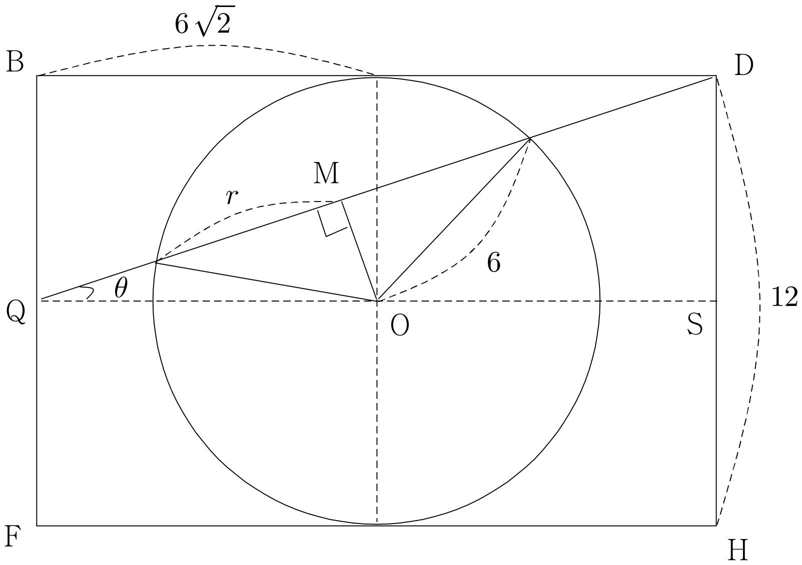
최근 11개년 공간도형, 벡터 고난도 문항 자세한 해설

2005년 10월 교육청 수리(가형) 15번

$sol.1)$

평면 BFHD 로 단면화를 해보자. 이때 단면이 되는 사각형 BFHD 는 정사각형이 아님에 주의하자.



그리고 편의상 위와 같이 점 $\mathrm{O}, \mathrm{M}, \mathrm{S}$ 등을 잡자.

이때 구하고자 하는 교원의 반지름은 r 로서

$\overline{\mathrm{OM}}$ 을 대신 구해도 피타고라스 정리를 이용해서 마저 구할 수 있다.

그러면 삼각형 OMQ 와 DSQ 의 닮음 관계에서

$$\sin\theta = \frac{\overline{\mathrm{OM}}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \rightarrow \overline{\mathrm{OM}} = 2\sqrt{2}$$

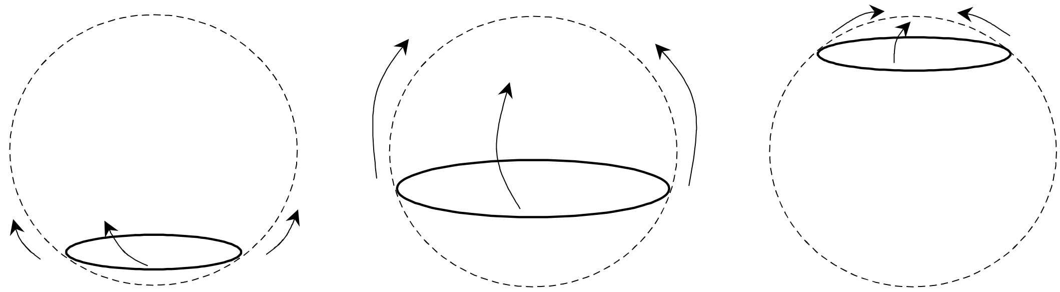
이므로 $\pi r^2 = \pi(36-8) = 28\pi$가 답이 된다.

$sol.2)$

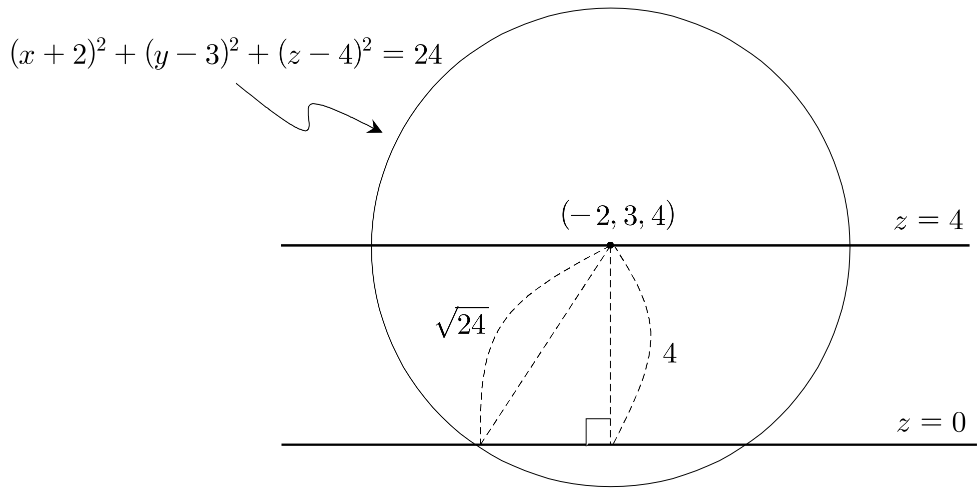
좌표설정 후 구의 중심에서 평면 DPQR 에 이르는 거리를 구해서...

2005년 11월 대수능 수리(가형) 10번

구의 중심인 $(-2,3,4)$에서 xy, yz, zx평면 각각에 이르는 거리, 혹은 x, y, z축에 이르는 거리와 구의 반지름 $\sqrt{24}$ 간의 대소 관계를 따져서 구하는 방법도 가능하겠지만 how? 다음과 같이



마치 구분구적법을 하듯이 단면 $z=k$에 따른 교원을 관찰함으로서 구가 지나는 좌표공간을 따져보자. 그렇다고 모든 단면들을 다 관찰할 필요는 없고, 특정 단면만을 관찰해도 충분하다.



