제 2 교시

# 수학 영역

정답표:

공통과목

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| ③ | ② | ① | ④ | ⑤ |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ⑤ | ④ | ① | ② | ③ |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| ④ | ① | ② | ③ | ③ |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 8 | 39 | 4 | 37 | 17 |
| 21 | 22 | | | |
| 98 | 45 | | | |

선택과목-확률과 통계

| 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
|---|---|---|---|---|
| ④ | ③ | ⑤ | ① | ② |
| 28 | 29 | 30 | | |
| ③ | 244 | 155 | | |

선택과목-미적분

| 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
|---|---|---|---|---|
| ④ | ⑤ | ③ | ① | ② |
| 28 | 29 | 30 | | |
| ③ | 23 | 49 | | |

선택과목-기하

| 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
|---|---|---|---|---|
| ④ | ③ | ② | ① | ⑤ |
| 28 | 29 | 30 | | |
| ③ | 48 | 9 | | |

예상 등급컷:

| | 미적분 | 기하 | 확통 |
|---|---|---|---|
| 1등급 | 76 | 80 | 80 |
| 2등급 | 68 | 72 | 72 |

총평:

공통과목과 선택과목 모두 객관식의 난이도가 주관식에 비하여 상당히 높은 시험입니다. 지난 6월 모의평가 및 교육부의 발표에서 예고한 킬러문항 배제 기조에 따라, 21, 22, 29, 30으로 대표되는 주관식 킬러 번호대의 문항들이 상대적으로 쉬웠을 터이나, 공통과목 10번부터 어렵지 않아 보이는 문항 형태임에도 계산면에 있어서 어려움을 느끼시는 학생분들이 많았을 것입니다.

6월 모의평가의 경우, 12, 13 라인의 어려움을 인지하여 14, 15번 문항의 예년보다 낮추었지만, 이번 시험의 경우 11, 12, 13, 14, 15라인 모두에서 버거움을 느꼈을 가능성이 큽니다. 다만, 공통 주관식 주요 문항의 경우(20, 21, 22) 이번 6월 모의평가의 20, 21, 22보다는 상대적으로 쉬웠을 가능성이 큽니다. 특히, 15번이 등차수열 파트로 배정됨에 따라 21이 귀납적으로 정의된 수열로 출제되었고, 복잡한 논리 과정없이 중간항부터 시작하는 가벼운 역추적으로만 문제가 풀리기에 21은 무난했을 것입니다. 22의 경우에도, 박스의 조건 없이도 삼차함수를 결정하는데 필요한 4가지 조건 중 3가지 조건이 주어져(2023학년도 9월 모의평가 22번과 비슷) 6평 22번보다는 상대적으로 수월했을 것입니다.

선택과목의 경우 어려운 공통과목 난이도에 비하여 28번을 제외하고는 쉽게 출제되었습니다. 28번의 경우, 6월 모의평가보다도 다소 어려웠을 가능성이 있습니다. 다만 29, 30이 6월 모의평가와 비슷한 난이도로 출제되고, 전통적으로 자주 나오던 형태로 출제되어 주관식에서 크게 고난을 겪지는 않았을 겁니다.

전반적으로 공통과목에서 도형 요소 및 고1 수학의 내용이 강조된 시험입니다. 12, 13, 15번이 도형 관련, 10, 15, 22가 고1 수학이 깊게 연관이 된 문제입니다. 특히나 이번 6평의 경우에도 12번의 집합 형태나 13번의 마무리 곱셈공식 처리 등, 고1 수학의 기본적인 내용들도 중요함이 다른 평가원 시험들보다도 강조되었기에 저도 이 부분을 고려하여 출제했습니다. 아마 해당 문항들의 풀이과정 자체에서 이질감을 느끼셨을 경우, 고1 수학 내용도 돌아보는 것이 어떨까 생각합니다.

주요 문항 출제 의도 및 분석/풀이로 이어집니다.

**9.** 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f'(2)=3$이고

$$\lim_{x \to 2} \frac{\int_2^x f(t^3)dt}{f(x)-x} = 3$$

이다. $f(2)+f(8)$의 값은? [4점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

출제 의도) 함숫값을 이용해서 도함수값을 이용하는 문제들과 다르게, 역으로 도함수값으로부터 원함수의 값을 추론하는 문항입니다. 기본적인 $\frac{0}{0}$꼴 극한의 계산에 대해서도 알고 있어야 하죠?

답: 2번

풀이)
부정형 꼴의 극한이 주어져 있습니다.

분자가 0으로 가는 상황이니 분모가 0으로 가지 않는다면 극한은 3일 수 없습니다.
이 논리로 분모가 0으로 간다는 사실을 발견할 수 있고, $f(2)=2$로 확정됩니다.

이제 극한식 자체를 계산할 때

분모 분자를 $x-2$로 각각 나누어 미분계수 식처럼 바라본다면, 주어진 극한은 $\frac{f(8)}{f'(2)-1}=3$이 됩니다. 이미 $f'(2)$의 값을 알기에, $f(8)$도 결정 가능해지죠.

**10.** 구간 $[0, k]$에서 함수

$$f(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \pi x\right) + \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right)$$

의 최댓값과 최솟값의 합이 $\frac{3}{2}$일 때, $k$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $1$ ⑤ $\frac{7}{6}$

출제 의도) 삼각함수 안의 내용물을 각각의 항별로 분해하려는 시도는 절대 하면 안됩니다. 하나의 뭉탱이로 보아야 하죠?

최댓값과 최솟값이 있으니, 사인함수가 커버하는 치역의 범위에 따라 이차함수의 정의역이 변화됨을 인지해야 합니다.

유사 문항) 2019학년도 9월 모의평가 가형 14번

**14.** 실수 $k$에 대하여 함수

$$f(x) = \cos^2\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 $m$이다. $k+m$의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

답: 3번

풀이)

사인함수 안의 함수들을 통일하고자 $\pi x + \frac{\pi}{3}$를 기준으로 식을 작성해보겠습니다. 그럼 $\frac{\pi}{6} - \pi x = \frac{\pi}{2} - \left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right)$입니다.
따라서 $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \pi x\right) = \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right)$가 됩니다. 그런데 지금 이 식에 제곱을 취해줬으니, $\cos^2$을 $1 - \sin^2$으로 바꿔줄 수 있네요.
따라서 결론적으로

$f(x) = -\sin^2\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$입니다. 이 식 또한 다시 이차식의 표준형으로 바꿔준다면
$f(x) = -\left\{\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\right\}^2 + \frac{5}{4}$로 나타낼 수 있을 것 같습니다.

결국 이 문제는, 구간 $[0, k]$에서 함수 $\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right)$의 치역을 $A$라고 한다면 $A$를 정의역으로 하는 함수 $-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$의 최댓값과 최솟값의 합이 $\frac{3}{2}$라는 의미입니다.
(이 관점은 고1 합성함수 내용입니다. 개형을 파악하는 미적분의 $n$축과는 다른 내용입니다.)

$k$가 0에 가깝다면 $A$는 대략 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 근처의 값들을 원소로 가지며, $k$가 점점 커질수록 $A$가 커버하는 범위는 넓어집니다. 다만 사인함수의 치역이기에 $A \subset [-1, 1]$입니다.

일단 만약 $A$의 모든 원소들이 $\frac{1}{2}$보다 크거나 같다면 어떤 일이 발생하는지 확인해봅시다. 그럼 $A$를 정의역으로 하는 이차함수 $-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$의 최솟값은 무조건 1이상입니다. $A$의 모든 원소는 1이하니까요. 그럼 문제의 조건에서 (최댓값)+(최솟값)이 $\frac{3}{2}$이기에, 최댓값이 최솟값보다 작아지는 이상한 일이 발생하죠.
따라서 $A$는 $\frac{1}{2}$보다 작은 값들도 원소로 가져야 합니다. 그런데 그 말은 결국 이미 $\frac{1}{2}$를 원소로 가지고 있어야 한다는 의미이고, 최댓값은 $\frac{5}{4}$로 확정됩니다. 즉, 최솟값은 $\frac{1}{4}$가 되어야 하며, 이를 만족시키리면 $A$는 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$이 되어야 합니다.
따라서 $\sin\left(\pi k + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$을 만족시키는 최소의 양수 $k$가 저희가 구하는 답이고, $k = \frac{5}{6}$입니다.

**11.** 연속함수 $f(x)$와 상수 $k$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$|f(x)|=\begin{cases}1 & (x<k)\\ (x-2)^2 & (x\geq k)\end{cases}$$

이고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때 $F(x)$의 최솟값은 0이다. $F(-2)+F(5)$의 값은? [4점]

① $\frac{31}{3}$ ② 11 ③ $\frac{35}{3}$ ④ $\frac{37}{3}$ ⑤ 13

출제 의도) 도함수의 개형과 원함수의 관계를 파악해야 하는 문제입니다. 문제 풀이 경험이 많은 학생의 경우 특수한 개형이 바로 보이겠지만, $k$가 왜 둘 중 하나만 되는지, 왜 함수가 $x=2$를 기준으로 뒤집어져야 하는지 $f$의 연속성과 관련지어 고민해보시길 바랍니다.

