac{8}{9}$$

2. 정답 ③

$$\log_{\sqrt{3}}12-\frac{2}{\log_2 9}=2\log_3 12-2\log_9 2$$
$$=2\log_3 12-\log_3 2$$
$$=2(\log_3 3+2\log_3 2)-\log_3 2$$
$$=2+3\log_3 2$$

3. 정답 147

집합 A는 공집합이 아닌 집합이므로 집합 A는 적어도 하나의 원소를 갖는다.
한편, $A-B=\varnothing$ 이므로 $A\subset B$이고, 집합 B의 원소의 개수가 1이므로 집합 A의 원소의 개수는 1이다.
즉, $A=B=\{\sqrt[3]{-2}\}$
a의 n제곱근이 $\sqrt[3]{-2}$ 이므로 $a<0$이고, n은 홀수이다.
$a=-2$일 때 $n=3$
$a=(-2)^3$일 때 $n=9$
$a=(-2)^5$일 때 $n=15$
⋮
$a=(-2)^{13}$일 때 $n=39$
$$3+9+15+\cdots+39=3(1+3+5+\cdots+13)$$
$$=3\times 49$$
$$=147$$

4. 정답 ⑤

$\log_2(b+c)-\log_2 c=1=\log_2\left(\dfrac{b+c}{c}\right)=\log_2 2$ 이므로
$\dfrac{b+c}{c}=2,\ b=c$
$a^{b+c}=a^{2b}=2^4,\ a^{bc}=a^{b^2}=2^1$ 이므로 양변에 $\log_2$를 취하면
$2b\log_2 a=4,\ b^2\log_2 a=1$ 이다.
따라서 $2b\log_2 a=4b^2\log_2 a$ 이고 $a\neq 1$ 이므로
양변을 $\log_2 a$로 나누면 $2b=4b^2,\ b=\dfrac{1}{2}$ 이 된다.
따라서 $b=c=\dfrac{1}{2},\ a^{2\times\frac{1}{2}}=a=16$
$\therefore\ a+b+c=16+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=17$

5. 정답 ⑤

$b^{\log_a 2}-c^{\log_a 2}=4$에서 밑변환 공식에 의하여
$$2^{\log_a b}-2^{\log_a c}=4 \quad \cdots ㉠$$
$3\log_b c=2$ 에서 $\log_b c=\dfrac{2}{3}$, 즉 $\dfrac{\log_a c}{\log_a b}=\dfrac{2}{3}$ 이므로
$\log_a b=3k,\ \log_a c=2k$라 하자.
㉠에 대입하면
$2^{3k}-2^{2k}=4$
$2^k=t\ (t>0)$이라 하면
$t^3-t^2-4=0,\ (t-2)(t^2+t+2)=0$
따라서 $t=2$이므로
$k=1,\ \log_a b=3,\ \log_a c=2$
$\therefore\ \log_a bc=\log_a b+\log_a c=3+2=5$

6. 정답 ②

조건 (가)에서 등비중항에 의하여
$(\log_b c)^2=\log_a b\times\log_c a=\log_b c$
$\log_b c\times(\log_b c-1)=0$
$\therefore\ \log_b c=1\quad(\because\ \log_b c\neq 0)$
한편, $\log_a b=\dfrac{1}{3}\log_b c=\dfrac{1}{3}\quad(\because$ 공비 3)
$\therefore\ b=c,\ a=b^3\quad\cdots ㉠$
조건 (나)에서 ㉠에 의하여
$b\times c=b^2,\ 4a^2=4\times(b^3)^2$
즉, $b^2=4\times(b^3)^2$ 이고, b는 양수이므로
$b=2b^3$
$b^2=\dfrac{1}{2}$
$\therefore\ b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\therefore\ a=\dfrac{2\sqrt{2}}{8}=\dfrac{\sqrt{2}}{4},\ c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
따라서 $a+b+c=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ 이다.

7. 정답 ③

$\sqrt[n]{a^n}$ 에서 n이 짝수이면 $\sqrt[n]{a^n}=|a|$, n이 홀수이면 $\sqrt[n]{a^n}=a$이다.
자연수 k에 대하여
(ⅰ) $n=2k$인 경우
n이 짝수, $n+1$이 홀수이므로
$\sqrt[n]{a^n}-\sqrt[n+1]{a^{n+1}}=|a|-a$
따라서 a에 대한 방정식 $|a|-a=3a+10$을 만족하는 실근을 찾으면 된다.
① $a\geq 0$
$|a|=a$이므로 $0=3a+10,\ a=-\dfrac{10}{3}$
이는 $a\geq 0$에 모순이다.
② $a<0$
$|a|=-a$이므로 $-2a=3a+10,\ a=-2$
따라서 조건을 만족하는 순서쌍 $(n,\ a)$의 개수는
$(2,\ -2),\ (4,\ -2),\ (6,\ -2),\ (8,\ -2),$
$(10,\ -2)$에서 5이다.
(ⅱ) $n=2k+1$인 경우
n이 홀수, $n+1$이 짝수이므로

$\sqrt[n]{a^n}-\sqrt[n+1]{a^{n+1}}=a-|a|$

따라서 a에 대한 방정식 $a-|a|=3a+10$을 만족하는 실근을 찾으면 된다.

① $a\geq 0$

$|a|=a$이므로 $0=3a+10$, $a=-\dfrac{10}{3}$

이는 $a\geq 0$에 모순이다.

② $a<0$

$|a|=-a$이므로 $2a=3a+10$, $a=-10$

따라서 조건을 만족하는 순서쌍 (n, a)의 개수는 $(3, -10)$, $(5, -10)$, $(7, -10)$, $(9, -10)$에서 4이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (n, a)의 개수는 $5+4=9$

8. 정답 27

두 삼각형 OAH와 OAB의 높이를 $\overline{AH}$라 하면 밑변의 길이가 각각 $\overline{OH}$, $\overline{OB}$이고 $2\overline{OH}=\overline{OB}$를 만족시켜야 한다.

한편, 점 B는 점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위의 점이므로 $\overline{OA}=\overline{OB}$

점 A의 x좌표는 방정식 $x^3=k$의 실근과 같으므로 $\sqrt[3]{k}$

따라서 $\overline{OH}=\sqrt[3]{k}$

피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{OA}&=\sqrt{\overline{OH}^2+\overline{AH}^2}\\&=\sqrt{(\sqrt[3]{k})^2+k^2}\\&=\sqrt{\sqrt[3]{k^2}+k^2}\end{aligned}$$

$2\overline{OH}=\overline{OA}$ 이므로

$$2\sqrt[3]{k}=\sqrt{\sqrt[3]{k^2}+k^2}$$

양변을 제곱하면

$$4\sqrt[3]{k^2}=\sqrt[3]{k^2}+k^2$$

$$3\sqrt[3]{k^2}=k^2$$

$$3k^{\frac{2}{3}}=k^2$$

$$k^{\frac{4}{3}}=3$$

따라서 $k^4=27$이다.

9. 정답 11

$\dfrac{\sqrt[n]{2^m}}{\sqrt[n+1]{3^{m+1}}}=\dfrac{2^{\frac{m}{n}}}{3^{\frac{m+1}{n+1}}}$ 의 값이 유리수가 되기 위해서는 $\dfrac{m}{n}$, $\dfrac{m+1}{n+1}$이 모두 정수이어야 한다.

(ⅰ) $n=2$일 때

$\dfrac{m}{2}=x$, $\dfrac{m+1}{3}=y$라 하면 두 정수 x, y의 값의 범위는 $|m|\leq 19$이므로 $-9\leq x\leq 9$, $-6\leq y\leq 6$이다.

$m=2x=3y-1$이므로 $y=\dfrac{2x+1}{3}$이고, 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y)는 $(-8, -5)$, $(-5, -3)$, $(-2, -1)$, $(1, 1)$, $(4, 3)$, $(7, 5)$이므로 $n=2$일 때 가능한 m의 값은 6개

(ⅱ) $n=3$일 때

$\dfrac{m}{3}=x$, $\dfrac{m+1}{4}=y$라 하면 두 정수 x, y의 범위는 $|m|\leq 19$이므로 $-6\leq x\leq 6$, $-4\leq y\leq 5$이다.

$m=3x=4y-1$이므로 $y=\dfrac{3x+1}{4}$이고, 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y)는 $(-3, -2)$, $(1, 1)$, $(5, 4)$이므로 $n=3$일 때 가능한 m의 값은 3개

(ⅲ) $n=4$일 때

$\dfrac{m}{4}=x$, $\dfrac{m+1}{5}=y$라 하면 두 정수 x, y의 범위는 $|m|\leq 19$이므로 $-4\leq x\leq 4$, $-3\leq y\leq 4$이다.