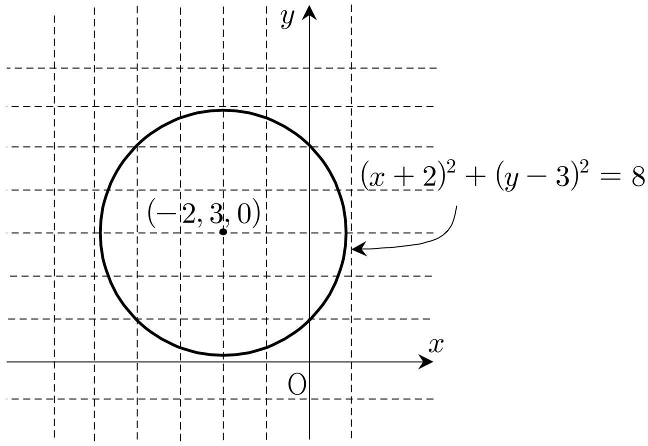
즉, $z=0$과 $z=4$에 의한 교원만 관찰해도 무방하다.

$z=0$을 관찰하는 이유는, x, y축과 교원 간에 교점이 발생할 가능성이 있기 때문이고

$z=4$를 관찰하는 이유는, 교원의 반지름이 최대가 되어 z축과 교점을 가질 가능성이 가장 높기 때문이다.

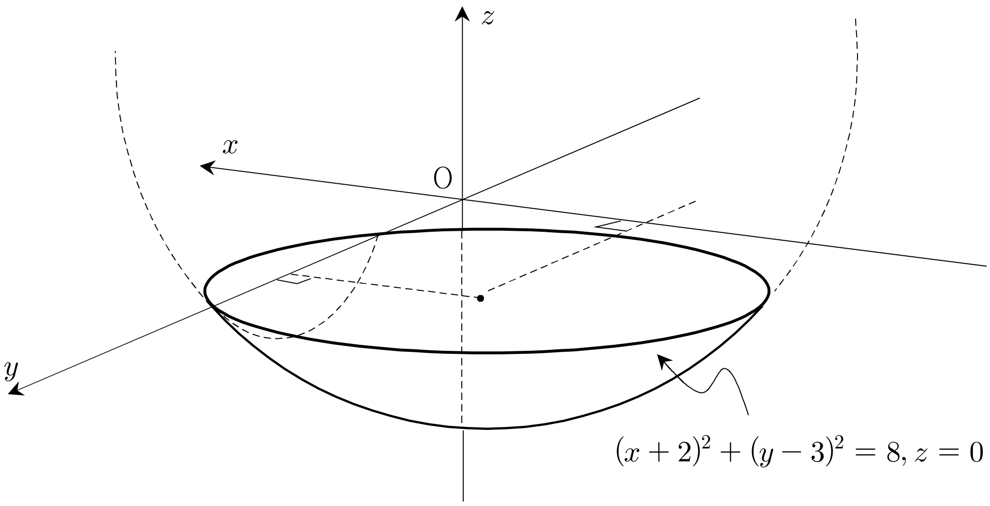
만약 $z=k$가 아니라 $x=k$나 $y=k$로 상황을 스캐닝 한다면 관찰해야 하는 단면 또한 달라질 것이다.

먼저 $z=0$에 의한 단면부터 살펴보자. $2<\sqrt{8}<3$이므로 교점 관계는 다음과 같다.



실제 불수능 상황임을 감안한다면 공간이 어떻게 분할되는지 상상하는 것만으로도 훌륭하지만,

지금은 어디까지나 연습이니 조금 무리해서 단면화 이전의 상황을 따져보면 다음과 같다.



따라서, $z\leq 0$인 영역에서 구는 제 5, 6 팔분공간 두 개의 영역을 지난다.

같은 방법으로 $z=4$인 영역을 살펴보자.

이때, 수식을 조작함에 있어 구의 방정식 $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=24$가

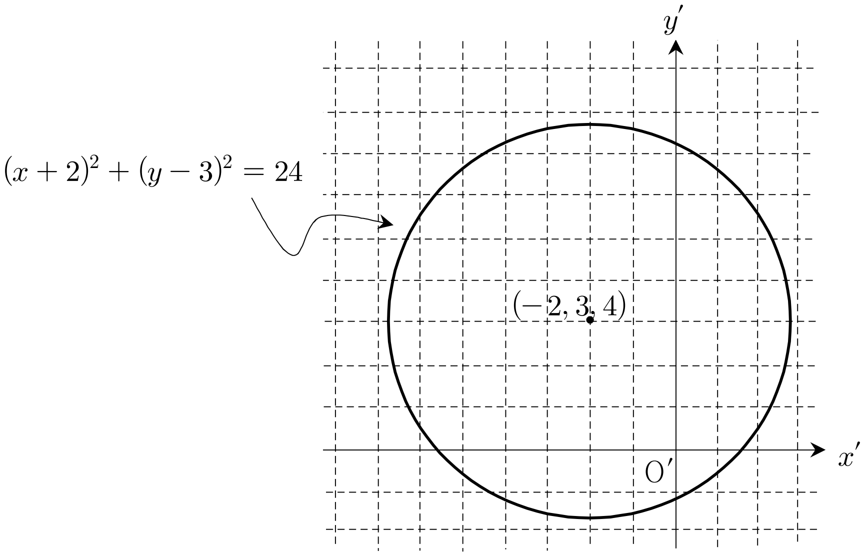
$(x+2)^2+(y-3)^2=24$로 바뀌기도 하고,

$(x+2)^2+(y-3)^2=8$로 바뀌기도 하는데,

전자는 $z=4$를 대입한, 구와 $z=k$ 평면의 최대 크기의 교원으로서 반지름이 유지되고,

후자는 $z=0$을 대입한, 구와 $z=0$ 평면의 교원으로서 반지름이 구에 비해 줄어든 것이다.

그러면 $2 < 3 < \sqrt{13} < \sqrt{24}$ 이므로 교점 관계는 다음과 같다.