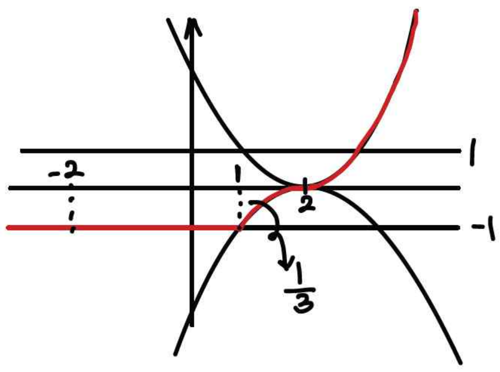
답: 4번

풀이) 먼저 $f(x)$가 연속함수이면 $|f(x)|$도 연속함수이므로 $(k-2)^2=1$입니다. 즉, $k=1\text{ or }3$입니다.

이제 $F(x)$와 $f(x)$의 관계에 주목해봅시다. $F(x)$가 최솟값을 가지려면, 그것의 도함수인 $f(x)$는 도함수 값이 0보다 작았다가 0보다 커지는 부분이 존재해야 합니다.
(엄밀히 얘기해서 $f(x)$가 쭉 0이 되어 $F(x)$가 상수함수가 되는 것까지 고려하면 옳은 얘기는 아닙니다. 다만 현재 주어진 함수는 $f(x)$가 쭉 0인 상수함수가 되는 것은 불가능하죠?)

만약 $k=3$이라면 위에서 언급한 경우는 존재할 수 없습니다. 연속성에 의해 $f(x)$가 항상 양수거나 음수가 되어버리죠. 따라서, $k=1$이어야 하고 $f(x)$는 $x=2$에서 뒤집혀져 부호가 바뀌어야 합니다.

결론적으로 $f(x)$는 다음과 같은 빨간색 개형입니다.
(다영님 손풀이 해설참고)



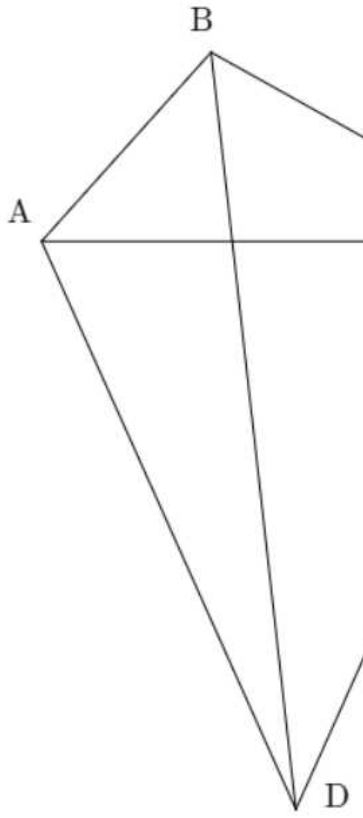

따라서 마지막 계산 처리를 해준다면 $F(-2)=\frac{10}{3}, F(5)=9$로 결정됩니다.

**12.** 그림과 같이

$$\overline{AB}=3,\ \overline{BC}=\sqrt{21},\ \overline{AC}=6$$

인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{AD}=\overline{CD}$, $\overline{BD}=9$가 되도록 점 D를 정할 때, 삼각형 ABD의 외접원의 넓이는? (단, 선분 AC와 BD는 서로 만난다.) [4점]

① $\frac{243}{10}\pi$ ② $\frac{126}{5}\pi$ ③ $\frac{261}{10}\pi$ ④ $27\pi$ ⑤ $\frac{279}{10}\pi$




출제 의도) 삼각형 ABC는 저희가 완전히 파악한 상태입니다. 세 변의 길이가 주어졌으니 말이죠. 따라서 저희는 ABC와 관련된 모든 수치들을 계산할 수 있습니다. (각 계산, 넓이 계산 등..)

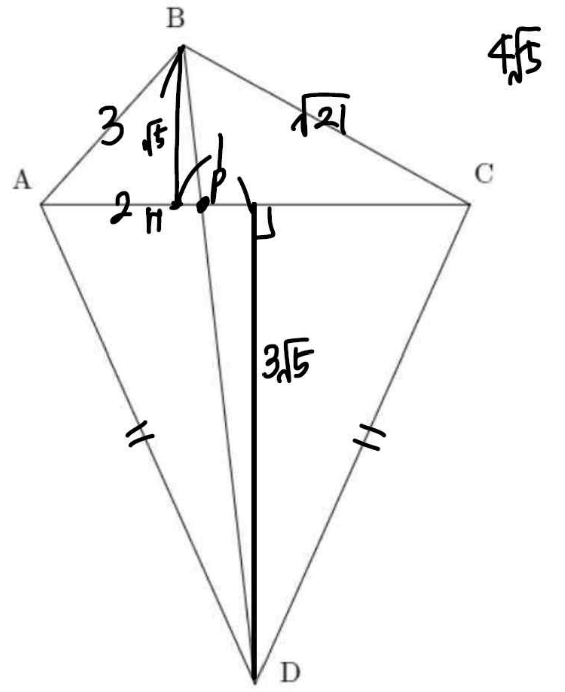
그리고 이등변삼각형이 주어졌으니 수선의 발을 내리겠다는 발상도 자연스러워야 합니다.

답: 1번

풀이) 일단 ABC의 세 변의 길이를 알기에, 각 BAC의 각을 구할 수 있습니다. 코사인 법칙에 의해

$\cos(\angle BAC)=\frac{3^2+6^2-21}{2\times3\times6}=\frac{2}{3}$입니다. 자연스레 사인값은 $\frac{\sqrt{5}}{3}$입니다.

지금 삼각형 ACD는 $\overline{AD}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이기에, 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발은 선분 AC를 이등분합니다.
선분 BD의 길이 조건을 활용하기 위해, 점 B에서도 선분 AC에 수선의 발을 내리면 다음과 같습니다.




그렇게 되면 두 수선의 발의 거리는 1이기에, 선분 BD의 길이가 9가 되려면 $\sqrt{9^2-1^2}=4\sqrt{5}$만큼이 BD의 세로 방향의 길이어야 합니다. 지금 BH의 길이는 사인값으로부터 $\sqrt{5}$임을 알고 있기에, 이등변삼각형의 높이는 $4\sqrt{5}-\sqrt{5}=3\sqrt{5}$가 되어야 합니다. 이제 나머지는 계산이네요? 선분 AD의 길이는 $3\sqrt{6}$이고 BD의 길이는 9이기에, $\cos(\angle BAD)=\frac{3^2+(3\sqrt{6})^2-9^2}{2\times3\times3\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$입니다.

$\sin(\angle BAD)$의 값은 $\frac{\sqrt{30}}{6}$이기에, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 $R$이라 하면 사인법칙에 의해 $\frac{9}{\frac{\sqrt{30}}{6}}=2R$이고,

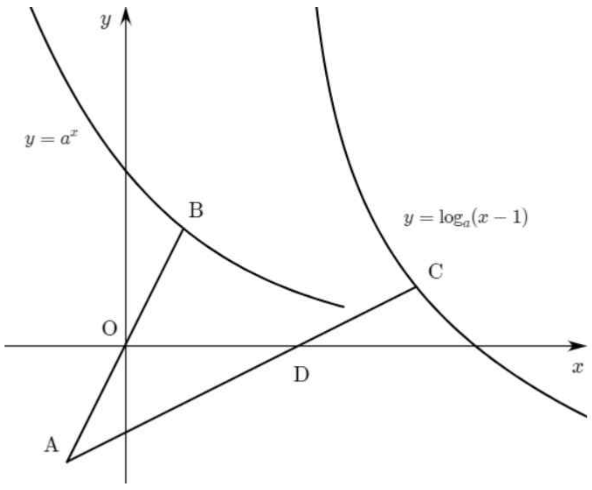
$R=\frac{27}{\sqrt{30}}$입니다.

**13.** 상수 $a(0<a<1)$에 대하여 그림과 같이 제 3사분면 위에 있는 한 점을 A, 곡선 $y=a^x$위에 있고 제 1사분면에 있는 한 점을 B, 곡선 $y=\log_a(x-1)$위에 있고 제 1사분면에 있는 한 점을 C라 하자. 선분 AB의 중점은 O이고, 선분 AC가 $x$축과 만나는 교점을 D라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) 점 D는 곡선 $y=\log_a(x-1)$의 점근선 위에 있고, 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기의 곱은 1이다. |
| (나) 직선 BC의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이다. |

사각형 OBCD의 넓이를 $S$라 할 때, $\frac{S}{a}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3



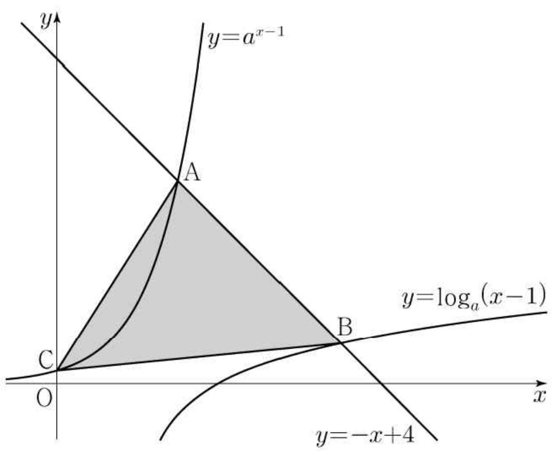

출제 의도) 지수로그 함수의 평행이동과 대칭이동 관계를 활용한 문항입니다. 지난 2022학년도 9월 모의평가 21번에서 예고된 형태입니다.