$m=4x=5y-1$이므로 $y=\dfrac{4x+1}{5}$이고, 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y)는 $(-4, -3)$, $(1, 1)$이므로 $n=4$일 때 가능한 m의 값은 2개

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $\dfrac{\sqrt[n]{2^m}}{\sqrt[n+1]{3^{m+1}}}$의 값이 유리수가 되도록 하는 순서쌍 (n, m)의 개수는 $6+3+2=11$

10. 정답 38

자연수 k에 대하여 $n\log_{2n}4=\log_{2n}2^{2n}=k$이므로 $2^{2n}=(2n)^k$이고, 자연수 n은 2의 거듭제곱 꼴이어야 $2^{2n}=(2n)^k$을 만족시킨다.

따라서 $n=2^{p-1}$ (p는 자연수), $2^{2^p}=2^{pk}$, $2^p=pk$이다.

$2^p=pk$를 만족시키는 자연수 p는 2의 거듭제곱 꼴이어야 하므로

$p=2^{q-1}$ (q는 자연수)

따라서 $n=2^{p-1}=2^{2^{q-1}-1}$이므로 $a_m=2^{2^{m-1}-1}$이다.

$\therefore\ a_4=2^7$, $a_6=2^{31}$, $\log_2 a_4+\log_2 a_6=38$

11. 정답 ②

$4^{\log_2(x-3)}=2^{2\log_2(x-3)}=2^{\log_2(x-3)^2}=(x-3)^2$

$9^{1+\log_3 5}=9^{\log_3 15}=3^{\log_3 15^2}=15^2$

$(x-3)^2<15^2$, $(x-3)^2-15^2<0$이므로

$(x-3+15)(x-3-15)<0$, $-12<x<18$

$\log_2(x-3)$이 존재하므로 $x>3$

따라서 $3<x<18$을 만족시키는 정수 x의 개수는 14이다.

12. 정답 ⑤

두 점 $A\left(-1, \dfrac{9}{2}-2a\right)$, $B(2, k)$가 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로

$\dfrac{1}{a}=\dfrac{9}{2}-2a$

정리하면 $4a^2-9a+2=0$ $\quad\therefore\ a=2$ 또는 $a=\dfrac{1}{4}$

(ⅰ) $a=2$일 때

$A\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$, $B(2, 4)$이므로 직선 AB의 기울기는

$\dfrac{4-\dfrac{1}{2}}{2+1}=\dfrac{7}{6}$ 이므로 양수이다.

따라서 $a \neq 2$

(ⅱ) $a=\dfrac{1}{4}$ 일 때

$A(-1, 4)$, $B\left(2, \dfrac{1}{16}\right)$ 이므로 직선 AB의 기울기는

$\dfrac{\dfrac{1}{16}-4}{3}=-\dfrac{21}{16}$ 이므로 음수이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=\dfrac{1}{4}$, $k=\dfrac{1}{16}$, $\dfrac{a}{k}=4$

13. 정답 ③

(ⅰ) $a>1$ 일 때

점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{a}, 1\right)$, 점 Q의 좌표는 $(1, a)$,

점 P′의 좌표는 $\left(1, \dfrac{1}{a}\right)$ 이므로 삼각형 PP′Q의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{1}{a}\right)\left(1-\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{3}{8}$ 이다. 정리하면

$a-1-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{3}{4}$

$4a^3-7a^2-4a+4=0$

$(a-2)(4a^2+a-2)=0$

따라서 $a=2$ $(\because\ a>1)$

(ⅱ) $0<a<1$ 일 때

점 P의 좌표는 $(a, 1)$, 점 Q의 좌표는 $\left(1, \dfrac{1}{a}\right)$, 점 P′의 좌표는 $(1, a)$ 이므로 삼각형 PP′Q의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}-a\right)(1-a)=\dfrac{3}{8}$ 이다. 정리하면

$\dfrac{1}{a}-1-a+a^2=\dfrac{3}{4}$

$4a^3-4a^2-7a+4=0$

$\left(a-\dfrac{1}{2}\right)(4a^2-2a-8)=0$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$ $(\because\ 0<a<1)$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 가능한 모든 상수 a의 값의 합은

$2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

14. 정답 ①

$a>1$ 이면 $2 \le x \le 5$ 에서 함수 $y=\log_a \dfrac{8}{x-1}$ 의 값은 항상 양수이므로 최댓값이 $-\dfrac{1}{2}$ 이 될 수 없다.

따라서 $0<a<1$ 이고, 밑이 1보다 작은 로그함수는 감소함수이므로 $x=5$ 에서 최댓값, $x=2$ 에서 최솟값을 갖는다.

$-\dfrac{1}{2}=\log_a \dfrac{8}{5-1}=\log_a 2$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{4}$, $m=\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{8}{2-1}=\log_{\frac{1}{4}} 8=-\dfrac{3}{2}$

따라서 $a+m=-\dfrac{5}{4}$ 이다.

15. 정답 ③

방정식 $2^{x+2}-2^{4-x}=a$의 근이 3이므로

$2^5-2=a \qquad \therefore\ a=30$

부등식 $2^x-2^{6-x}<30$ 에서 $2^x=t$ $(t>0)$ 이라 하면

$t-\dfrac{2^6}{t}-30<0, \qquad t^2-30t-2^6<0$

$(t-2^5)(t+2)<0 \qquad \therefore\ 0<t<2^5$ $(\because\ t>0)$

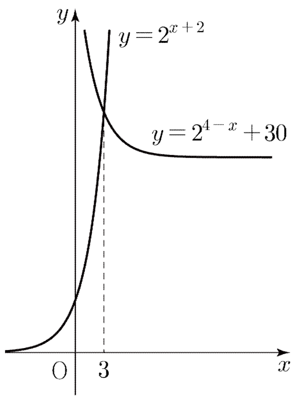
즉, $0<2^x<2^5$ 이므로 $\quad x<5$

따라서 $a=30$, $b=4$ 이므로 $\quad a+b=34$

[다른 풀이]

방정식 $2^{x+2}-2^{4-x}=a$의 근이 3이므로 두 곡선 $y=2^{x+2}$ 와 $y=2^{4-x}+a$가 만나는 점의 x좌표가 3이다.

$2^{3+2}=2^{4-3}+a \qquad \therefore\ a=30$



그러므로 부등식 $2^{x+2}-2^{4-x}<30$ 을 만족시키는 x의 값의 범위는 $x<3$ 이다.

한편, 두 곡선 $y=2^x$ 와 $y=2^{6-x}+30$ 은 두 곡선 $y=2^{x+2}$ 와 $y=2^{4-x}+30$ 을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동 한 것이므로 부등식 $2^x-2^{6-x}<30$ 을 만족시키는 x의 값의 범위는 $x<5$ 이다. 즉, 부등식 $2^x-2^{6-x}<30$ 을 만족시키는 자연수 x의 개수는 4이다. $\quad \therefore\ b=4$

$\therefore\ a+b=34$

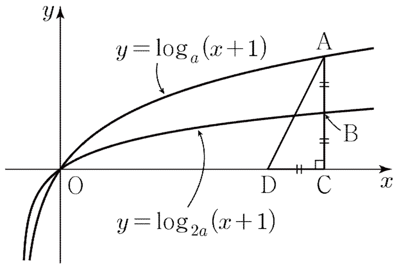
16. 정답 26

직선 AD의 기울기가 2이고, $\overline{AB}=\overline{CD}$ 이므로

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$

또한 삼각형 BCD의 넓이가 2이므로

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=2$



한편, 두 점 A, B의 x좌표가 k이므로

$$2\log_{2a}(k+1)=\log_a(k+1)$$

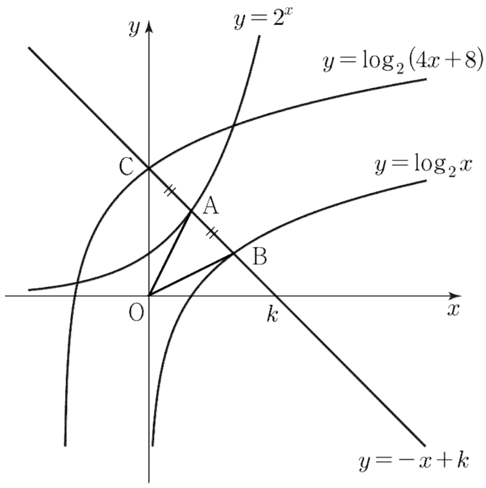
따라서 $a^2=2a$이므로 $\quad a=2$

즉, $\log_2(k+1)=4$이므로 $\quad k=15$

D(13, 0), A(15, 4)이므로 삼각형 OAD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times13\times4=26$$

17. 정답 9



점 A는 직선 $y=-x+k$ 위의 점이므로

점 A의 좌표를 $(\alpha,\ -\alpha+k)$라 하자.

두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B 또한 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 점 B의 좌표는 $(-\alpha+k,\ \alpha)$이다.