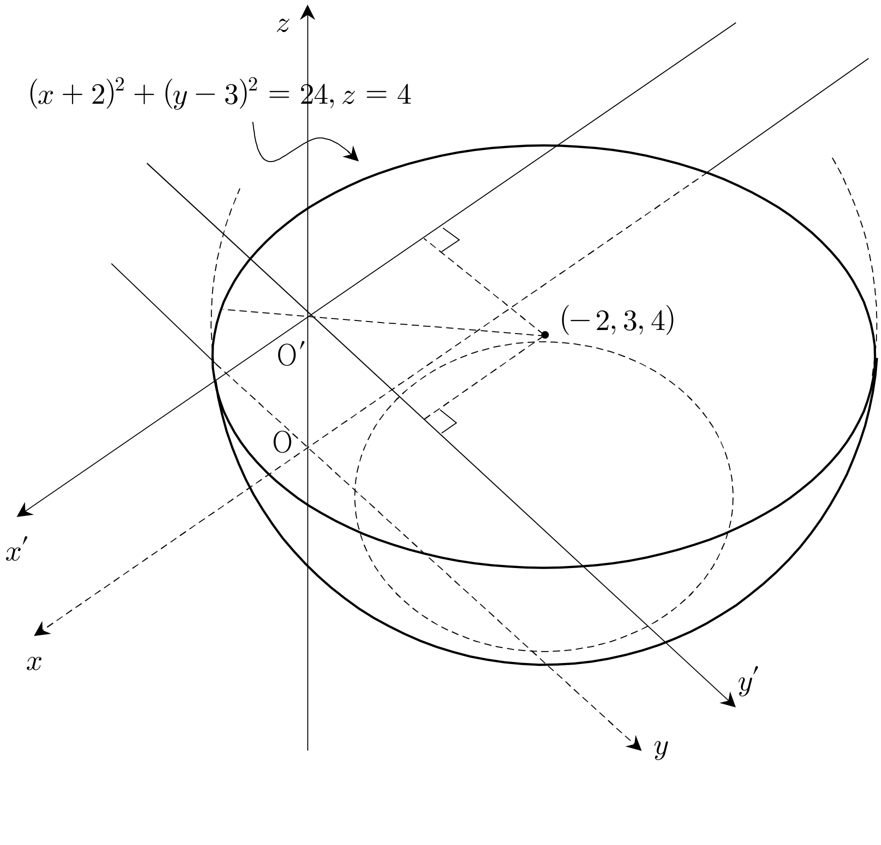
이때 등장하는 $2, 3, \sqrt{13}$ 은 교원의 중심으로부터 각각 zx 평면, yz 평면, z 축에 이르는 거리로

교원의 반지름과의 대소 관계를 비교하는 것이며

엄밀하게는 $z=4$ 평면상에 x, y 축이 존재하지 않기 때문에 x', y', O' 이라 표기하였다.

따라서, $z \geq 0$ 의 영역에서 구는 좌표공간의 팔분공간 중에서 제1~ 4 네 개의 부분을 지난다.

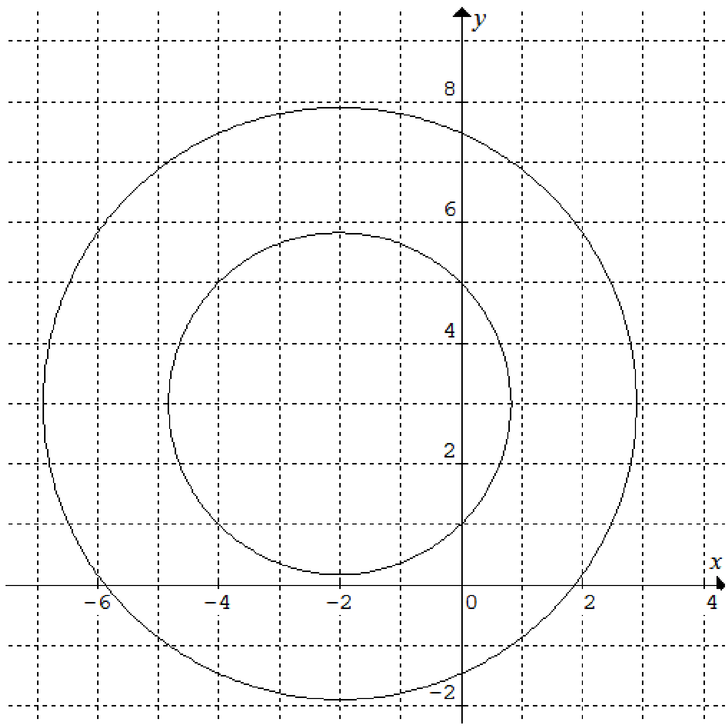
이를 단면화 이전의 상태로 복원해보면 다음과 같다.



고로, 구 $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=24$가 xy평면, yz평면, zx평면에 의해

총 $2+4=6$개의 영역으로 나뉨을 알 수 있다.

사실 답을 구하기 위해 이토록 장황하게 풀 필요는 없다. 수학적 경제성은 떨어진다.



$z=0, 4$에 의한 단면화에서 얻어지는 교원을 동일한 평면에 정사영 내린 동심원을 그리고서

앞서 언급한 좌표공간에서의 단면화가 없는 본디 상황을 상상하면서 풀 수도 있다.

2008년 11월 대수능 수리(가형) 25번

지금 주어진 도형은 구 S와 평면 α

그리고 이로부터 파생된, 교원에 해당하는 C

또, 원 C의 지름 양 끝점에 해당하는 P, Q와

마찬가지로 원 C 위의 점 A를 택해서 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{AQ}}$가 되도록 한다.

여기까지 이미지화를 해보자. 머릿속으로 상상해도 좋다!

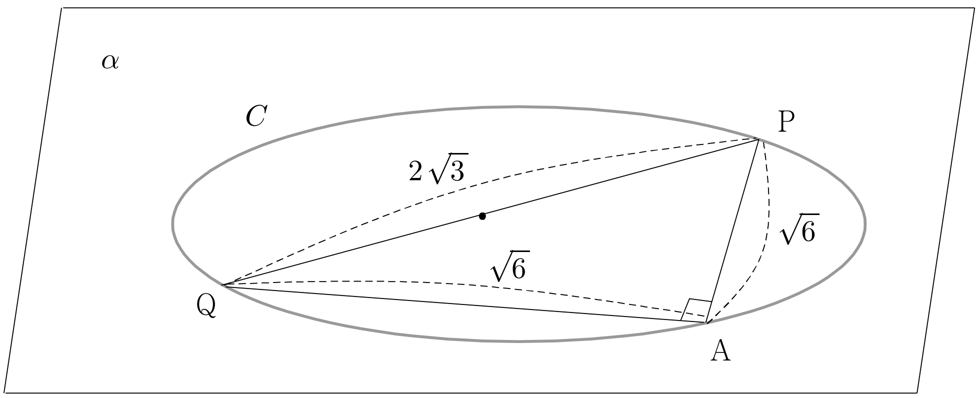
3차원을 의미하는 그림은 친절하게 이미 그려져 있다.