유사 문항) 2022학년도 9월 모의평가 21번

**21.** $a>1$인 실수 $a$에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\quad y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 $y$축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 $S$이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]




답: 2번

풀이) 일단 점 D의 좌표는 $(1,0)$임을 쉽게 알 수 있습니다.
그런데 점 C와 D, 곡선 $y=\log_a(x-1)$을 $x$축 방향으로 평행이동 했다고 해봅시다. 그러면 점 D는 원점으로 옮겨지고, 곡선 $y=\log_a(x-1)$는 $\log_a x$가 됩니다. 점 C가 옮겨진 점을 C′이라 하고, 점 B와 C′의 관계에 주목해봅시다.

OB와 OC′의 기울기의 곱은 1이고 $y=a^x$와 $y=\log_a x$의 관계는 $y=x$대칭이기에, 점 B의 좌표를 $(t,a^t)$로 잡으면 점 C′의 좌표는 $(a^t,t)$가 됨을 알 수 있죠. 따라서 C의 좌표는 $(a^t+1,t)$가 됩니다.

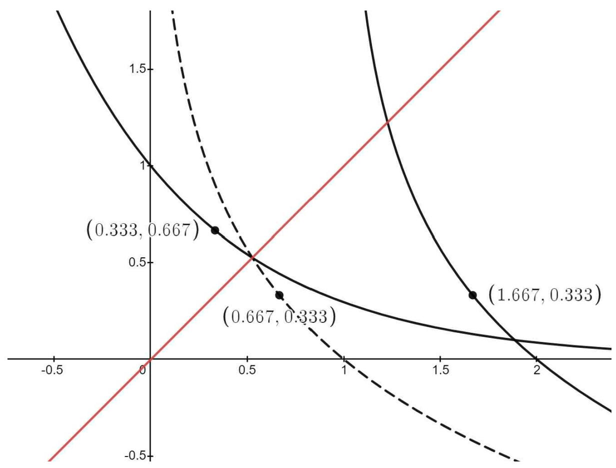
이제 선분 AB의 중점이 O라는 사실로부터 $A(-t,-a^t)$임을 알 수 있고,

1) BC의 기울기가 $-\frac{1}{4}$로부터 $\frac{t-a^t}{a^t+1-t}=-\frac{1}{4}$

2) 세 점 A, D, C가 한 직선 위에 있으므로 $\frac{a^t}{1+t}=\frac{t}{a^t}$

이 두 조건을 연립하면 $t=\frac{1}{3}, a^t=\frac{2}{3}$가 나오고, 점 B, C의 좌표가 결정이 됩니다.

$a$의 값과 $S$의 값을 구하는 것은 단순 계산이겠네요?



**14.** 함수 $f(x)=x^3-3x$와 실수 $t$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} x+t & (f(x)>t) \\ x^3-2 & (f(x)\le t) \end{cases}$$

으로 정의하자. 함수 $g(x)$가 $x=k$에서 불연속인 모든 실수 $k$의 개수를 $h(t)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $h(0)+h(4)=4$이다.
ㄴ. $h(t)=2$이도록 하는 실수 $t$가 존재한다.
ㄷ. 함수 $(x-p)|f(x+h(x))|$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 $p$가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

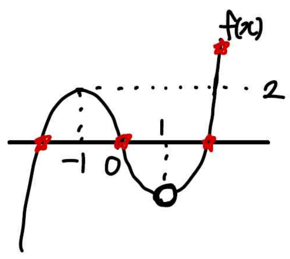
출제 의도) $f(x)$는 고정되어 있고, $t$의 값에 따라 $g(x)$의 불연속점의 개수가 달라지는 형태입니다. 위 문제에서의 핵심은, 고정되어 있는 함수 $f(x)$를 활용하여 특이한 양상이 발생하는 $x$값을 찾아내는 것입니다.

답: 3번

풀이) 불연속이 발생하는 경우는 $f(x)=t$부분에서 $x+t=x^3-2$를 만족시키지 않게 되는 경우입니다.
ㄱ. $t=0$인 경우, $g(x)$가 불연속이 되는 지점은 $x^3-3x=0$이 되는 지점들이고, 이 중 $x+t=x^3-2$를 만족시키는 녀석은 없기에 $h(0)=3$입니다. 마찬가지의 논리를 적용하면 $h(4)=1$임을 알 수 있습니다. (참)

ㄴ. 일단 $f(x)=t$가 되어 불연속이 의심되는 지점들 중에서, $x+t=x^3-2$가 되도록 하는 $x$의 값을 찾아봅시다.
$x^3-3x=t$로부터 $x+x^3-3x=x^3-2$이고, $x=1$인 경우에만 $f(x)=t$가 되어 불연속 의심지점이 되어도 $g(x)$가 해당 지점에서 연속이 될 수 있습니다.

그런데 사실 $x=1$은 $f(x)$가 극소가 되도록 하는 지점입니다.
(그림 참고, 극솟값은 $-2$)

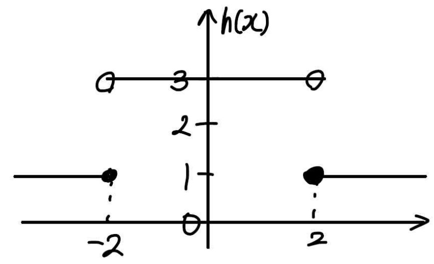



$t<-2$이거나 $t>2$인 경우 $g(x)$의 불연속점은 무조건 하나이기에 $h(t)=1$입니다.
$-2<t<2$인 경우, $x=1$인 경우가 존재하지 않기에 무조건 $h(t)=3$입니다.

$t=2$인 경우, $f(x)>t$와 $f(x)\le t$가 바뀌는 경계는 오직 $x=2$뿐이므로 $h(t)=1$입니다.

$t=-2$인 경우, $f(x)>t$와 $f(x)\le t$가 바뀌는 경계는 $x=-2, x=1$로 2개이지만, 앞서 언급한대로 $x=1$에서는 두 함수 $x+t, x^3-2$가 일치하기에 연속이 됩니다.
따라서 $h(t)=1$입니다.
따라서 ㄴ은 거짓입니다. (거짓)

ㄷ. 위에서 파악한 $h(x)$의 개형은 다음과 같습니다.




$x=-2$주변에서 $f(x+h(x))$는 $f(-1)$에서 $f(1)$로 변합니다.
따라서 절댓값을 씌운 함수는 $x=-2$에서 연속입니다. 비슷한 논리로 $x=2$에서 함수 $|f(x+h(x))|$는 불연속임을 알 수 있고, 따라서 $p=2$로 설정한다면 주어진 함수가 연속이 되도록 할 수 있겠네요 (참)

**15.** 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 모든 자연수 $n$에 대하여 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}_n$의 좌표는 $(|a_n|, a_{n+1})$일 때, 어떤 자연수 $m$이 다음 조건을 만족시킨다.

> 사각형 $\mathrm{A}_m\mathrm{A}_{m+3}\mathrm{A}_{2m+3}\mathrm{A}_{2m+6}$은 중심이 $\left(4,\ \dfrac{1}{2}\right)$인 한 원에 내접한다.

$\dfrac{a_{18}}{m}$의 값은? [4점]

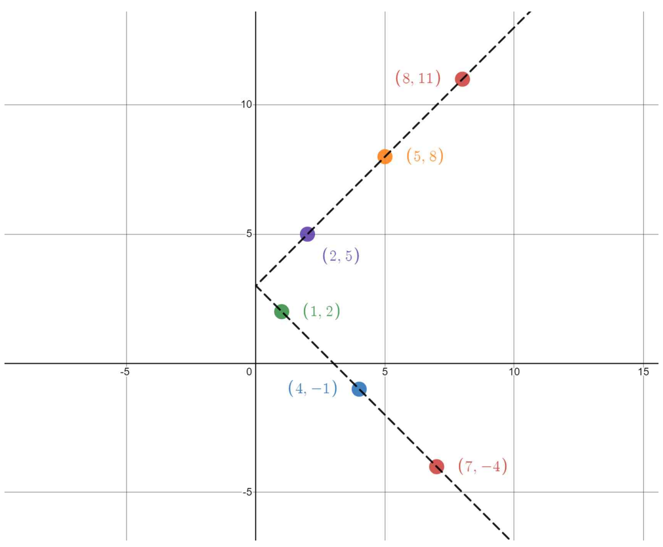
① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

출제 의도) 등차수열의 그래프적인 시각화를 다루는 문제입니다. 다만 기존 문제와는 다른 점은... 두 가지 축을 동시에 활용한다는 점이겠네요. 이번 모의고사의 하이라이트 문항입니다.

답: 3번

풀이) 이 문항의 경우, $a_n$에 대한 정보가 처음에 아예 존재하지 않기에 대략적으로 $a_n$을 임의로 설정해서 규칙을 파악해보는 것도 나쁘지 않을 것 같습니다. 그냥 아무 예시나 잡아볼게요.