$\log_2(4x+8)=\log_2(x+2)+2$이므로

곡선 $y=\log_2 x$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 곡선 $y=\log_2(4x+8)$이다.

이때 점 B를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점을 B$'$이라 하면 점 B$'$는 곡선 $y=\log_2(4x+8)$ 위의 점이고, 두 점 B, B$'$을 지나는 직선의 기울기는 -1이므로 점 B$'$는 점 C이다.

따라서 점 C의 좌표는 $(-\alpha+k-2,\ \alpha+2)$이고, 두 삼각형 OAB와 OAC의 넓이가 서로 같으므로 점 A는 두 점 B와 C의 중점이다.

$$\alpha=\frac{-2\alpha+2k-2}{2},\ -\alpha+k=\frac{2\alpha+2}{2}$$

이므로

$$k=2\alpha+1$$

이고,

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2\alpha-k)^2+(2\alpha-k)^2}=\sqrt{2}$$

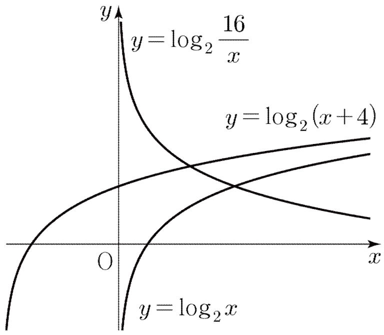
이므로

삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{k}{\sqrt{2}}\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{k}{2}=\frac{3}{2} \qquad \therefore\ k=3,\ k^2=9$$

18. 정답 ①

세 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2\dfrac{16}{x}$, $y=\log_2(x+4)$는 다음 그림과 같다.



두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2\dfrac{16}{x}$가 직선 $y=2$에 대하여 대칭이므로 직선 $y=2$는 선분 AB의 수직이등분선이다.

한편, $\log_2 x=\log_2\dfrac{16}{x}$에서 $x=4$

그러므로 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2\dfrac{16}{x}$가 만나는 점의 좌표는 $(4,\ 2)$이다.

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 $(4,\ 2)$를 지나고,

조건 (나)에 의하여 점 C의 y좌표는 2이다.

점 C는 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점이므로 점 C의 좌표는 $(0,\ 2)$이다.

그러므로 점 A의 x좌표는 $4+2=6$이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}&=2\times(\log_2 6-2)\\&=2\times(\log_2 3-1)\end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times2\times(\log_2 3-1)\times6=6\log_2 3-6$$

이다.

19. 정답 ⑤

$\overline{\mathrm{AB}}=p$라 하면

$\overline{\mathrm{CD}}=\left|2^{t-4}+2^{4-t}-12\right|=p$

$2^{t-4}=a$라 하면

$$\left|a+\frac{1}{a}-12\right|=p$$

(ⅰ) $a+\dfrac{1}{a}-12=p$일 때

$$a^2+1-12a=pa$$

$$a^2-(p+12)a+1=0$$

이를 만족시키는 a의 값을 a_1, a_2라 하면

$a_1\times a_2=1$이다.

$a_1=2^{t_1-4}$, $a_2=2^{t_2-4}$라 하면

$$2^{t_1+t_2-8}=1 \qquad \therefore\ t_1+t_2=8$$

(ⅱ) $a+\dfrac{1}{a}-12=-p$일 때

$a^2+1-12a=-pa$

$a^2+(p-12)a+1=0$

이를 만족시키는 a의 값을 a_3, a_4라 하면

$a_3 \times a_4 = 1$이다.

$a_3 = 2^{t_3-4}$, $a_4 = 2^{t_4-4}$라 하면

$2^{t_3+t_4-8} = 1 \qquad \therefore\ t_3+t_4=8$

(i), (ii)에 의하여 k를 포함한 모든 t의 값의 합이 16이다.
그러므로 k의 값은 $16-9=7$이다.

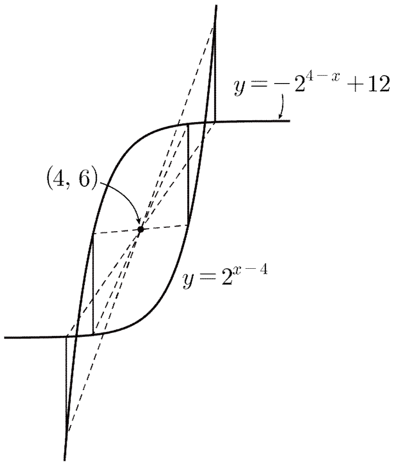
[다른 풀이]

$f(x)=2^{x-4}$, $g(x)=-2^{4-x}+12$라 하면

$f(4+x)+g(4-x)=12$이므로

두 함수 $y=2^{x-4}$, $y=-2^{4-x}+12$의 그래프는 점 $(4,\ 6)$에 대하여 대칭이다.

따라서 다음 그림과 같이 길이가 같은 선분은 4개다.



각 선분의 x좌표를 t_1, t_2, t_3, k라 하면 대칭성에 의하여

$t_1+t_2+t_3+k=16$

한편, $t_1+t_2+t_3=9$이므로 $k=7$이다.

20. 정답 15

두 곡선 $y=-\log_4 x+k$, $y=\log_2 x$가 만나는 점을 구하면

$-\log_4 x+k=\log_2 x$

$\frac{3}{2}\log_2 x = k$

$\therefore\ x=2^{\frac{2}{3}k}$, $y=\frac{2}{3}k$

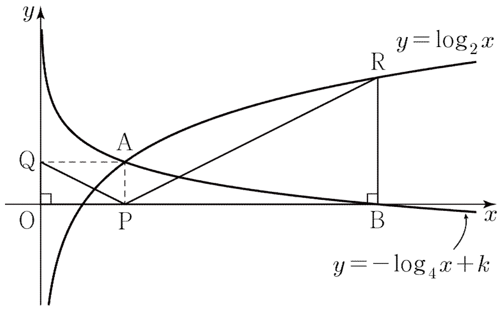
$\therefore\ \mathrm{A}\left(2^{\frac{2}{3}k},\ \frac{2}{3}k\right)$, $\mathrm{P}\left(2^{\frac{2}{3}k},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{2}{3}k\right)$

곡선 $y=-\log_4 x+k$가 x축과 만나는 점을 구하면

$-\log_4 x+k=0$

$\therefore\ x=4^k=2^{2k}$

$\therefore\ \mathrm{B}(2^{2k},\ 0)$, $\mathrm{R}(2^{2k},\ 2k)$



$\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{3}k$, $\overline{\mathrm{BR}}=2k$이므로 $3\times\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{BR}}$

$3\times\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{BR}}$, $3\times\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$, $\angle\mathrm{POQ}=\angle\mathrm{PBR}=\frac{\pi}{2}$ 이므로

삼각형 OPQ와 삼각형 BPR는 서로 닮음이고, 닮음비가 $1:3$이다. 그러므로 $\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{PB}}=1:3$이다.

$2^{\frac{2}{3}k} : \left(2^{2k}-2^{\frac{2}{3}k}\right)=1:3$

$2^{2k}-2^{\frac{2}{3}k}=3\times 2^{\frac{2}{3}k}$

$2^{2k}=4\times 2^{\frac{2}{3}k}=2^{\frac{2}{3}k+2}$

$2k=\frac{2}{3}k+2$

$\therefore\ k=\frac{3}{2}$, $10k=15$

21. 정답 ⑤

주어진 식의 양변을 $\cos^2\theta$로 나누면

$$3+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{1}{\cos^2\theta}=0$$

$1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$이므로

$$3+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=0$$

$$\therefore\ \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-2=0$$

한편, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 이므로

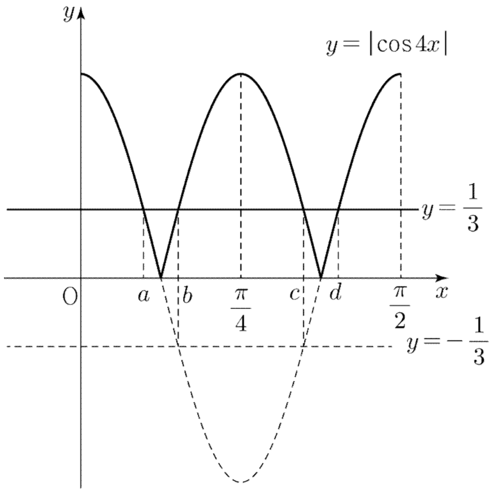
$\tan^2\theta-\tan\theta-2=0, \qquad (\tan\theta-2)(\tan\theta+1)=0$

$\therefore\ \tan\theta=2$ 또는 $\tan\theta=-1$

$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\tan\theta\ge 0$이므로

$\tan\theta=2$

22. 정답 ②



$\cos 4a=\cos 4d=\frac{1}{3}$, $\cos 4b=\cos 4c=-\frac{1}{3}$

$\cos 4a=-\cos 4c$이므로 $4c=\pi+4a$, $c-a=\frac{\pi}{4}$

한편, $\frac{c+d}{2}=\frac{3}{8}\pi$이므로 $c+d=\frac{3}{4}\pi$

따라서

$$\tan(a-c)\times\cos(c+d)=-\tan\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{3}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