하지만 이는 왜곡되어 필요한 관계가 잘 보이지 않을 수도 있기 때문에

동일한 정보로부터 필요에 맞게 그림을 그리면 된다.

이때 구의 중심에서 평면(혹은 교원의 중심)에 이르는 거리라든가, 교원의 반지름처럼

구할 수 있는 수치는 문제에서 묻지 않더라도 일단 구해 두는 편이 좋다.



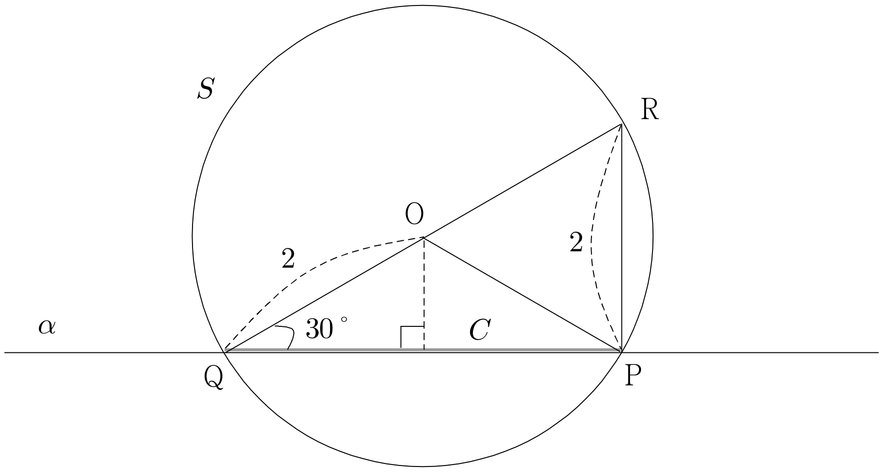
다음으로 점 R을 잡아줘야 하는데,

평면 α상의 점 P에서 수직으로 나아간 직선이 구 S와 만나는 지점으로서 묘사하고 있다.

이 상황을 잘 드러내도록 구의 중심과 두 점 P, Q를 지나는 평면으로 단면화 해보자.

단면화 과정에서 종종 구는 원으로, 평면은 직선으로, 도형은 선분으로 나타날 수도 있지만

머릿속에서 인식은 본래의 도형으로 하여야 한다.



평면 α는 물론 xy평면은 아니지만, 가장 관찰하기 좋은 위치에서 바라본다면

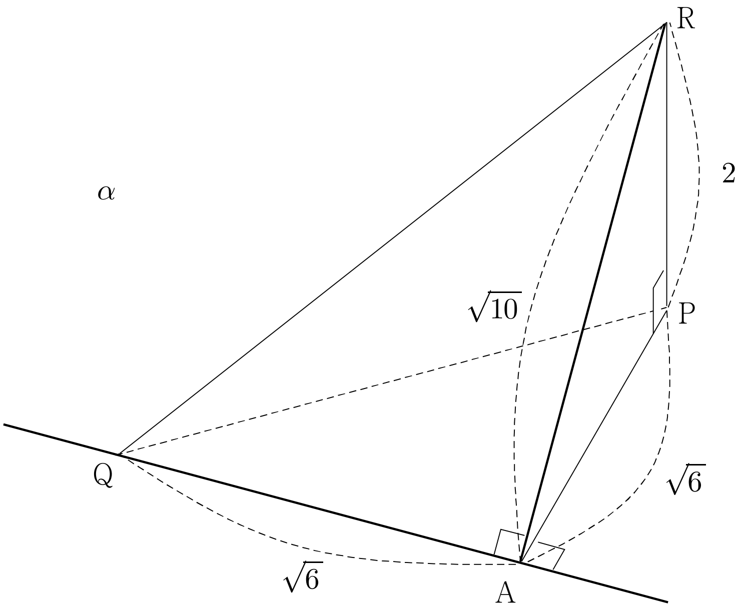
이야기는 달라진다. 그랬더니 역시, 이 문제에서도 특수각을 품는 상황이었다.

이로서 점 R의 정보는 충분히 파악했다고 봐도 무방하다.

이제 앞서 그린 그림과 위 그림의 정보를 종합하되,

문제에서 묻고 있는 삼각형 ARQ의 넓이를 구하는 데 있어서

불필요한 곡선들은 걷어내고 알짜만 남겨내면



이러한 관계를 구할 수 있다. 따라서 삼각형 ARQ의 넓이 $s = \sqrt{15}$이므로 $s^2 = 15$이다.

※ 공간 상의 한 점에서 직선에 수선을 내리는 방법에 관하여.

2009년 09월 평가원 수리(가형) 23번

앞에서도 보였지만 이러한 공간도형 문제를 푸는 데 있어서 꽤 괜찮은 신념체계를 소개하자면, 주어진 상황을 머릿속으로든 시험지 여백에든 이미지화를 해가며 차분히 **이해**하는 것이다.

약간 옆길로 새서 이야기 하자면, 수학교육으로 봤을 때 지금까지 대세로 자리하고 있는 폴리아(G. Polya)의 문제해결 이론에 따르면 문제해결의 네 가지 국면을

이해(Understanding) - **계획 수립**(Planning) - **실행**(Carrying out) - **반성**(Looking back)

이라 말하고 있다. 물론 이 네 가지를 순서에 따라 행할 필요는 없다. 그럼에도 불구하고 일부 학생들 중에는 문제를 제대로 이해하지 않고서 열심히 풀었다가 오답을 이끌어 내고는

'이건 실수야! 다음에 이런 게 나오면 맞출 수 있어'

라 생각한다는 것이다. 가랑비에 옷이 젖는다는 말도 있듯이, 이런 습관은 꼭꼭 고쳐야 한다!