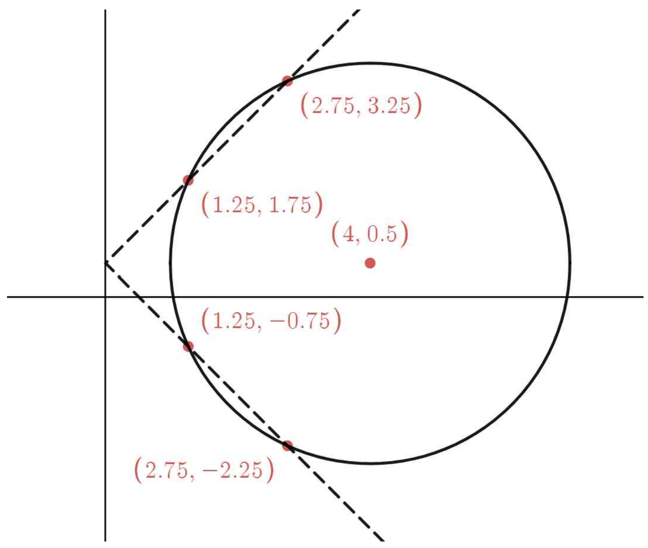
$a_n = 3n - 10$이라 해봅시다. 그러면 점 $\mathrm{A}_n$의 좌표들은 대략 다음 그림처럼 생성이 됩니다.




한 마디로, 초반에는 기울기가 $-1$인 직선 위에서 움직이다가, $y$절편이 3이 될 때를 기준으로부터는 기울기가 1인 직선 위를 움직이게 됩니다. 이 3이라는 값은 사실 주어진 수열의 공차인데, 이는 우연의 일치가 아닙니다. 논리적으로 설명하자면, 주어진 수열의 공차를 $d$라 할 때, 저희는 $\mathrm{A}_n$의 좌표를 $(|a_n|, a_n + d)$로 둘 수 있습니다. $x = |a_n|, y = a_n + d$라 한다면 $x = |y - d|$가 성립하고, 점 $\mathrm{A}_n$들은 위의 곡선에서 움직임을 알 수 있죠. (저 함수의 그래프를 그리는 법은 고1 수학입니다.)

이제 본격적으로 주어진 조건들을 분석해보죠. 만약 네 점 $\mathrm{A}_m, \mathrm{A}_{m+3}, \mathrm{A}_{2m+3}, \mathrm{A}_{2m+6}$중 세 점이 같은 직선 위에 있다고 해봅시다. 그러면 그 세 점을 포함하는 원이 만들어지지 않죠? 따라서 $\mathrm{A}_m, \mathrm{A}_{m+3}$이 한 직선 위에, $\mathrm{A}_{2m+3}, \mathrm{A}_{2m+6}$이 다른 직선 위에 있어야 함을 알 수 있죠. 그런데 지금 $\mathrm{A}_m, \mathrm{A}_{m+3}$과 $\mathrm{A}_{2m+3}, \mathrm{A}_{2m+6}$ 모두 각각의 항 순서 차이가 3이기에, 선분 $\mathrm{A}_m\mathrm{A}_{m+3}$의 길이와 선분 $\mathrm{A}_{2m+3}\mathrm{A}_{2m+6}$의 길이는 같습니다.

또한, 선분 $\mathrm{A}_m\mathrm{A}_{m+3}$의 수직이등분선과 선분 $\mathrm{A}_{2m+3}\mathrm{A}_{2m+6}$의 수직이등분선의 교점이 원의 중심인데, $\mathrm{A}_m\mathrm{A}_{m+3}$와 $\mathrm{A}_{2m+3}\mathrm{A}_{2m+6}$의 길이가 같으므로, $\mathrm{A}_m\mathrm{A}_{m+3}$와 $\mathrm{A}_{2m+3}\mathrm{A}_{2m+6}$은 원의 중심으로부터 같은 거리만큼 떨어져있어야 하며, 그림으로 그리면 다음과 같습니다.




따라서 원의 중심과 $x = |y - d|$의 꼭짓점인 $(0, d)$는 $y$좌표가 같아야 하므로 $d = \dfrac{1}{2}$이고, $|a_{m+3}| = |a_{2m+3}|$으로부터 $a_{m+3} + a_{2m+3} = 0$임을 알 수 있습니다. 또한, $\mathrm{A}_m\mathrm{A}_{m+3}$의 중점인 $\left(-\dfrac{a_m + a_{m+3}}{2}, \dfrac{a_{m+1} + a_{m+4}}{2}\right)$와 $\left(4, \dfrac{1}{2}\right)$를 이은 직선의 기울기는 1이므로 $4 + \dfrac{a_m + a_{m+3}}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{a_{m+1} + a_{m+4}}{2}$입니다. 이 세 조건을 연립하면 $m = 5$, $a_n = \dfrac{1}{2}\left(n - \dfrac{21}{2}\right)$임을 알 수 있고, $a_{18} = \dfrac{15}{4}$이므로 답은 3번입니다.

**20.** 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$와 양의 상수 $k$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$f(x)g(x)=(x+4)(x-k)^2$$

이고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\geq g(x)$이다.
>
> (나) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+g(x)}{x^n}=\frac{1}{3}$이도록 하는 자연수 $n$이 존재한다.

$k+f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도) 두 다항함수의 곱이 주어졌기에, 상수와 삼차함수, 일차와 이차함수의 조합이 가능함을 예상할 수 있고, 각 경우에서 (가) 조건을 여러 번 사용하여 가능한 경우를 배제해나가는 것이 중요합니다.

유사 문항) 2020학년도 6월 모의평가 나형 20번

**20.** 다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

> $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$인 자연수 $n$이 존재한다.

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

2018학년도 9월 모의평가 29번

**29.** 두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$

을 만족시킨다. $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가질 때, $f'(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

답: 17

풀이) 만약 $f(x)$와 $g(x)$ 중 어느 하나가 삼차함수라면,
삼차함수는 실수 전체의 집합이 치역이기에 $f(x)\geq g(x)$을
만족시킬 수 없습니다.

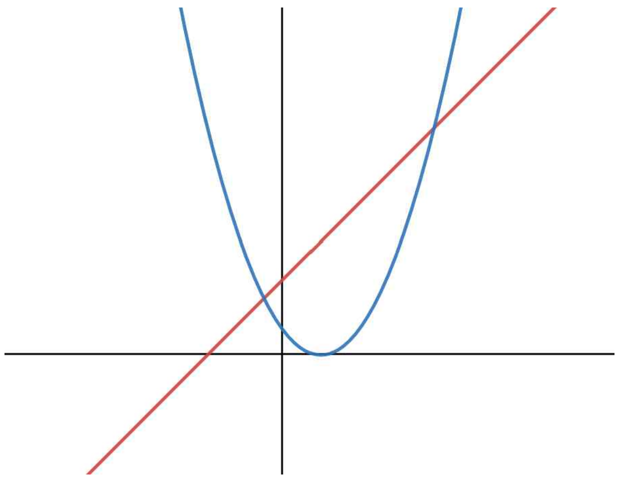
따라서 $f(x)$와 $g(x)$중 어느 하나는 이차함수, 어느 하나는 일차함수입니다.

그러면 (나) 조건에 의해, $n=2$인 경우 극한값이 $\frac{1}{3}$이 되므로, $f(x)$가 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 이차함수, $g(x)$가 최고차항의 계수가 3인 일차함수가 됩니다.

그럼 가능한 조합이 다음과 같습니다.

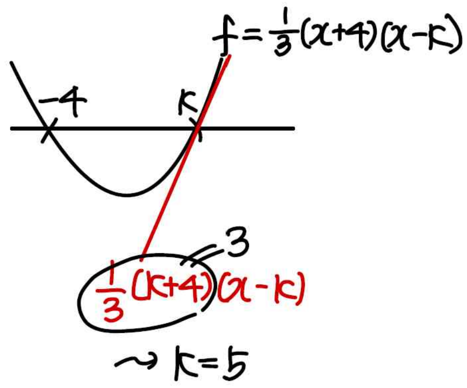
1) $f(x)=\frac{1}{3}(x-k)^2$, $g(x)=3(x+4)$인 경우

$k$가 양수이므로 $f(x)\geq g(x)$을 만족시키지 못합니다.
(대략적으로 다음 개형과 같습니다.)



2) $f(x)=\frac{1}{3}(x+4)(x-k)$, $g(x)=3(x-k)$인 경우

$x=k$에서 $f(k)=g(k)$이므로 $f'(k)=g'(k)$이어야 하고, 따라서 $\frac{k+4}{3}=3$입니다. 개형은 다음과 같습니다.




따라서 $k=5$이고, $f(8)=12$입니다.

**21.** 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n+n & (a_n \le 10) \\ a_n-a_3 & (a_n>10) \end{cases}$$

이다. $a_2>0$이고 $a_5=7$일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도) 귀납적으로 정의된 수열의 경우, 학생분들이 너무 겁을 먹고 시작하는 경우가 많은 것 같습니다. 위 문항의 경우 그냥 시작점 잘 찾고 주어진 조건식에 따라 경우 나누고, 역추적 해주고 하면 끝입니다. 더 할 말이 없어용

답: 98

풀이) $a_3$이 수열 점화식에 주어져 있으니, $a_3$을 기준으로 잡읍시다. 만약 $n=3$일 때 $a_3>10$이라면, $a_4=0$이고 $a_5=4$가 나옵니다. 따라서

$a_3 \le 10$, $a_4=2a_3+3$

가 확정됩니다. 이제 $n=4$를 기준으로 경우를 나누면

1) $a_4 \le 10$이어서 $a_5=2a_4+4$인 경우
이 경우 $a_4=\frac{3}{2}$이고 $a_3=-\frac{3}{4}$입니다.