23. 정답 ②

x에 대한 이차방정식이 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(\sqrt{2}\cos\theta)^2-3(\sin\theta+1)\geq 0$$
$$2(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta-3\geq 0$$
$$2\sin^2\theta+3\sin\theta+1\leq 0$$
$$(\sin\theta+1)(2\sin\theta+1)\leq 0$$
$$\therefore\ -1\leq\sin\theta\leq-\frac{1}{2}$$

$\frac{7}{6}\pi\leq\theta\leq\frac{11}{6}\pi$, $\alpha=\frac{7}{6}\pi$, $\beta=\frac{11}{6}\pi$

$\therefore\ \beta-\alpha=\frac{11}{6}\pi-\frac{7}{6}\pi=\frac{2}{3}\pi$

24. 정답 ①

조건 (가)에서 $5\theta+\theta=2n\pi$ (단, n은 정수)

즉, $\theta=\frac{n}{3}\pi$

한편, $0<\theta<2\pi$

$$0<\frac{n}{3}\pi<2\pi$$
$$0<n<6$$

n은 정수이므로

$n=1, 2, 3, 4, 5$

조건 (나)에서 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이므로

$n=4$

따라서 $\theta=\frac{4}{3}\pi$이므로

$$\sin\theta\times\tan\theta=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\times\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}\times\tan\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=-\frac{3}{2}$$

25. 정답 ③

함수 $y=4\sin\frac{\pi}{2}x$의 주기가 4이고, 그래프가 점 $(2, 0)$에 대하여 대칭이므로

$\alpha+5\alpha=4\qquad\therefore\ \alpha=\frac{2}{3}$

점 A는 함수 $y=4\sin\frac{\pi}{2}x$의 그래프 위의 점이므로

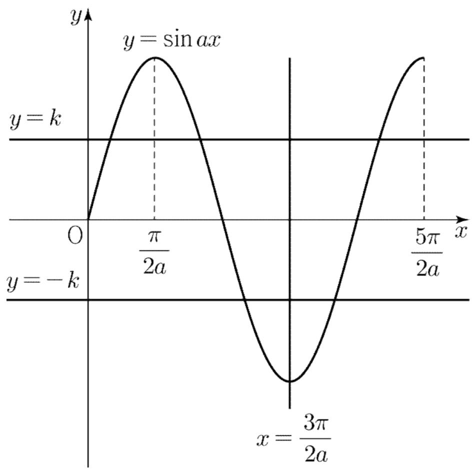
$y=4\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}\qquad\therefore\ \mathrm{A}\left(\frac{2}{3}, 2\sqrt{3}\right)$

선분 AB의 길이는 점 A와 점 $(2, 0)$ 사이의 길이의 두 배와 같으므로

$$2\times\sqrt{\left(2-\frac{2}{3}\right)^2+(0-2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{\frac{16}{9}+12}=\frac{4\sqrt{31}}{3}$$

26. 정답 ③

1보다 작은 모든 양수 k에 대하여 방정식 $\sin ax=k$의 실근 중 $\frac{\pi}{2a}<x<\frac{5\pi}{2a}$에 속하는 두 근은 $x=\frac{3\pi}{2a}$에 대하여 대칭이므로 합은 항상 $\frac{3\pi}{a}$로 일정하다.



이때 방정식 $\sin ax=-k$의 모든 실근의 합은 $\frac{3\pi}{a}=9$이다.

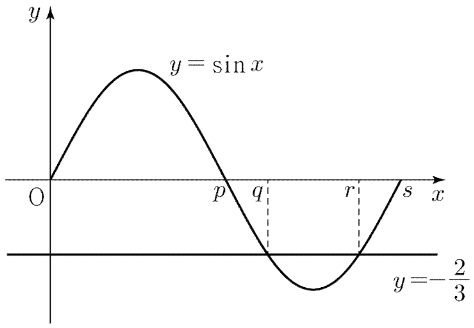
따라서 $a=\frac{\pi}{3}$이고 $\sin a\left(10-\frac{3\pi}{a}\right)=\sin a=k$이므로

$k=\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 $k\sin a=k^2=\frac{3}{4}$이다.

27. 정답 ⑤

$$-1\leq 3\sin x+1\leq 1$$

$-\frac{2}{3} \leq \sin x \leq 0$



따라서 $p=\pi$, $s=2\pi$이고 $\sin q = \sin r = -\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}\sin(p+q) &= \sin(\pi+q)\\ &= -\sin q\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(r+s) &= \cos(r+2\pi)\\ &= \cos r\\ &= \sqrt{1-\sin^2 r} \qquad (\because \tfrac{3}{2}\pi < r < 2\pi)\\ &= \frac{\sqrt{5}}{3}\end{aligned}$$

$$\therefore \sin(p+q)+\cos(r+s) = \frac{2+\sqrt{5}}{3}$$

28. 정답 ①

두 삼각형 OAB와 OAC는 높이가 n으로 서로 같고 밑변의 길이가 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$이다.

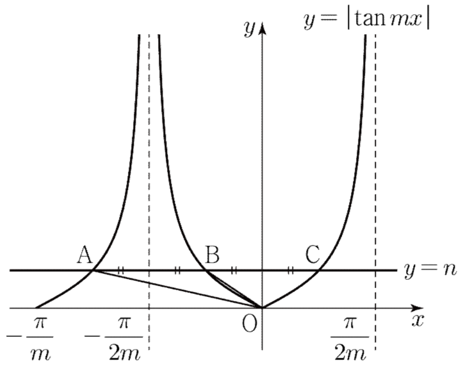
$S_1 = \frac{n}{2}\overline{AB}$, $S_2 = \frac{n}{2}\overline{AC} = 2S_1$이므로

$$\overline{AC} = 2\overline{AB}$$

따라서 점 B는 선분 AC의 중점이다.
점 B의 x좌표를 α라 하면 곡선 $y=|\tan mx|$는 y축에 대하여 대칭이므로

$$\overline{BC} = -2\alpha = \overline{AB}$$

이다.
한편, 다음 그림과 같이 곡선 $y=|\tan mx|$는 직선 $x=-\frac{\pi}{2m}$에 대하여 대칭이다.



$2\alpha = -\frac{\pi}{2m}$, $\alpha = -\frac{\pi}{4m}$이므로

$$n = \left|\tan\left\{m\left(-\frac{\pi}{4m}\right)\right\}\right| = \left|\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = 1$$

$\overline{AC} = \frac{\pi}{m}$이므로

$$S_2 = \frac{\pi}{2m} = 3,\ m = \frac{\pi}{6}$$

따라서 $m \times n = \frac{\pi}{6} \times 1 = \frac{\pi}{6}$이다.

29. 정답 ③

$$\begin{aligned}y &= \sin^2 x + 2a\cos x + 3a + 3\\ &= 1-\cos^2 x + 2a\cos x + 3a + 3\\ &= -\cos^2 x + 2a\cos x + 3a + 4\end{aligned}$$

$\cos x = t$라 하면

$$\begin{aligned}y &= -t^2 + 2at + 3a + 4\\ &= -(t-a)^2 + a^2 + 3a + 4 \quad (-1 \leq t \leq 1)\end{aligned}$$

(ⅰ) $-1 \leq a < 1$일 때
　함수 $y=-(t-a)^2+a^2+3a+4$는 $t=a$에서 최대이므로
　　$a^2+3a+4=13$, $a^2+3a-9=0$
　이때 $a=\frac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}$이고, 이는 $-1 \leq a \leq 1$에서 모순이다.

(ⅱ) $a < -1$일 때
　함수 $y=-t^2+2at+3a+4$는 $t=-1$에서 최대이므로
　　$-1-2a+3a+4=13$
　이때 $a=10$이고, 이는 $a \leq -1$에서 모순이다.

(ⅲ) $a \geq 1$일 때
　함수 $y=-t^2+2at+3a+4$는 $t=1$에서 최대이므로
　　$-1+2a+3a+4=13$
　이때 $a=2$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $a=2$

30. 정답 5

방정식 $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = 0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(n)$이라 하자.
$\sin\{\pi g(x)\} = 0$을 만족시키려면 $g(x)=k$ (k는 정수)이다.
함수 $g(x)$는 주기가 $2n$이므로 정의역 $0 < x \leq 12n$에서 그래프의 개형이 6번 반복된다.
따라서 $0 < x \leq 12n$에서 $g(x)=k$를 만족시키는 실근의 개수 $h(n)$은 $0 < x \leq 2n$일 때 $g(x)=k$를 만족시키는 실근의 개수의 6배이므로 $0 < x \leq 2n$에서 $g(x)=k$를 만족시키는 실근의 개수를 구하자.