그리고 무의식적으로나마 복잡한 수식을 써내려 가는게 수학이라는 생각에 실행에 중점을 두고서 문제를 보면 일단 펜부터 끄적이게 된다. 이미 앞에서 썼던 공식을 다시금 유도해보기도 하고, 소모적인 계산을 행하며 결국 문제 해결과는 멀어지게 된다. 제 이야기 같기도 하네요 ㅠㅠ

하지만 폴리아에 따르면 이해의 과정이 전체적인 문제 해결의 대다수를 차지해야 한다고 말한다. 실행, 즉 계산이나 그래프 그리기는 머릿속에서 이해와 계획 수립이 완성된 단계에서 금방 끝낼 수 있는 작업이므로 이해의 과정이 그만큼 중요하다.

있는 그대로의 문제를 내게 맞게 이해하는 것, 이것이 공간도형 문제를 잘 풀기 위한 비결이다!

그리고, 실질적인 실력의 향상은 반성의 과정에서 이루어진다. 기출문제를 학습할 때 몇몇 학생들은 문제의 답을 맞춘 시점에서 끝내기 때문에 기출문제의 진수를 맛보지 못하기도 한다.

다시 문제로 돌아와서 상황을 관찰해보자.

그랬더니 기본적인 도형으로 좌표공간에서 구와 두 평면 α, β가 주어져있다.

구와 평면간의 위치 관계는, 구의 중심에서 평면에 이르는 거리와 구의 반지름 간에 비교를 통해, 두 평면의 위치 관계는 법선벡터의 해석을 통해 알 수 있다.

이는 문제에서 직접 구하라고 언급하지 않더라도, 문제 상황을 이해하기 위해 우리에게 주어진

첫 세 줄 분량의 수학 영역 지문을 해석해 내어야 한다.

그리고 이 과정에서 출제자가 숨겨놓은 원피스(One Piece)를 찾을 수 있다.

그랬더니, 구에서 두 평면 α, β의 중심에 이르는 거리는 각각 $\dfrac{15}{\sqrt{6}}, \dfrac{5}{\sqrt{2}}$ 이다.

또한, 두 평면 α, β가 이루는 이면각 중 예각의 크기 θ에 대한 코사인 값은 $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ 이다.

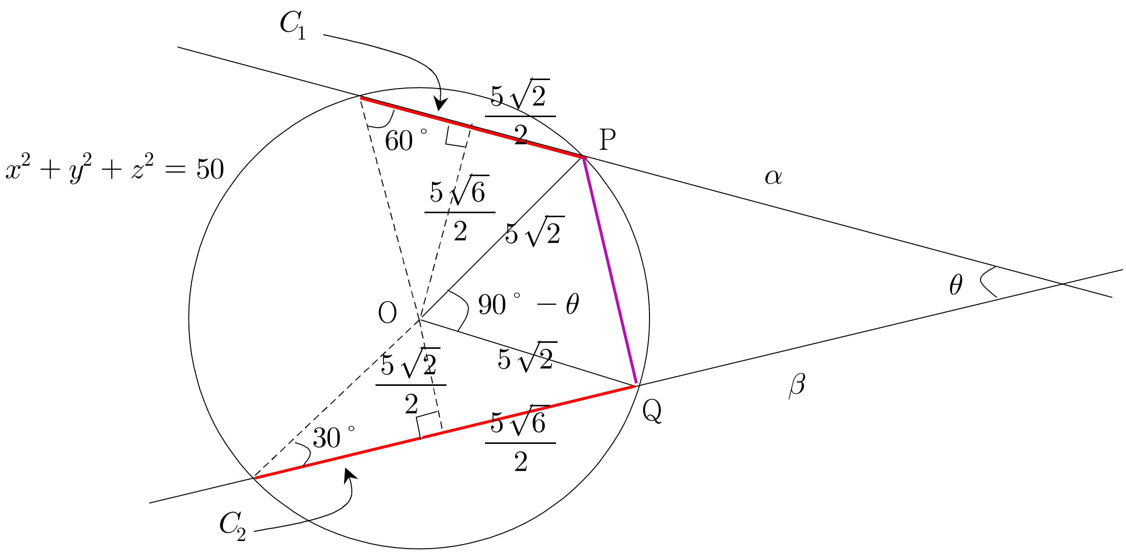
여기서 이 문제의 백미는 숨겨진 특수각인 $30^\circ, 60^\circ$ 이다.

구의 반지름이 $\sqrt{50}$ 인 바람에 전체적으로 사이즈가 뻥튀기 되어서

수치들을 보고도 잘 와 닿지 않을 수도 있지만 위 정보를 종합해서 단면화를 해보자.

이때의 단면은, 두 평면 α, β의 교선에 수직하면서 구의 중심을 지나는 평면으로

굳이 구하고자 한다면 내적을 두 번 쓰든, 외적을 한 번 써서든지 구할 수 있다.



공간 상에서 xy, yz, zx 평면에 각각 평행하지 않은 임의로 기울어진 원을

구와 평면간의 교원으로서 나타낸 상황이다.

그리고 이때 구와 평면 α, β 간에 발생하는 교원을 각각 C_1, C_2라 하고,

교원 위를 뱅글뱅글 돌아가는 점을 다시 P, Q라 하였다.

다소 직관적일 수도 있지만 $\overline{\mathrm{PQ}}^2$가 최소가 되려면 $\overline{\mathrm{OP}}, \overline{\mathrm{OQ}}$가 이루는 각이 최소가 되어야 하고

사각형 내각 관계에다 출제자가 숨겨놓은 특수각을 적용하면

$(180^\circ - \theta) - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ - \theta$

가 최소의 각이다. 이 위치에 두 점 P, Q가 올 때 삼각형 OPQ에 제이코사인법칙을 적용해보면

$$\therefore\ \overline{PQ}^2 \geq \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2\overline{OP}\cdot\overline{OQ}\cos(90^\circ - \theta)$$

$$= 50 + 50 - 100\sin\theta = 40 \qquad \left(\because\ \cos\theta = \frac{4}{5} \rightarrow \sin\theta = \frac{3}{5}\right)$$

※ 만약 초반에 구의 중심에서 두 평면 α, β에 이르는 거리와 구의 반지름 간에

특수각 $30^\circ, 60^\circ$가 적절하게 등장해주지 않았다면,

가령 비특수각으로서 밖에 구할 수 없었다면 삼각함수 덧셈정리를 행해야 하므로 복잡해졌을텐데

그냥 주어진 - 그림을 통해(단면화) 그럭저럭 알아낼 수 있는 - 정보를 보고 알아내야 해서

정답에 이르는 과정이 상당히 까다로웠다고 볼 수도 있다.