만약 $a_2>10$이라면 $a_3=a_2-a_3$이므로 $a_2=-\frac{3}{2}$인데 이는 $a_2>0$에 모순입니다.

만약 $a_2 \le 10$이라면 $a_3=2a_2+2$이므로 $a_2=-\frac{11}{8}$인데 이는 $a_2>0$에 모순입니다.

2) $a_4>10$이어서 $a_5=a_4-a_3$인 경우
이 경우 $a_5=a_4-a_3=a_3+3=7$이므로 $a_3=4$, $a_4=11$입니다.

만약 $a_2>10$이라면 $a_3=a_2-a_3$에서 $a_2=8$이 되나, 이는 $a_2>10$에 모순입니다.

만약 $a_2 \le 10$이라면 $a_3=2a_2+2$로부터 $a_2=1$입니다. 이를 기반으로 $a_1=0$ 또한 간단하게 계산됩니다.

따라서, 나머지 모든 10개의 항들을 적어보며 다음과 같습니다.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
| 0 | 1 | 4 | 11 | 7 |
| $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ |
| 19 | 15 | 11 | 7 | 23 |

따라서 $\sum_{n=1}^{10} a_n=98$입니다.

**22.** 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여, 연속함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ f(x-3) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 $a$의 값의 곱은 $\frac{5}{4}$이다. |

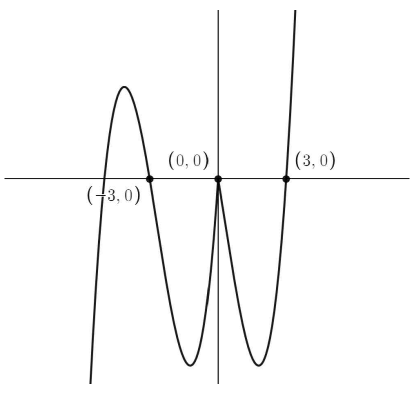
$g(2)<0$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도) 문제의 조건에서 연속성에 의해 $f(0)=f(-3)$이니... 삼차함수 $f(x)$에 대한 3가지 조건이 초반부터 주어진 것임을 확인 가능합니다. 다만 6평 22번처럼, 22번 역할은 충분히 해줄 문항입니다.

답: 45

풀이) 함수 $g(x)$의 연속성에 의해 $f(-3)=f(0)$이므로,
$f(x)=x(x+3)(x-p)$
임을 알 수 있고, $g(2)=f(-1)<0$으로부터 $-1-p>0$,
즉 $p<-1$임을 알 수 있습니다.

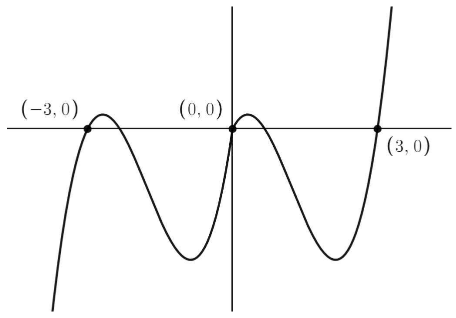
함수 $f(x-3)$은 $f(x)$를 $x$축 방향으로 3만큼 평행이동한 함수이므로, $p=-5$인 경우를 활용하여 대략적인 그래프를 관찰하면 다음과 같습니다.




즉, $-3<x<0$만큼의 함수가 평행이동하여 $0<x<3$에서도 똑같이 그려집니다.

만약 $p\leq -3$이라면, $f'(-3)\leq 0, f'(0)>0$이므로, 위의 개형처럼 $x=0$에서 극값을 갖게 됩니다. (미분불가능한 첨점) 이 경우, 문제의 조건에서의 모든 $a$의 값의 곱이 0이 되므로 모순이죠.

따라서 $-3<p<-1$임을 알 수 있고, 이 경우의 개형은 대략 다음과 같습니다. $f'(-3)>0, f'(0)>0$이므로 $x=0$에서 극값을 갖지 않습니다.




이 경우, 삼차함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되도록 하는 지점은 모두 $-3$보다 크고 0보다 작은 영역에 존재합니다. 이 두 지점의 $x$좌표를 각각 $\alpha, \beta$라 하면 $\alpha, \beta$는 $f(x)$를 미분한 $f'(x)=3x^2+2(3-p)x-3p=0$의 서로 다른 두 근이며, $x=\alpha+3$과 $x=\beta+3$에서도 함수 $g(x)$는 극대 또는 극소가 됩니다.

따라서, $\alpha\beta(\alpha+3)(\beta+3)=\frac{5}{4}$이며,

$f'(x)=3x^2+2(3-p)x-3p=0$에 근과 계수의 관계를 적용하면

$\alpha+\beta=\frac{2(p-3)}{3}$, $\alpha\beta=-p$이므로

$(-p)\times(-p+2p-6+9)=\frac{5}{4}$입니다. 이를 정리하면

$p^2+3p+\frac{5}{4}=0$이므로 $p=-\frac{1}{2}$ or $-\frac{5}{2}$인데 $p<-1$이므로

$p=-\frac{5}{2}$가 가능합니다.

따라서 $f(2)$의 값은 45입니다.

**28.** 수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위와 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

| |
|---|
| 주사위와 동전을 동시에 던져서<br>동전의 앞면이 나오면<br>주사위에 나온 숫자만큼 점 P를 양의 방향으로 이동시키고,<br>동전의 뒷면이 나오면<br>주사위에 나온 숫자만큼 점 P를 음의 방향으로 이동시킨다. |

위의 시행을 5번 반복할 때, $n(1 \le n \le 5)$번째 시행 후 점 P의 위치를 $x_n$이라 하자. $x_2 \times x_3 = 0$이고 $x_4 \times x_5 = 0$일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{96}$ ② $\frac{1}{80}$ ③ $\frac{1}{64}$ ④ $\frac{1}{48}$ ⑤ $\frac{1}{32}$

출제 의도) $x_n$의 값에 따라 가능한 케이스들을 나누고, 이후 앞에서 활용했던 확률값을 추후 계산에도 활용 가능한지가 중요했던 문제입니다. 매우 어려운 문항입니다.

유사 문항) 2011학년도 9월 모의평가 나형 24번

**24. 주머니 안에 스티커가 1개, 2개, 3개 붙어 있는 카드가 각각 1장씩 들어 있다. 주머니에서 임의로 카드 1장을 꺼내어 스티커 1개를 더 붙인 후 다시 주머니에 넣는 시행을 반복한다. 주머니 안의 각 카드에 붙어 있는 스티커의 개수를 3으로 나눈 나머지가 모두 같아지는 사건을 $A$라 하자. 시행을 6번 하였을 때, 1회부터 5회까지는 사건 $A$가 일어나지 않고, 6회에서 사건 $A$가 일어날 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]**

답: 3번

풀이) 주어진 조건으로부터 가능한 점 P의 이동은, 점 P의 위치에 $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6$을 더하는 것이며 각각의 확률은 $\frac{1}{12}$로 동일합니다.

$x_2 \times x_3 = 0$이고 $x_4 \times x_5 = 0$이려면 다음과 같은 3가지 경우가 가능합니다.

1) $x_2 = 0, x_4 = 0$ 2) $x_3 = 0, x_5 = 0$ 3) $x_2 = 0, x_5 = 0$

1) $x_2 = 0, x_4 = 0$인 경우

$\mathrm{P}(x_2 = 0)$의 값은 두 번 째 시행에서 나온 값이 첫 번째 시행에서 나온 수의 반대가 되어야 하므로 $1 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$입니다.

각 시행은 서로 독립이므로, $x_2 = 0$임이 확정된 상태에서 $x_4 = 0$일 확률은 $\mathrm{P}(x_2 = 0)$와 동일합니다.

즉, $\mathrm{P}(x_4 = 0 | x_2 = 0) = \mathrm{P}(x_2 = 0)$이며

따라서

$\mathrm{P}(x_2 = 0, x_4 = 0) = \mathrm{P}(x_2 = 0) \times \mathrm{P}(x_4 = 0 | x_2 = 0) = \frac{1}{144}$입니다.

2) $x_3 = 0, x_5 = 0$인 경우

$\mathrm{P}(x_3 = 0)$을 구해봅시다. 이는 일단 주사위에서 나온 세 수 중에서 두 수의 합이 다른 하나의 수와 같아야 합니다. 즉, $(6,5,1)$, $(6,4,2)$, $(6,3,3)$, $(5,4,1)$, $(5,3,2)$, $(4,3,1)$, $(4,2,2)$, $(3,2,1)$, $(2,1,1)$이 가능하며, 순서가 바뀌는 것을 고려하여 총 $6^3 = 216$가지의 순서쌍 중 45가지의 순서가 가능합니다. 또한, 가장 큰 숫자의 부호와 나머지 두 수의 부호가 반대여야 하므로 $\frac{45}{216} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{96}$입니다.