(ⅰ) $k=0$일 때
　$x=\frac{n}{2}$, $\frac{3n}{2}$으로 총 2개

(ⅱ) $k=n$ 또는 $-n$일 때
　$x=2n$, n으로 총 2개

(ⅲ) $k=1, 2, \cdots, n-1$일 때
　실근의 개수는 각각 2개씩이다. 따라서 총 $2(n-1)$개

(ⅳ) $k=-1, -2, \cdots, -n+1$일 때
　실근의 개수는 각각 2개씩이다. 따라서 총 $2(n-1)$개

(v) $k > n$ 또는 $-n > k$일 때

함수 $g(x) = n\cos\frac{\pi}{n}x$의 최댓값과 최솟값은 각각 n, $-n$이므로 실근이 존재하지 않는다.

(i)~(v)에 의하여 $0 < x \le 2n$에서 $g(x) = k$를 만족시키는 실근의 개수는 $2+2+2(n-1)+2(n-1) = 4n$
따라서 $h(n) = 6 \times 4n = 24n$이므로 $h(n) = 120$이 되도록 하는 n의 값은 5이다.

31. 정답 ③

선분 AB와 선분 AC의 길이의 비가 5 : 3이므로
$\overline{AB} = 5x$, $\overline{AC} = 3x$ $(x > 0)$이라 할 수 있다.
삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5x \times 3x \times \sin(\angle BAC) = \frac{15}{2}x^2 \times \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{15}{4}\sqrt{3}x^2 = 15\sqrt{3}$$

$x^2 = 4$이고 $x > 0$이므로
$x = 2$
따라서 $\overline{AB} = 10$, $\overline{AC} = 6$
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos(\angle BAC)\\ &= 10^2 + 6^2 - 2 \times 10 \times 6 \times \cos\frac{2}{3}\pi\\ &= 10^2 + 6^2 - 2 \times 10 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= 196\end{aligned}$$

$\overline{BC}^2 = 196$이고 $\overline{BC} > 0$이므로
$\overline{BC} = 14$

32. 정답 ②

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle BAC) = \frac{25 + 49 - 32}{2 \times 5 \times 7} = \frac{3}{5}$$

점 B에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{AH} = 3$
삼각형 BHP에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{BP} = 2\sqrt{5}$

$$\therefore \sin(\angle BPC) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면
삼각형 BPC에서 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{4\sqrt{2}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} \qquad \therefore R = \sqrt{10}$$

따라서 구하는 외접원의 넓이는 10π이다.

33. 정답 ①

삼각형 ABC에서 $\overline{BC} = 8$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$이므로 $\overline{AB} = x$,
$\overline{AC} = y$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
$y^2 = x^2 + 64 - 16x\cos\frac{\pi}{3} = x^2 - 8x + 64$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= x^2 + y^2 = x^2 + x^2 - 8x + 64\\ &= 2x^2 - 8x + 64 = 2(x-2)^2 + 56\end{aligned}$$

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$는 $\overline{AB} = 2$일 때 최솟값 56을 갖는다.
이때 $\overline{AC}^2 = 52$이므로 $\overline{AC} = 2\sqrt{13}$

34. 정답 ⑤

삼각형 ABC에서 주어진 조건에 의하여 $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 5$이고,
$\angle ABC = \theta$라 하면 $\frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin\theta = 2\sqrt{14}$ 에서
$\sin\theta = \frac{4\sqrt{14}}{15}$이므로 $\cos\theta = \frac{1}{15}$ (∵(가))
따라서 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 3^2 + 5^2 - 30 \times \cos\theta = 34 - 30 \times \frac{1}{15} = 32$$

$\therefore \overline{AC} = 4\sqrt{2}$

35. 정답 22

$\angle CAP = \angle PAB$이므로 $\quad \overline{CP} = \overline{PB} = 2$
$\overline{QC} = \overline{PC}$이므로 $\quad \overline{QA} = 3$
따라서 삼각형 APQ와 삼각형 APB는 SAS 합동이므로
$\overline{PB} = \overline{QP} = 2$
또한 삼각형 APQ의 외접원의 넓이는 삼각형 APB의 외접원의 넓이와 같고, 삼각형 APB의 외접원은 삼각형 APC의 외접원과 같다.
즉, 삼각형 APQ의 외접원의 넓이는 삼각형 APC의 외접원의 넓이와 같다.
삼각형 CQP는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$$\angle QCP = \frac{\pi}{3}$$

삼각형 ACP에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 &= 5^2 + 2^2 - 2 \times 5 \times 2 \times \cos\frac{\pi}{3}\\ &= 25 + 4 - 10 = 19\end{aligned}$$

$\therefore \overline{AP} = \sqrt{19}$
삼각형 ACP의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면
사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{19}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2R \qquad \therefore R = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$$

따라서 구하는 외접원의 넓이는 $\frac{19}{3}\pi$이므로

$p = 3$, $q = 19$ $\qquad \therefore p + q = 22$

36. 정답 ②

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BC} \times \sin\angle ACB$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름을 R라 하면, 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AB}}{\sin\angle ACB} = 2R$가 성립한다.

따라서 $S = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BC} \times \frac{\overline{AB}}{2R} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{CA}}{4R}$

$$=\frac{18}{4R}=\frac{9}{2R}$$

삼각형 ABC의 넓이는 $2\sqrt{2}$ 이므로 $\frac{9}{2R}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ R=\frac{9}{4\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{8}$

37. 정답 ⑤

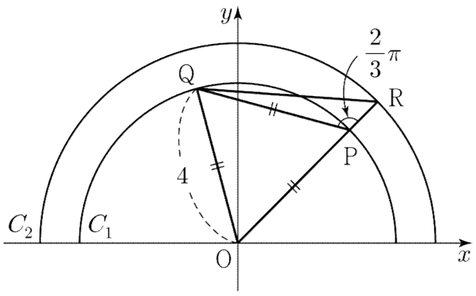
두 반원 C_1, C_2의 반지름의 길이가 각각 4, 5이므로 $\overline{PR}=1$이기 위해서는 점 P가 선분 OR 위에 존재해야 한다.

ㄱ. $\overline{PQ}=4$이면, $\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{PQ}=4$이므로 삼각형 PQR는 정삼각형이고 $\overline{PR}=1$, $\angle QPR=\frac{2}{3}\pi$이므로

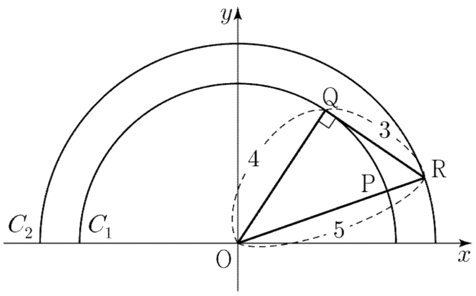
삼각형 PQR에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{QR}=\sqrt{4^2+1^2-2\times4\times1\times\cos\frac{2}{3}\pi}=\sqrt{21}$

이다. (참)



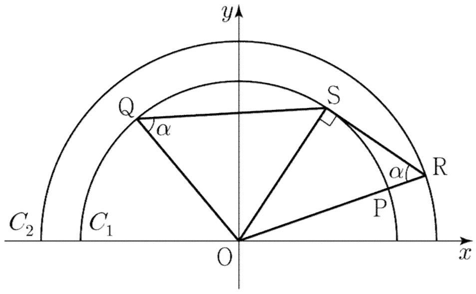
ㄴ. $\overline{OQ}=4$, $\overline{OR}=5$이므로 $\overline{QR}=3$이면 삼각형 OQR는 $\angle OQR=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다. 따라서 선분 OR는 삼각형 OQR의 외접원의 지름이므로 지름의 길이는 5이다. (참)



ㄷ. ㄴ에 의하여 삼각형 ORS는 선분 OR를 빗변으로 하는 직각삼각형이고 $\angle ORS=\alpha$라 할 때, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$이다.

또한, 호 PQ 위에 점 S가 존재하고 두 점 Q, S는 반원의 호 위의 점이므로 $\angle OQS$는 예각이다.

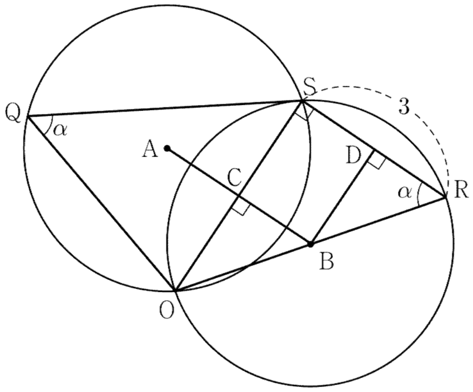
따라서 $\angle OQS=\alpha$이고 네 점 P, Q, R, S의 위치관계는 다음 그림과 같다.