그래서 이 문제의 교훈은 다음과 같이 정리할 수 있겠다. 이것이 바로 '반성'의 과정이다.

"공간도형 문제를 이해할 때는 문제를 읽으면서 이미지화를 병행하되,

구할 수 있는 수치는 아무 말 없어도 구할 것"

이 문제가 등장한지도 벌써 5년이라는 시간이 훌쩍 흘렀고,

수많은 문제집들, 모의고사들에서 다양하게 변주되고 있다.

그래도 핵심을 꿰뚫는 이해를 제대로 하고 있다면 풀 수 있을 것이다!

[2014학년도 포만한 모의평가 수학영역 (B형) 21번]

21. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=24$가 평면 $x+2y-z=6$과 만나서 생기는 원을 C라 하자. 원 C 위의 점 P에서 평면 $x-y+2z=15$에 내린 수선의 발을 점 H라 할 때, $\overline{PH}$의 최솟값은? [4점]

① $\frac{5\sqrt{6}}{6}$　② $\sqrt{6}$　③ $\frac{7\sqrt{6}}{6}$　④ $\frac{4\sqrt{6}}{3}$　⑤ $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

2009년 10월 교육청 수리(가형) 24번

세 평면 α, β, γ로 인해 두 구는 외접하는 상황은 될 수 없기에

그대로 두 구의 반지름을 더해줘선 안 된다.

두 구의 중심간 거리는 결국 두 점 사이의 거리가 되고,

이를 구하기 위해서는 x, y, z간에 좌표값 차이를 알아야 한다.

즉, 반지름 $1, 2$인 구의 중심을 각각 $C_1(x_1, y_1, z_1), C_2(x_2, y_2, z_2)$라 한다면

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

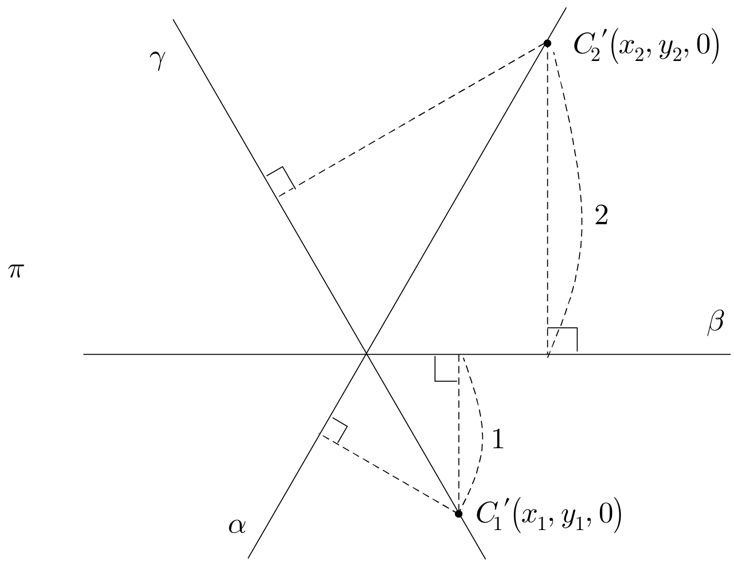
가 되므로 $|x_1 - x_2|$와 $|y_1 - y_2|$와 $|z_1 - z_2|$를 각각 구해주면 된다.

그런데 우리는 좌표"공간"보다 좌표"평면"이 더 익숙하므로 좌표평면상으로 상황을 간단히 해서

우선 x, y값들의 차이를 구한 다음에 z값 차이를 생각해주는 전략을 취하자.

평면 π를 xy평면으로, 직선 l을 z축으로 보고 다음과 같이 관찰해보자.

다시 한 번 상기하자면 x, y값들 간의 차이를 구하는 것이다.



이는 단면화가 아니라 xy평면에 정사영한 것이로 볼 수 있다. 혹은 위에서 내려다 본 모습!

그러면 z값에만 변화가 있을 뿐, 구의 반지름도 보존되고, x, y 값도 유지되기 때문이다.

이때 평면 π와 α, β, γ 그리고 직선 l이 어떻게 나타나는지, 구는 어떻게 나타나는지,

구는 그리고 왜 안 나타냈는지 생각해 볼 필요가 있다.

그러면 특수각 60° 를 의식하면서, 두 구의 중심간 x, y값들의 차이를 구해보면

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (1+2)^2 = \frac{28}{3}$$

이 된다.

그러면 남은 부분인 두 구의 중심간 z좌표간의 차이는 문제에서 주어진 그림을 통해서도

$$(z_1 - z_2)^2 = (2-1)^2 = 1$$

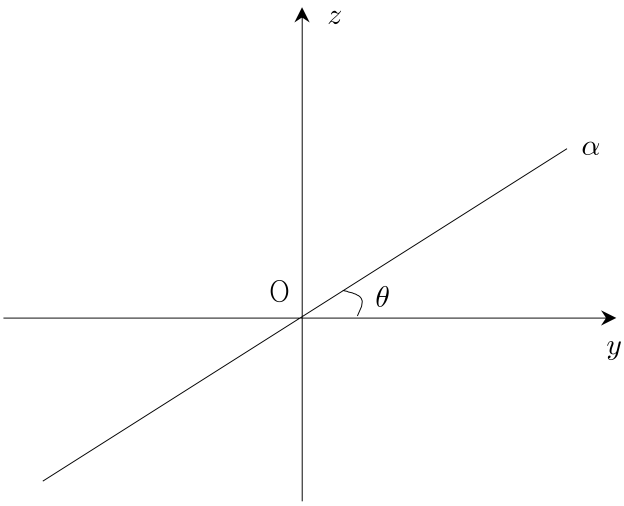
임을 알 수 있고, 따라서

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \frac{28}{3} + 1 = \frac{31}{3}$$

이 되어 $3d^2 = 31$이 된다.