$x_3 = 0$인 상태에서 $x_5 = 0$인 확률은 $\mathrm{P}(x_2 = 0)$와 동일하므로,

$\mathrm{P}(x_3 = 0, x_5 = 0) = \frac{5}{96} \times \frac{1}{12}$

3) $x_2 = 0, x_5 = 0$인 경우

이는 $\mathrm{P}(x_2 = 0) \times \mathrm{P}(x_5 = 0 | x_2 = 0)$인 확률과 같고,

$\mathrm{P}(x_5 = 0 | x_2 = 0) = \mathrm{P}(x_3 = 0)$이므로

2)의 경우와 마찬가지로 $\frac{5}{96} \times \frac{1}{12}$입니다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{144} + \frac{5}{96} \times \frac{1}{12} \times 2$에서

$\frac{9}{4} \times \frac{1}{144} = \frac{1}{64}$입니다.

**29.** 평균이 $m(m>0)$이고 표준편차가 8인 정규분포를 따르는 확률변수 $X$와 평균이 0이고 표준편차가 $\sigma$인 정규분포를 따르는 확률변수 $Y$가 있다. 실수 $t$에 대하여 두 함수 $f(t)$, $g(t)$를

$$f(t)=\mathrm{P}(t \le X \le t+4),\ g(t)=\mathrm{P}(t \le Y \le t+4)$$

로 정의할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(t)$의 최댓값은 $2g(0)$이다.

(나) $f(-3)=g(4)+g(-12)$

오른쪽의 표준정규분포표를 이용하여 구한 $f(7)+g(-4)$의 값을 $p$라 하자. $1000p$의 값을 구하시오. [4점]

| $z$ | $\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$ |
|---|---|
| 0.25 | 0.099 |
| 0.50 | 0.196 |
| 0.75 | 0.273 |
| 1.00 | 0.341 |

출제 의도) 전형적인 정규분포 문제입니다. 의미있는 추론 요소는 $m$값의 추론 뿐이고, 나머지 부분에선 단순 계산으로 흘러갑니다.

답: 244

풀이) (가) 조건에서 $f(t)$의 최댓값은 $t=m-2$인 경우인 $\mathrm{P}(m-2 \le X \le m+2)=\mathrm{P}\left(-\frac{1}{4} \le Z \le \frac{1}{4}\right)$이고, 이 값이 $2\mathrm{P}(0 \le Y \le 4)=2\mathrm{P}\left(0 \le Y \le \frac{4}{\sigma}\right)$이므로 $\frac{4}{\sigma}=\frac{1}{4}$이다. 따라서 $\sigma=16$이다.

(나) 조건에서 $g(4)+g(-12)=\mathrm{P}(4 \le Y \le 8)+\mathrm{P}(-12 \le Y \le -8)$
$=\mathrm{P}(4 \le Y \le 8)+\mathrm{P}(8 \le Y \le 12)=\mathrm{P}\left(\frac{1}{4} \le Z \le \frac{3}{4}\right)$이다.

따라서 $f(-3)=\mathrm{P}(-3 \le X \le 1)=$
$\mathrm{P}\left(\frac{-3-m}{8} \le Z \le \frac{1-m}{8}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{1}{4} \le Z \le \frac{3}{4}\right)$이어야 한다.

즉, $\frac{1-m}{8}=-\frac{1}{4}$ or $\frac{3}{4}$이며, 이를 만족시키는 양수 $m$은 3이다.

$f(7)=\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \le Z \le 1\right)$이고 $g(-4)=\mathrm{P}\left(-\frac{1}{4} \le Z \le 0\right)$이므로,
$f(7)+g(-4)=0.341-0.196+0.99=0.244$이다.

따라서 $1000p=244$이다.

**30.** 다음 조건을 만족시키는 정수 $a$, $b$, $c$, $d$, $e$의 순서쌍 $(a, b, c, d, e)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c+|d|+|e|=1$

(나) $a$, $b$, $c$는 모두 $-1$이상의 정수이다.

출제 의도) 정수들을 활용한 중복조합 유형은 너무나도 전형적인 유형입니다. 이 문항의 경우 절댓값과 $-1$이상이라는 조건을 어떻게 처리하냐가 관건입니다.

답: 155

풀이) $A=a+1$, $B=b+1$, $C=c+1$이라 하면 $A$, $B$, $C$는 음이 아닌 정수이고 $A+B+C+|d|+|e|=4$이다.

1) $A+B+C=4$, $|d|+|e|=0$인 경우
이 경우 $d, e$는 모두 0이고, $A+B+C=4$인 경우는 ${}_3\mathrm{H}_4=15$이므로 가능한 순서쌍의 개수는 15이다.

2) $A+B+C=3$, $|d|+|e|=1$인 경우
이 경우 $(d, e)=(0,1), (1,0), (-1,0), (0,-1)$의 4개이며, $A+B+C=3$인 경우는 ${}_3\mathrm{H}_3=10$이므로 가능한 순서쌍의 개수는 40이다.

3) $A+B+C=2$, $|d|+|e|=2$인 경우
이 경우 $(d, e)$로 가능한 경우는 8개이며, $A+B+C=2$인 경우는 ${}_3\mathrm{H}_2=6$이므로 가능한 순서쌍의 개수는 48이다.

4) $A+B+C=1$, $|d|+|e|=3$인 경우
이 경우 $(d, e)$로 가능한 경우는 12개이며, $A+B+C=1$인 경우는 ${}_3\mathrm{H}_1=3$이므로 가능한 순서쌍의 개수는 36이다.

5) $A+B+C=0$, $|d|+|e|=4$인 경우
이 경우 $(d, e)$로 가능한 경우는 16개이며, $A+B+C=0$인 경우는 1이므로 가능한 순서쌍의 개수는 16이다.

이상 가능한 모든 경우의 수는 155입니다.

**28.** 함수 $x^3-3x^2+4x+8$의 역함수를 $f(x)$라 하자. 구간 $(0, \infty)$에서 함수

$$g(x)=\sin\left(\frac{25}{4}\pi f(x)-\frac{25}{16}\pi x\right)$$

가 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 $x$의 값을 작은 수부터 크기 순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$이라 하자. $|g(\alpha_n)|<1$인 자연수 $n$에 대하여 $n+\alpha_n$의 값은? [4점]

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

출제 의도) 추론 요소는 많이 없습니다만, 확정된 역함수를 통해 삼각함수 내부에 있는 함수의 개형을 정확히 그리셔야 합니다.

유사 문항) 2019학년도 수능 30번

**30.** 최고차항의 계수가 $6\pi$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\dfrac{1}{2+\sin(f(x))}$이 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소이고, $\alpha \geq 0$인 모든 $\alpha$를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$, $\alpha_5$, $\cdots$ 라 할 때, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

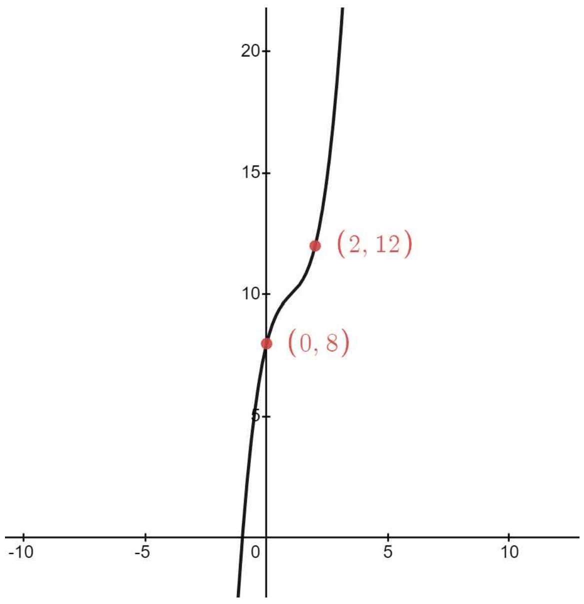
| |
|---|
| (가) $\alpha_1=0$이고 $g(\alpha_1)=\dfrac{2}{5}$이다. |
| (나) $\dfrac{1}{g(\alpha_5)}=\dfrac{1}{g(\alpha_2)}+\dfrac{1}{2}$ |

$g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a\pi$라 할 때, $a^2$의 값을 구하시오.

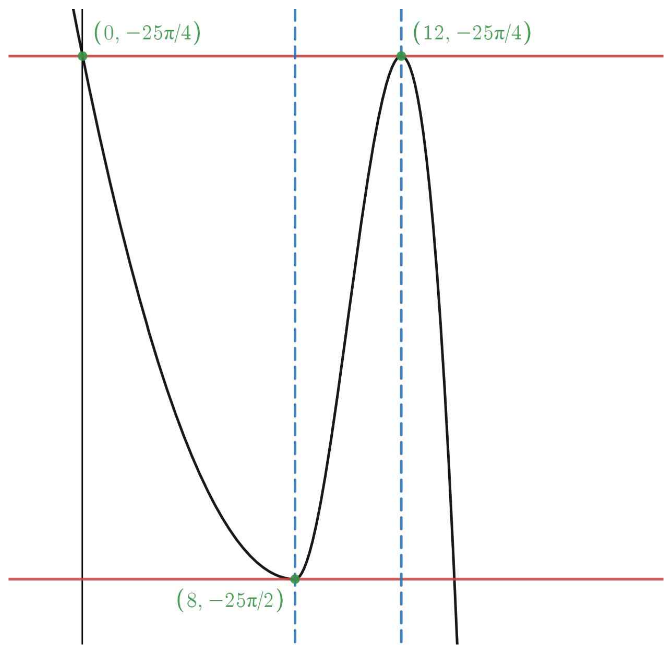
(단, $0<f(0)<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]

답: 3번

풀이) 삼차함수 $x^3-3x^2+4x+8$의 개형은 다음과 같습니다.