두 삼각형 OQS, ORS의 외접원의 반지름의 길이를 각각 R, r라 하면 사인법칙에 의하여

$2R=\frac{\overline{OS}}{\sin\alpha}$, $2r=\frac{\overline{OS}}{\sin\alpha}$ 이므로 $R=r$

즉, 두 원의 반지름의 길이는 같다. 두 원의 중심을 각각 A, B라 하고 두 선분 AB, OS의 교점을 C, 점 B에서 선분 SR에 내린 수선의 발을 D라 하자.



두 원이 서로 합동이므로 $\overline{AB}=2\times\overline{CB}$이고

$\overline{OC}=\overline{CS}$, $\overline{OB}=\overline{BR}$이므로 $\overline{SD}=\overline{DR}=\frac{3}{2}$

따라서 $\overline{CB}=\frac{3}{2}$이고 두 삼각형의 외심 사이의 거리는 3이다. (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

38. 정답 ②

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$$

이므로 $\overline{BC}=7$이고,

$$\angle BAD=\angle DAC=\frac{\pi}{3}$$

이므로

$$\overline{BD}=\overline{CD}=\overline{BC}=7$$

이다. 따라서

$$\overline{AD}+\overline{CD}+\overline{AC}-(\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{AB})=\overline{AC}-\overline{AB}=2$$

$\overline{AB}=k$라 하면 $\overline{AC}=k+2$이고

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}=\sqrt{k^2+(k+2)^2-2k(k+2)\cos\frac{2}{3}\pi}$$
$$=\sqrt{k^2+k^2+4k+4+k^2+2k}$$
$$=\sqrt{3k^2+6k+4}$$

$$=7$$
이므로
$$3k^2+6k-45=0$$
$$3(k-3)(k+5)=0$$
에서 $k=3$이다.
$$\overline{AB}=3,\ \overline{AC}=5,\ \angle BAC=\frac{2}{3}\pi$$
이므로 삼각형 ABC의 넓이는
$$\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{15\sqrt{3}}{4}$$
이다.

39. 정답 44

원주각의 성질에 의하여 $\angle CQR=\angle CBR$이고
두 선분 AB와 QR가 평행하므로
$$\angle QAB=\angle CQR$$
이다. $\angle QAB=\angle CQR=\angle CBR=\alpha$라 하면
삼각형 QAB에서 코사인법칙에 의하여
$$\cos\alpha=\frac{25+169-90}{2\times5\times13}$$
$$=\frac{4}{5}$$
삼각형 APQ에서 코사인법칙에 의하여
$$\overline{PQ}=\sqrt{25+25-2\times5\times5\times\frac{4}{5}}$$
$$=\sqrt{10}$$
두 삼각형 APQ와 ABC의 닮음비가 5 : 13이므로
$$\overline{BC}=\frac{13}{5}\sqrt{10}$$
한편, $\overline{BR}=\overline{PQ}=\sqrt{10}$이고 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$이므로
삼각형 CBR의 넓이는
$$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{BR}\times\sin\alpha=\frac{1}{2}\times\frac{13}{5}\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\frac{3}{5}$$
$$=\frac{39}{5}$$
이다.
따라서 $p=5,\ q=39$이고 $p+q=44$

40. 정답 134

원 O'의 반지름의 길이를 r라 하자.
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
$$\frac{\overline{AB}}{\sin\alpha}=16$$
이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
$$\frac{\overline{BD}}{\sin\alpha}=2r$$
이다.
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{5}{8}$$
이므로 $r=5$이다.
한편, 삼각형 OAB가 이등변삼각형이므로 선분 OO′의 연장선과 선분 AB는 수직이다. 그러므로
$$\angle O'OB=\alpha$$
이고,
$$\angle O'OB=\angle ACB=\alpha\quad(\because\ \overline{AC}\,/\!/\,\overline{OO'})$$
$$\angle BOE=2\times\angle BAE=2\alpha\quad(\because\ \text{원주각과 중심각})$$
$$\therefore\ \angle O'OE=\angle O'OB+\angle BOE=3\alpha$$
삼각형 OO′E에서 $\overline{OO'}=5,\ \overline{OE}=8,\ \angle O'OE=3\alpha$이므로
코사인법칙에 의하여
$$\overline{O'E}^2=5^2+8^2-2\times5\times8\times\left(-\frac{9}{16}\right)=134$$
이다.

41. 정답 ③

등비중항에 의하여 $a_1a_5=(a_3)^2$이므로
$$(a_3)^2+a_3-2=(a_3+2)(a_3-1)=0$$
수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $r>0$이고 $a_7=16$이므로 모든 항은 양수이다.
따라서 $a_3=1,\ a_7=16$이므로 $\quad r^4=16$
$$\therefore\ a_{11}=a_3\times r^8=1\times16^2=2^8$$

42. 정답 ③

수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
$$3r^2\times3r^3\times3r^4=3r^7,\quad 3^2r^2=1\ (\because\ r\neq0)$$
모든 항이 양수이므로 $\quad r=\frac{1}{3}$
$$\therefore\ a_6=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{81}$$

43. 정답 ②

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$$S_3=\frac{3(2a+2d)}{2}=3(a+d)$$
$$S_5=\frac{5(2a+4d)}{2}=5(a+2d)$$
$$S_8=\frac{8(2a+7d)}{2}=4(2a+7d)$$
따라서 주어진 식에 대입하면
$$6(a+d)+5(a+2d)=4(2a+7d)\qquad\therefore\ a=4d$$
따라서 $a_n=dn+3d$이므로
$$\frac{a_{21}}{a_5}=\frac{24d}{8d}=3$$

44. 정답 6

$a_1=a$라 하면 $\quad a_n=2n+a-2\qquad\cdots$ ㉠
조건 (가)에서 $a_m=2m+a-2=0$이므로
$$a=2-2m$$
조건 (나)에서 등차중항에 의하여
$$a_2+a_4+a_6+a_8=(a_2+a_8)+(a_4+a_6)=4a_5$$
$$a_{2m}+a_{2l}=2a_{m+l}$$
즉, $4a_5=2a_{m+l}$이므로
$$a_{m+l}=2a_5$$
㉠에 의하여
$$a_{m+l}=2(m+l)+a-2=2(m+l)-2m=2l$$
$$2a_5=2(a+8)=2(10-2m)$$
이므로
$$l=10-2m$$

따라서 $m+l$의 최솟값은 $m=4,\ l=2$일 때 6이다.

[참고]
$a_m=0,\ a_{m+l}=2a_5$이므로
$a_m+a_{m+l}=2a_5$에서 a_5를 a_m과 a_{m+l}의 등차중항으로 생각할 수 있다.
따라서 $\dfrac{m+(m+l)}{2}=5$에서 $2m+l=10$이다.

45. 정답 ③

$a_n=a_1+(n-1)d_1,\ b_n=b_1+(n-1)d_2$이므로
$c_n=(a_1-b_1)+(d_1-d_2)(n-1)$
그러므로 수열 $\{c_n\}$은 공차가 d_1-d_2인 등차수열이다.
ㄱ. $d_1=d_2+1$이면 $d_1-d_2=1$이므로
수열 $\{c_n\}$은 공차가 1인 등차수열이다. (참)
ㄴ. 수열 $\{c_n\}$는 공차가 d_1-d_2인 등차수열이므로
$S_n=\dfrac{n(c_1+c_n)}{2}$ 이다.
어떤 상수 p에 대하여 $S_n=np$이므로 $p=\dfrac{c_1+c_n}{2}$
즉, $c_1+c_n=2p$이다.
그러므로 $d_1-d_2=0,\ d_1=d_2$이고, $c_n=c_1$이다.
따라서 $c_1=p$이고, $a_1=b_1+p$이므로
$p\neq 0$이면 $a_n\neq b_n$이다. (거짓)
ㄷ. $d_1>d_2,\ a_k=b_k$이면 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 0 이하이고 공차가 양수인 등차수열이며, $c_k=0$이므로 S_n은 $n=k$일 때 최솟값을 갖는다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

46. 정답 6

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 조건 (가)에서

$$8+8r+8r^2=\frac{1}{8r^4}+\frac{1}{8r^5}+\frac{1}{8r^6}$$
$$8(1+r+r^2)=\frac{1}{8r^6}(1+r+r^2)$$

$1+r+r^2\neq 0$이므로 $\quad 8=\dfrac{1}{8r^6}\qquad \therefore\ r=\pm\dfrac{1}{2}$

조건 (나)에서 $a_2<a_3$이므로 $\quad r=-\dfrac{1}{2}$

즉, $a_n=8\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$$8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-2}<\frac{1}{100},\qquad 2^{2n-2}>800$$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 6이다.