2009년 11월 대수능 수리(가형) 25번

문제에서 말하고 있는 대로 이미지화를 해보자. 그러면 첫 두 줄로부터 다음을 알 수 있다.



이때 x축은 원점으로부터 이 글을 보는 당신을 향하고 있고,

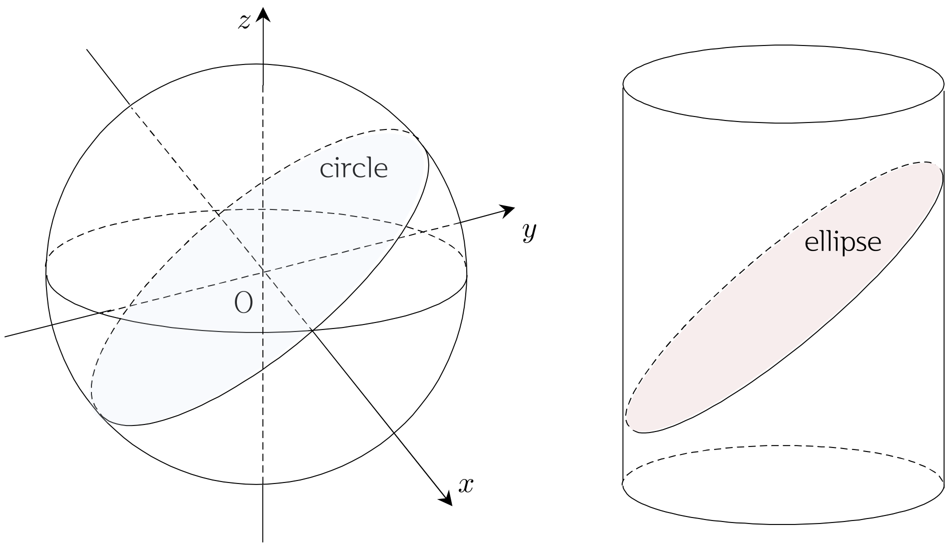
딱히 표현할 필요가 없으니 나타내지 않았다.

혹자는 $x=0$인 평면으로 단면화 했다고 생각할 수도 있다.

그리고 평면 α와 구 $x^2+y^2+z^2=1$이 만나서 생기는 도형은

기울어진 교원으로서 위 그림에 나타내자면 아마 선분으로 나타나야 할 것이다.

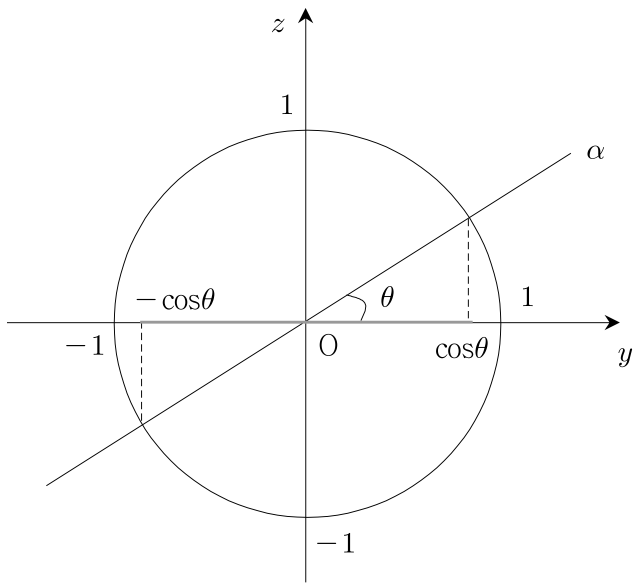
사고를 돕기 위해 잠시만 본래의 상황을 묘사해보겠다.



즉, 구와 원기둥을 비스듬히 자른 단면은 각각 원과 타원이 된다.

따라서 평면 α와 구가 만나서 생기는 도형은 타원이 아니라 원임을 알 수 있다.

그런데 그 원을 다시 xy평면에 정사영 내리면 타원이 된다.



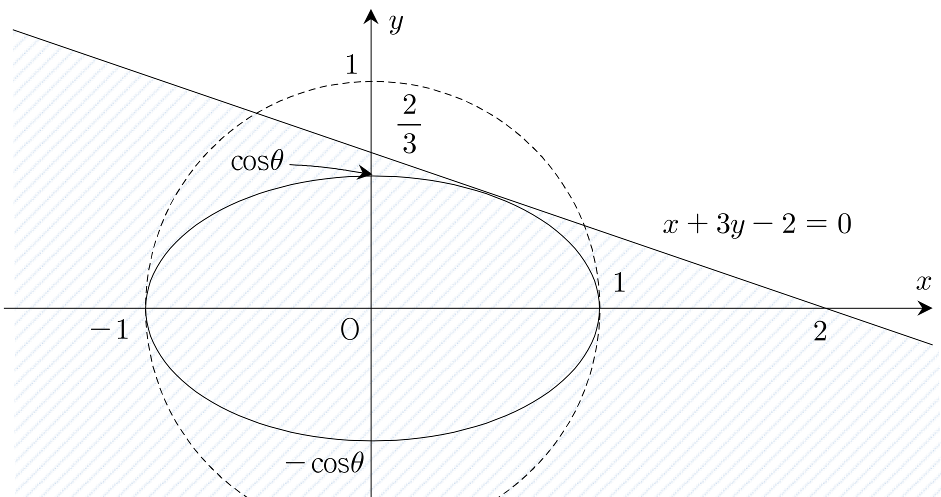
정사영 된 타원에서 장축은 위 그림에서 잘 드러나지 않은 x축 상에 존재하며

그 길이는 비스듬한 교원의 지름으로서 유지하는 반면,

단축은 지름이 정사영 되어서 $2\cos\theta$가 된다.

이는, 원이 정사영 되어 타원이 되는데 특정한 결을 따라 동일한 비율로 줄어들기 때문이다.

그림으로 그려보면 다음과 같다.



정리하자면, 구 $x^2+y^2+z^2=1$가 존재하고

x축을 품는 평면 α가 존재해서 교원이 생겨나고,

교원을 다시 xy평면에 정사영 한 타원 $\dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{\cos^2\theta}=1$에서

평면 α에서 θ를 얼마나 기울이느냐에 따라 타원의 크기가 변한다,는 관계로부터

우리는 다단계적인 사고를 엿볼 수 있다. 이런 스타일의 문제가 이 당시에는 특히 많았다.