풀이) $\dfrac{25}{4}\pi f(x)-\dfrac{25}{16}\pi x=\dfrac{25}{4}\pi\left(f(x)-\dfrac{x}{4}\right)$는 $f'(x)=\dfrac{1}{4}$이도록 하는 $x$에서 극대 또는 극소를 가지며, 이는 $x^3-3x^2+4x+8$의 미분계수가 4가 되도록 하는 $x$의 값에 대응하는 함숫값입니다. $x=0, x=3$을 $x^3-3x^2+4x+8$에 대입하면 각각 8, 12이 나오므로, $f'(x)=\dfrac{1}{4}$가 되도록 하는 $x$의 값은 8, 12입니다. 또한 $f(0)=-1$이므로 이를 기반으로 함수 $\dfrac{25}{4}\pi f(x)-\dfrac{25}{16}\pi x$의 개형을 그리면 다음과 같습니다.




sin함수는 $x=\dfrac{2k+1}{2}\pi$ ($k$는 정수)에서 극대 또는 극소가 되므로, 위의 함수에서 $y=\dfrac{2k+1}{2}\pi$이 되도록 하는 $x$에서 $g(x)$는 $|g(x)|=1$인 극값을 갖습니다. 따라서 $|g(\alpha_n)|<1$인 극값은 오직 $\alpha_n=12$이도록 하는 $n$값 뿐이고, $-\dfrac{25}{2}\pi \leq y \leq -\dfrac{25}{4}\pi$ 사이에서 $y=\dfrac{2k+1}{2}\pi$이 되는 경우는 $y=-\dfrac{25}{2}\pi$을 포함하여 총 7개이므로, $\alpha_7=8$, $\alpha_{14}=12$입니다. 즉, $n+\alpha_n=14+12=26$입니다.

**29.** 두 상수 $a$, $b$에 대하여 $t=0$일 때 좌표평면 위의 한 점 $\mathrm{A}(8, a)$에서 출발하여 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도는 $\left(1-\dfrac{b}{(t+1)^2}, 2t-6\right)$이다. 출발한 후 점 P는 원점을 두 번 지날 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도) 난이도는 쉽지만 29번으로 자주 등장하지 않던 유형이라 당황하셨을 수도 있습니다.

유사 문항) 2024 수능특강 미적분 23011-0100

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$ $(0<t<2)$에서의 위치 $(x, y)$가

$$x=\ln(2-t),\ y=(t+a)^{\frac{3}{2}}$$

이고, 점 P는 원점 O를 지난다. 점 P가 점 O를 지나는 순간의 점 P의 속력은? (단, $a$는 상수이다.)

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

답: 23

풀이) 주어진 속도와 $t=0$에서의 위치를 이용하여, 주어진 점의 시각 $t$에서의 위치를 알 수 있습니다.

$$x=t+\frac{b}{t+1}-b+8,\ y=t^2-6t+a$$

$x=0$, $y=0$을 동시에 만족시키는 양의 실수 $t$의 개수가 2이므로, $t+\dfrac{b}{t+1}-b+8=0 \Leftrightarrow t^2-(b-9)t+8=0$으로부터, $t^2-6t+a=0$을 만족시키는 두 양의 실수 $t$가 $t^2-(b-9)t+8=0$도 만족해야함을 알 수 있고, 그 말은 결국

$t^2-(b-9)t+8=0$와 $t^2-6t+a=0$의 두 실근이 일치함을 알 수 있습니다. $b-9=6, a=8$이면 두 방정식이 일치하며, $t=2, t=4$일 때 점 P가 원점을 지난다는 것을 알 수 있습니다.

**30.** 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)e^x$으로 정의하자. 실수 $t$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} g'(t)(x-t)+g(t) & (x \le t) \\ g(x) & (x > t) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 실수 $t$의 값의 범위는 $t<1$이다.

| |
|---|
| 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. |

$f(10)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x \to -\infty} g(x)=0$이다.) [4점]

출제 의도) 지수함수와 다항함수의 곱 꼴의 함수는 그것의 접선과 관련하여 출제할 요소들이 많이 내포되어 있습니다.

유사 문항) 2023학년도 6월 모의평가 미적분 30번

**30.** 양수 $a$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}$$

이다. 실수 $t$에 대하여 $x$에 대한 방정식

$$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

$g(5)+\lim_{t \to 5} g(t)=5$일 때, $\lim_{t \to k-} g(t) \neq \lim_{t \to k+} g(t)$를 만족시키는 모든 실수 $k$의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

답: 49

풀이) $h(x)$는 $x \ge t$에서 $g(x)$를 의미합니다. $x<t$에서는 접선을 의미합니다.

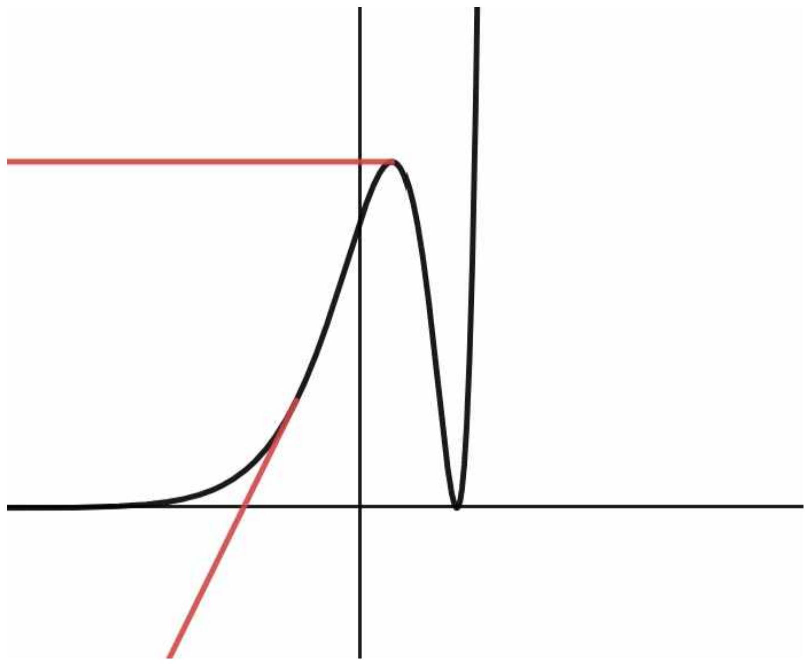
만약 $g(x)=0$의 실근의 개수가 0이라면, $t \to -\infty$인 상황에서 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1입니다.

만약 $g(x)=0$의 실근의 개수가 2라면, $t \to -\infty$인 상황에서 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3입니다.

따라서 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이며, 이로 인해 $f(x)=(x-a)^2$로 나타낼 수 있습니다.

$g'(x)=(x-a+2)(x-a)e^x$이고,

$y=g(x)$의 개형을 그리면 다음과 같습니다.



따라서 $t<a-2$가 되는 순간, 접선의 기울기가 음수가 되어 방정식 $h(x)=0$의 실근의 개수가 2가 됨을 알 수 있습니다.

따라서, $a-2=1$이고, $f(10)=49$입니다.

**28.** 정삼각형 ABC를 한 면으로 하는 사면체 ABCD에 대하여, 삼각형 ABC의 무게중심을 G, 점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 선분 AG위에 있고

$$\overline{GH}=2,\ \overline{DH}=\sqrt{10}$$

이다. 평면 ABD와 평면 ABC가 이루는 예각의 크기를 $\theta_1$, 평면 BCD와 평면 ABC가 이루는 예각의 크기를 $\theta_2$라 하면 $\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$일 때, 사면체 ABCD의 부피는? [4점]

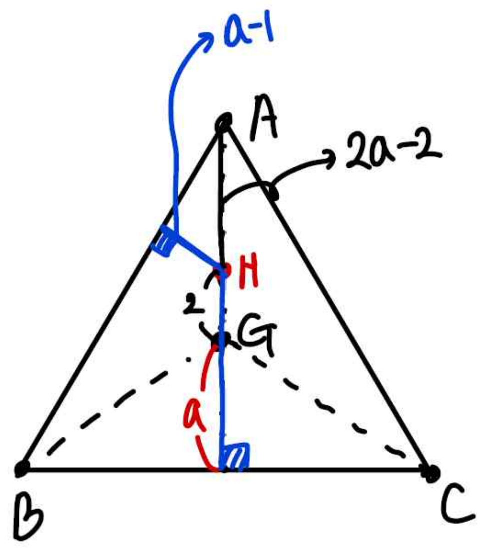
① $6\sqrt{30}$ ② $\frac{15}{2}\sqrt{30}$ ③ $9\sqrt{30}$ ④ $\frac{21}{2}\sqrt{30}$ ⑤ $12\sqrt{30}$

출제 의도) 공간도형 문제의 경우, 시선 처리를 통한 단면화를 잘하면 문제를 아주 쉽게 풀 수 있습니다. 다만 보통 30번으로 출제되던 공간도형이 앞자리에 나와서 어려움을 느끼셨을 수도 있겠네요.