47. 정답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 조건 (가)에서

$$\frac{8(-2+7d)}{2}=2\times\frac{4(-2+3d)}{2}+64\qquad \therefore\ d=4$$

$S_4=\dfrac{4(-2+12)}{2}=20$이므로 조건 (나)에서
$T_4=20$
등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면

$$\frac{-(r^4-1)}{r-1}=20,\qquad r^3+r^2+r+21=0$$
$$(r+3)(r^2-2r+7)=0$$

따라서 $r=-3$이므로

$$a_8+b_6=(-1+7\times 4)+\{-1\times(-3)^5\}=270$$

48. 정답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b라 하자.
$a_3=4a,\ b_3=16b$이므로 $a_3b_3=64ab=192$에서 $ab=3$
$S_m=\dfrac{a(2^m-1)}{2-1},\ T_m=\dfrac{b(4^m-1)}{4-1}$에서

$$S_mT_m=\frac{ab(2^m-1)(4^m-1)}{3}$$
$$=(2^m-1)(4^m-1)=45$$

$2^m=t$라 하면 $(t-1)(t^2-1)=45$
$t^3-t^2-t-44=0$에서 $t=4$
따라서 $2^m=4$
$\therefore\ m=2$

49. 정답 21

조건 (가)에서

$$S_{14}+S_{17}=(S_{15}-a_{15})+(S_{15}+a_{16}+a_{17})=a_{18}$$
$$2S_{15}=(a_{18}-a_{17})-(a_{16}-a_{15})=0$$
$$\therefore\ S_{15}=0,\ a_1+a_{15}=0$$
$$\therefore\ a_8=0$$

조건 (나)에서 S_n이 양수인 최댓값을 가지므로 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 양수이고 공차가 음수이다. $a_8=0$이므로

$$S_8=\frac{8\times(a_1+a_8)}{2}=4a_1=84$$
$$\therefore\ a_1=21$$

50. 정답 ③

$a_{k-2}+a_k+a_{k+2}=15$에서 등차중항에 의하여
$a_k=5$ $\quad\cdots$ ㉠
$S_{2k-1}=S_{4k}$에서 $S_{4k}-S_{2k-1}=0$이므로
$a_{2k}+a_{2k+1}+\cdots+a_{4k-1}+a_{4k}=0$
마찬가지로 등차중항에 의하여
$(2k+1)\times a_{3k}=0\qquad \therefore\ a_{3k}=0$ $\quad\cdots$ ㉡
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 ㉠, ㉡에서
$2k\times d=-5$ $\quad\cdots$ ㉢
$S_{2k-1}=\dfrac{(2k-1)(a_1+a_{2k-1})}{2}$ 에서 등차중항에 의하여
$a_1+a_{2k-1}=2\times a_k$이므로
$(2k-1)\times a_k=45\qquad \therefore\ k=5$ ($\because$ ㉠)

따라서 $a_5=5$이고, ㉢에 의하여 $d=-\dfrac{1}{2}$ 이므로

$$a_1=a_5-4d=5-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$$

51. 정답 ①

$$\log_2 \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \log_2 \frac{k+1}{k} - \log_2 \frac{k+2}{k+1}$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{14} \log_2 \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$$
$$= \sum_{k=1}^{14} \left(\log_2 \frac{k+1}{k} - \log_2 \frac{k+2}{k+1} \right)$$
$$= \left(\log_2 \frac{2}{1} - \log_2 \frac{3}{2} \right) + \left(\log_2 \frac{3}{2} - \log_2 \frac{4}{3} \right) + \cdots$$
$$+ \left(\log_2 \frac{14}{13} - \log_2 \frac{15}{14} \right) + \left(\log_2 \frac{15}{14} - \log_2 \frac{16}{15} \right)$$
$$= \log_2 2 - \log_2 \frac{16}{15}$$
$$= \log_2 \frac{15}{8}$$

52. 정답 ②

조건 (가)에 의하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 87 \quad \cdots ㉠$$

조건 (나)에 의하여

$$\sum_{k=1}^{10} k(a_k - a_{k+1})$$
$$= (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \cdots$$
$$+ 9(a_9 - a_{10}) + 10(a_{10} - a_{11})$$
$$= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} - 10a_{11}$$
$$= 47 \quad \cdots ㉡$$

㉠에서 ㉡을 빼면

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} k(a_k - a_{k+1}) = 10a_{11}$$
$$= 87 - 47$$
$$= 40$$

$\therefore\ a_{11} = 4$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{11} a_k = \sum_{k=1}^{10} a_k + a_{11}$$
$$= 87 + 4$$
$$= 91$$

53. 정답 ③

$a_1 = 2$ 이므로 $a_2 = (-1)^1 \times a_1 + 3$ 에서 $a_2 = 1$

$a_2 = 1$ 이므로 $a_3 = (-1)^2 \times a_2 + 3$ 에서 $a_3 = 4$

$a_3 = 4$ 이므로 $a_4 = (-1)^3 \times a_3 + 3$ 에서 $a_4 = -1$

$a_4 = -1$ 이므로 $a_5 = (-1)^4 \times a_4 + 3$ 에서 $a_5 = 2$

⋮

즉, 자연수 m에 대하여

$a_{4m-3} = 2,\ a_{4m-2} = 1,\ a_{4m-1} = 4,\ a_{4m} = -1$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{98} a_k = \sum_{k=1}^{96} a_k + a_{97} + a_{98}$

$$= 24 \times \{2 + 1 + 4 + (-1)\} + (2 + 1)$$
$$= 147$$

[다른 풀이]

$n = 2m - 1$ (단, m는 자연수)일 때

$$a_{2m} = -a_{2m-1} + 3$$
$$a_{2m-1} + a_{2m} = 3$$

한편, $\displaystyle\sum_{k=1}^{98} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{97} + a_{98}$

$$= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{97} + a_{98})$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{98} a_k = \sum_{m=1}^{49} (a_{2m-1} + a_{2m})$$
$$= \sum_{m=1}^{49} 3$$
$$= 3 \times 49$$
$$= 147$$

54. 정답 ②

(ⅰ) $n = 1$일 때, (좌변)$=\boxed{2}$, 우변$=\boxed{2}$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ⅱ) $n = m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} k(k+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3} \quad \cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $\boxed{(m+1)(m+2)}$을(를) 더하면

$$\sum_{k=1}^{m+1} k(k+1) = \boxed{\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3}}$$

이므로 $n = m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

따라서 $p = 2$, $f(m) = (m+1)(m+2)$,

$g(m) = \dfrac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3}$ 이므로

$$p + f(4) + g(3) = 2 + 5 \times 6 + \frac{4 \times 5 \times 6}{3}$$
$$= 72$$

55. 정답 127

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열이므로

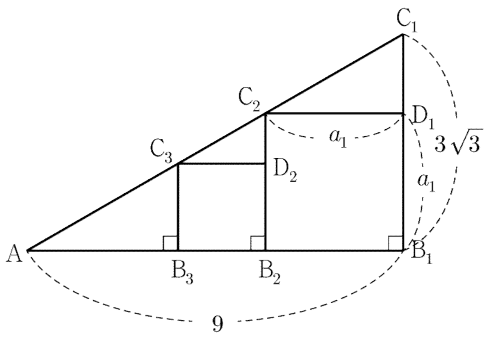
$a_n = 2^n$이라 할 수 있다.

따라서 $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{2^n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{7} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{7} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{7} \frac{2^7}{a_k} = 2^7 \times \sum_{k=1}^{7} \frac{1}{a_k}$$
$$= 2^7 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}$$
$$= 2^7 - 1$$
$$= 127$$

56. 정답 ①



삼각형 AB_1C_1 에서 $\overline{AB_1}=9$, $\overline{B_1C_1}=3\sqrt{3}$ 이고

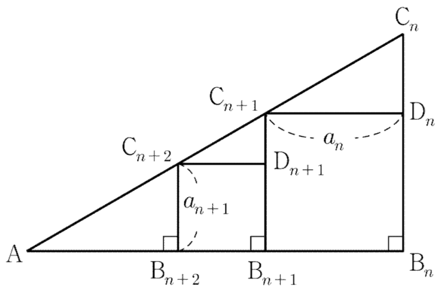
선분 C_2D_1 과 선분 AB_1 은 서로 평행하므로 삼각형 $C_1C_2D_1$ 과 삼각형 C_1AB_1 은 서로 닮음이다. $\overline{B_1D_1}=\overline{C_2D_1}=a_1$ 이라 하면

$\overline{C_1D_1}=3\sqrt{3}-a_1$ 이고 닮음비에 의하여

$\overline{C_1B_1} : \overline{AB_1}=3\sqrt{3} : 9=(3\sqrt{3}-a_1) : a_1$

$9\times(3\sqrt{3}-a_1)=3\sqrt{3}\times a_1$ 에서

$$a_1=\frac{9}{\sqrt{3}+1}=\frac{9}{2}(\sqrt{3}-1) \qquad \cdots ㉠$$



또한, $\overline{C_{n+1}D_n}=\overline{C_{n+1}B_{n+1}}=a_n$ 이라 하고,

$\overline{C_{n+2}D_{n+1}}=\overline{D_{n+1}B_{n+1}}=a_{n+1}$ 이라 하면

$\overline{C_{n+1}D_{n+1}}=a_n-a_{n+1}$ 이고, 닮음비에 의하여

$\overline{C_{n+1}D_{n+1}} : \overline{C_{n+2}D_{n+1}}=(a_n-a_{n+1}) : a_{n+1}=3\sqrt{3} : 9$

$3\sqrt{3}\times a_{n+1}=9\times(a_n-a_{n+1})$ 에서

$$a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}a_n$$
$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}a_n$$

$$\therefore\ p=\frac{3-\sqrt{3}}{2} \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$a_1+p=\frac{9}{2}(\sqrt{3}-1)+\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$
$$=4\sqrt{3}-3$$

57. 정답 ③

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1=1$ 이고 공비가 3 이므로 $a_n=3^{n-1}$ 이다.

또한 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$S_n=\dfrac{3^n-1}{3-1}=\dfrac{3^n-1}{2}$ 이 된다.

따라서 $a_{2n+1}=3^{2n}=9^n$

$$\therefore\ 32\times\sum_{k=1}^{10}\frac{S_k(S_k+1)}{a_{2k+1}}=32\times\sum_{k=1}^{10}\frac{\frac{3^k-1}{2}\times\frac{3^k+1}{2}}{9^k}$$
$$=32\times\sum_{k=1}^{10}\frac{9^k-1}{4\times 9^k}$$
$$=8\times\sum_{k=1}^{10}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^k\right\}$$
$$=8\times\left[10-\frac{1}{9}\times\left\{\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{10}}{1-\frac{1}{9}}\right\}\right]$$
$$=80-\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{10}\right\}$$
$$=79+\left(\frac{1}{9}\right)^{10}$$

따라서 m 은 79 이다.

58. 정답 ④

$S_4=|2a_5|=10$

즉, $a_1+a_2+a_3+a_4=10$

$S_1=a_1=|2a_2|$ 이므로

$a_2=-\dfrac{a_1}{2}$ 또는 $a_2=\dfrac{a_1}{2}$ 이고, $a_1>0$ 이다.

이와 같은 방법으로 a_2, a_3, a_4 를 구하면 다음 표와 같다.

<table>
<tr><th>a_2</th><th>S_2</th><th>a_3</th><th>S_3</th><th>a_4</th><th>S_4</th><th>a_1</th></tr>
<tr><td rowspan="4">$-\frac{a_1}{2}$</td><td rowspan="4">$\frac{a_1}{2}$</td><td rowspan="2">$-\frac{a_1}{4}$</td><td rowspan="2">$\frac{a_1}{4}$</td><td>$-\frac{a_1}{8}$</td><td>$\frac{a_1}{8}$</td><td>80</td></tr>
<tr><td>$\frac{a_1}{8}$</td><td>$\frac{3}{8}a_1$</td><td>$\frac{80}{3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{a_1}{4}$</td><td rowspan="2">$\frac{3}{4}a_1$</td><td>$-\frac{3}{8}a_1$</td><td>$\frac{3}{8}a_1$</td><td>$\frac{80}{3}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{3}{8}a_1$</td><td>$\frac{9}{8}a_1$</td><td>$\frac{80}{9}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\frac{a_1}{2}$</td><td rowspan="4">$\frac{3}{2}a_1$</td><td rowspan="2">$-\frac{3}{4}a_1$</td><td rowspan="2">$\frac{3}{4}a_1$</td><td>$-\frac{3}{8}a_1$</td><td>$\frac{3}{8}a_1$</td><td>$\frac{80}{3}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{3}{8}a_1$</td><td>$\frac{9}{8}a_1$</td><td>$\frac{80}{9}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{3}{4}a_1$</td><td rowspan="2">$\frac{9}{4}a_1$</td><td>$-\frac{9}{8}a_1$</td><td>$\frac{9}{8}a_1$</td><td>$\frac{80}{9}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{9}{8}a_1$</td><td>$\frac{27}{8}a_1$</td><td>$\frac{80}{27}$</td></tr>
</table>

따라서 a_1 의 최댓값은 80 이다.

59. 정답 10

$a_2=a_1+p+2q$
$\quad=6+p+2q$
$a_3=a_2+2p+2q$

$=6+3p+4q$

$a_4=a_3+3p+2q$

$=6+6p+6q$

이때 $a_2a_4\le 0$이므로

(ⅰ) $a_2\le 0$, $a_4\ge 0$일 때

$6+p+2q\le 0$에서 $p\le -2q-6$ ⋯ ㉠

$6+6p+6q\ge 0$에서 $-q-1\le p$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $-q-1\le p\le -2q-6$

그런데 $-q-1$, $-2q-6$이 모두 정수이고, 정수 p가 존재해야 하므로 $-q-1\le -2q-6$이 성립해야 한다.

즉, $q\le -5$이므로 $q=-5$ 또는 $q=-6$ 또는 $q=-7$

(1) $q=-5$일 때

$4\le p\le 4$이므로 모든 순서쌍 $(p,\ q)$는

$(4,\ -5)$

(2) $q=-6$일 때

$5\le p\le 6$이므로 모든 순서쌍 $(p,\ q)$는

$(5,\ -6)$, $(6,\ -6)$

(3) $q=-7$일 때

$6\le p\le 8$이고 $p\le 7$이므로 모든 순서쌍 $(p,\ q)$는

$(6,\ -7)$, $(7,\ -7)$

(ⅱ) $a_2\ge 0$, $a_4\le 0$ 일 때

$6+p+2q\ge 0$에서 $p\ge -2q-6$ ⋯ ㉠

$6+6p+6q\le 0$에서 $p\le -q-1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $-2q-6\le p\le -q-1$

그런데 $-2q-6$, $-q-1$이 모두 정수이고, 정수 p가 존재해야 하므로 $-2q-6\le -q-1$이 성립해야 한다.

즉, $-5\le q$이므로 $q=-5$ 또는 $q=-4$ 또는 $q=-3$ 또는 $q=-2$ 또는 $q=-1$ 이다. 그런데 $q=-5$는 (ⅰ)에서 구했으므로 $q=-4,-3,-2,-1$인 경우만 구하면 된다.

(1) $q=-4$일 때

$2\le p\le 3$이므로 모든 순서쌍 $(p,\ q)$는

$(2,\ -4)$, $(3,\ -4)$

(2) $q=-3$일 때

$0\le p\le 2$이고 $0<p$이므로 모든 순서쌍 $(p,\ q)$는

$(1,\ -3)$, $(2,\ -3)$

(3) $q=-2$일 때

$-2\le p\le 1$이고 $0<p$이므로 모든 순서쌍 $(p,\ q)$는

$(1,\ -2)$

(4) $q=-1$일 때

$-4\le p\le 0$이고 $0<p$이므로 이를 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$는 없다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 10이다.

60. 정답 ⑤

(ⅰ) $n=1$일 때

$$A_1=\{x\mid 1\le x<4\},\ B_1=\left\{y\ \middle|\ \frac{1}{2}\le y<8\right\}$$

에서 집합 $(A_1\cup B_1)-(A_1\cap B_1)$의 원소의 최솟값은

$$a_1=\frac{1}{2}$$

이다.

(ⅱ) $n=2$일 때

$$A_2=\{x\mid 2\le x<8\},\ B_2=\{y\mid 2\le y<32\}$$

에서 집합 $(A_2\cup B_2)-(A_2\cap B_2)$의 원소의 최솟값은

$$a_2=8$$

이다.

(ⅲ) $n=3$일 때

$$A_3=\{x\mid 4\le x<16\},\ B_3=\{y\mid 8\le y<128\}$$

에서 집합 $(A_3\cup B_3)-(A_3\cap B_3)$의 원소의 최솟값은

$$a_3=4=2^2$$

이다.

(ⅳ) $n\ge 4$일 때

$$A_n=\{x\mid 2^{n-1}\le x<2^{n+1}\},$$
$$B_n=\{y\mid 2^{2n-3}\le y<2^{2n+1}\}$$

에서 $2^{n+1}\le 2^{2n-3}$이므로 $A_n\cap B_n=\varnothing$이고,

집합 $(A_n\cup B_n)-(A_n\cap B_n)$의 원소의 최솟값은

$$a_n=2^{n-1}$$

이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{20}a_n=a_1+a_2+\sum_{n=3}^{20}a_n$$
$$=\frac{1}{2}+8+\sum_{n=3}^{20}2^{n-1}$$
$$=\frac{17}{2}+\frac{2^2(2^{18}-1)}{2-1}$$
$$=\frac{9}{2}+2^{20}$$