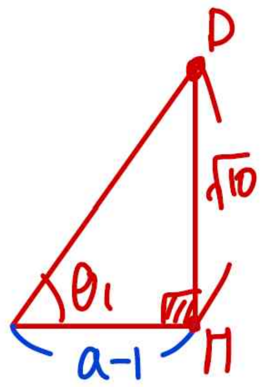
답: 3번

풀이) 정삼각형의 한 변의 길이를 $2\sqrt{3}a$라 합시다.
주어진 정사면체를 DH와 평행한 시선으로 바라보아서 단면화를 시켜봅시다. 그럼 제 시야에선 다음과 같이 보입니다.

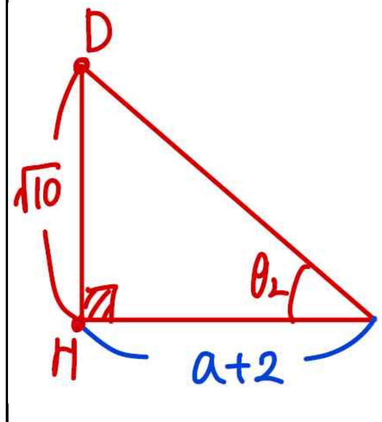
위에서 바라보면




평면 ABD와 평면 ABC가 이루는 예각의 크기인 $\theta_1$를 시각화하기 위해, 두 평면이 공통으로 포함하는 AB와 평행한 시선으로 단면화합시다. 다음과 같이 보입니다.




마찬가지로 $\theta_2$도 구해봅시다.

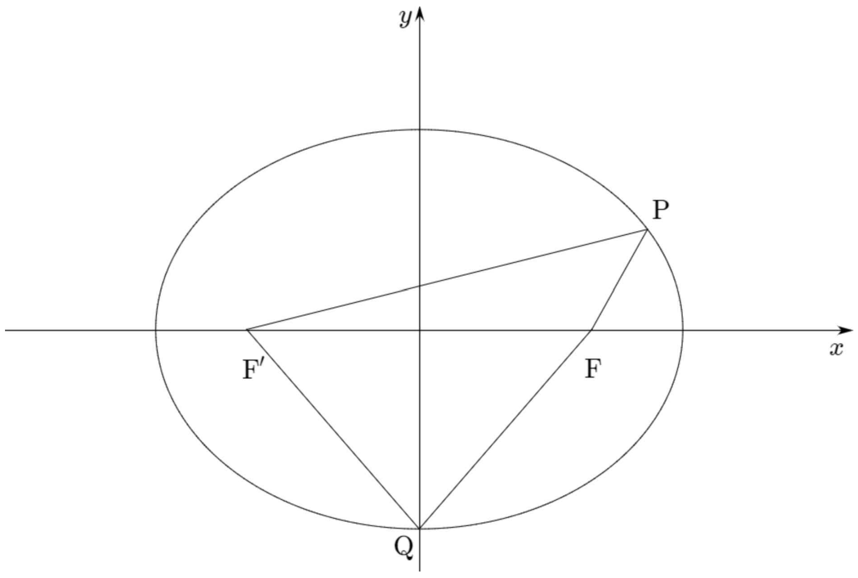



마찬가지로 $\theta_2$도 구해봅시다. $\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$을 통해 주어진 두 삼각형은 닮음관계임을 알 수 있고, 따라서
$a-1:\sqrt{10}=\sqrt{10}:a+2$이고, $a^2+a-12=0$입니다.

따라서 $a=3$이고, 사면체의 부피는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(6\sqrt{3})^2\times\sqrt{10}\times\frac{1}{3}=9\sqrt{30}$$

**29.** 그림과 같이 두 초점이 $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$인 타원이 있다. 이 타원 위의 제 1사분면에 있는 한 점을 P, 타원과 $y$축의 두 교점 중 $y$좌표가 음수인 점을 Q라 하자. 삼각형 QFF$'$의 내접원의 넓이는 삼각형 PFF$'$의 내접원의 넓이의 4배이고, 점 P에서 타원에 접하는 접선의 기울기는 $-\frac{2}{7}\sqrt{21}$일 때, 이 타원의 단축의 길이는 $k$이다. $k^2$의 값을 구하시오. [4점]




출제 의도) 타원의 성질과 내접원은 출제되기에 아주 좋은 소재입니다. 타원은 길이의 합이 일정하다는 성질이 있고, 내접원은 삼각형의 세 변의 길이의 합을 그것의 반지름과 곱하여 넓이로 바꿔버릴 수 있기 때문이죠.

답: 48

풀이) 타원의 성질에 의해 $\overline{PF}+\overline{PF'}=\overline{QF}+\overline{QF'}$입니다. 따라서 QFF$'$의 둘레의 길이와 PFF$'$의 둘레의 길이는 같습니다.
삼각형 QFF$'$의 내접원의 넓이는 삼각형 PFF$'$의 내접원의 넓이의 4배라는 조건에서, 내접원의 반지름의 길이의 비는 $2:1$임을 알 수 있고, 결국 둘레의 길이가 같기에 두 삼각형의 넓이의 비도 $2:1$임을 알 수 있습니다. 타원을 $\frac{x^2}{a+9}+\frac{y^2}{a}=1$로 나타낸다면, Q의 $y$좌표는 $-\sqrt{a}$이기에 P의 $y$좌표는 $\frac{\sqrt{a}}{2}$임을 알 수 있습니다. 이로부터 $x$좌표는 $\frac{\sqrt{3a+27}}{2}$임을 알 수 있고, 접선의 기울기는 $-\frac{ax}{(a+9)y}$로부터 $\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{a+9}}=\frac{2}{7}\sqrt{21}$이고, $a=12$임을 알 수 있습니다. 따라서 단축의 길이는 $2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$입니다.

**30.** 좌표평면 위의 반지름의 길이가 2인 원 위의 세 점 A, B, C가 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $|\overrightarrow{AB}| > 2$을 만족시킨다. $|\overrightarrow{AX}| = \frac{3}{2}$, $|\overrightarrow{BY}| = \frac{1}{2}$을 만족시키는 두 점 X, Y에 대하여 $|\overrightarrow{XY}|$가 최소가 되도록 하는 두 점 X, Y를 각각 $X_1$, $Y_1$, $|\overrightarrow{XY}|$가 최대가 되도록 하는 두 점 X, Y를 각각 $X_2$, $Y_2$라 하면

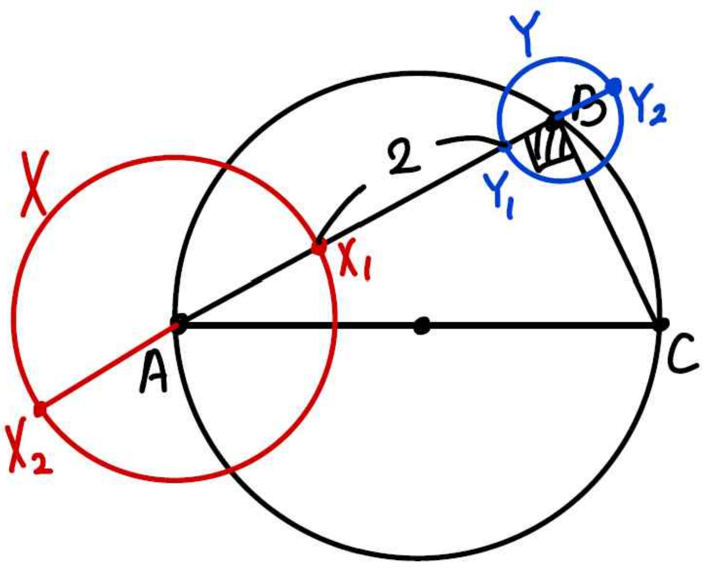
$$\overrightarrow{CX_1} \cdot \overrightarrow{CY_2} + \overrightarrow{CX_2} \cdot \overrightarrow{CY_1} = \frac{17}{2}$$

이다. 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{7}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

출제 의도) 주어진 $X_1$, $Y_1$, $X_2$, $Y_2$을 올바르게 표현만 하였다면, 겉모습에 비하여 크게 어려움을 느끼시진 않았을 겁니다.

답: 9

풀이) 주어진 점들을 그림으로 나타내면 대략 다음과 같습니다.




AB의 길이를 $p$라 하면, BC의 길이는 $\sqrt{16-p^2}$ 입니다.이를 기반으로 주어진 평면 벡터의 내적 식을 나타내면 $\overrightarrow{CX_1} \cdot \overrightarrow{CY_2} + \overrightarrow{CX_2} \cdot \overrightarrow{CY_1} = \frac{17}{2}$에서 각 항들을 수직인 선분들로 분해하여 계산해주면

$\overrightarrow{CX_1} \cdot \overrightarrow{CY_2} = |\overrightarrow{CB}|^2 - \left(p - \frac{3}{2}\right) \times \frac{1}{2}$

$\overrightarrow{CX_2} \cdot \overrightarrow{CY_1} = |\overrightarrow{CB}|^2 + \left(p + \frac{3}{2}\right) \times \frac{1}{2}$

로부터, $32 - 2p^2 + \frac{3}{2} = \frac{17}{2}$입니다. 따라서 $p = \frac{5}{\sqrt{2}}$이며, $\overline{AB} = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $\overline{BC} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$입니다. 따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{5}{4}\sqrt{7}$입니다.

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.