그리고 이 문제를 한 문장으로 요약하자면,

"직선 $x+3y-2=0$에 타원 $\dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{\cos^2\theta}=1$이 접하도록 하는 θ값을 구하여라."

정도로 볼 수 있다.

타원은 장축은 길이가 유지되나 단축의 길이가 θ에 따라 변하는 반면

부등식 $x+3y-2\le 0$이 나타내는 영역은 고정되어 있으므로 $\cos\theta$의 최댓값은

타원이 경계가 되는 직선 $x+3y-2=0$에 접할 때이다.

따라서, 타원에 접하는 기울기가 m인 접선의 식에 넣어보면

$$-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}x+\sqrt{\frac{1}{9}\cdot 1^2+\cos^2\theta}$$

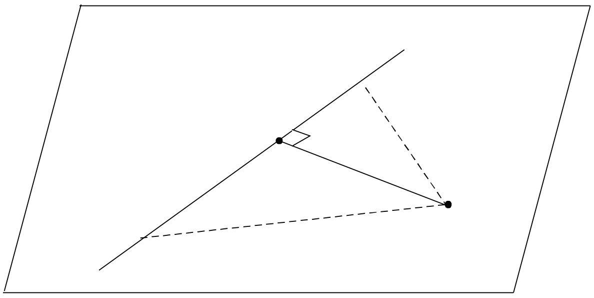
에서 $\cos^2\theta=\dfrac{1}{3}=M^2 \rightarrow 60M^2=20$이 나온다.

2010년 09월 평가원 수리(가형) 25번

문제를 풀기 전에 미리 알고 있으면 좋은 사실 몇 가지!

① 좌표평면 상의 한 점에서 (그 점을 포함하지 않는) 직선에 이르는 거리는,

수선의 길이로서 취한다.

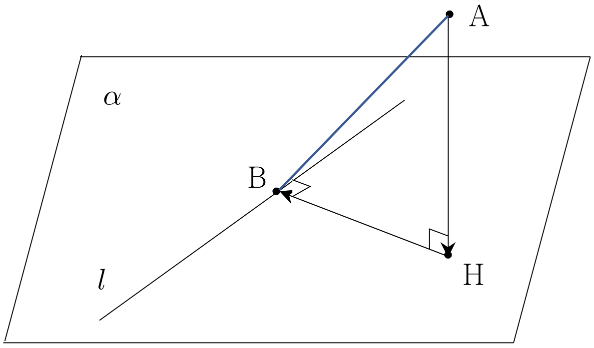


② 공간 상의 한 점 A에서 (그 점을 포함하지 않는) 직선 l에 이르는 거리는,

직선 l을 포함하는 평면 α에 먼저 수선을 내려서 ①의 상황으로 만든 다음

수선의 발 H에서 다시 직선 l에 수선을 내려 얻은 점 B를 이어 $\overline{AB}$ 로 취한다.

간단히 말해, 곧바로 직선에 수선을 내리지 말고, 두 번 수선을 내려서 수치를 얻는다는 얘기.



③ 출제자도 간단한 계산을 좋아한다. 하지만, 그러면 문제가 너무 쉬워지니까

겉보기엔 어려워 보이나 수학적인 그 무엇을 캐치하면 간단하게 풀리도록 상황을 구성한다.

지금 이 문제에선 직각삼각형에서의 길이 비를 연결하여 문제를 만들었다.

$3:4:5$와 $1:1:\sqrt{2}$ 를 $3:\boxed{4}:5$와 $4:\boxed{4}:4\sqrt{2}$ 로써 문제에 숨겨 두었는데,

이를 그냥 문제를 읽고서 캐치할 수 있다면

문제 해결 과정에서 속도와 정확성 모두를 높일 수 있다.

여느 문제에서처럼 문제를 읽어가며 이미지화를 해보자.

제시된 그림과 같이 한 평면(편의상 α라 명명하자)과 세 직선 l, m, n이 평행하게 존재한다.

그리고 네 점 $\mathrm{A, B, C, D}$를 꼭짓점으로 하는 사각형이 보이는데,

놀랍게도(?!) 이는 한 평면상에 위치하지 않는 전형적인 '고오슈 사변형'이다.

즉, 평면상에 존재하는 사각형을 한 대각선으로 접어서 만든 입체 도형이다.

대각선 AD를 이어 보조선을 그어보면 두 평면으로 구성되었음을 알 수 있다.

또, (나), (다)의 조건에서 말하고 있는 것은 결국

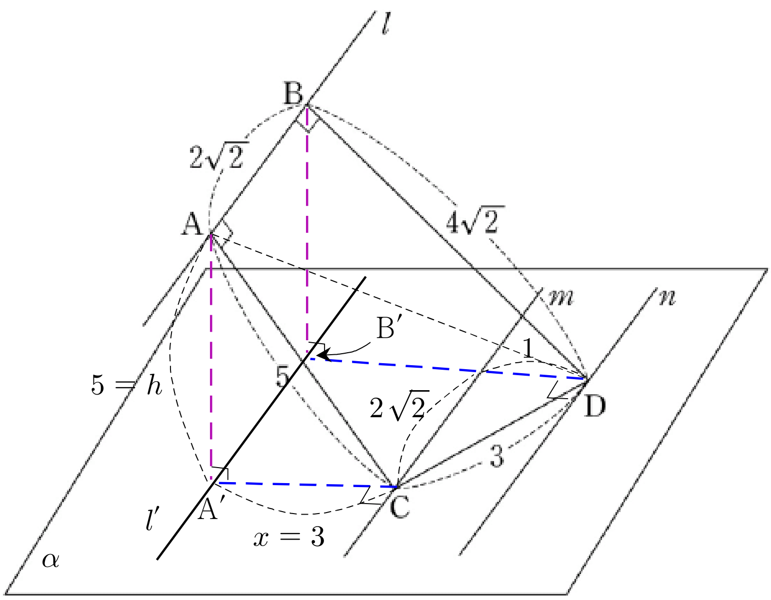
직선 l위의 두 점 $\mathrm{A, B}$에서 각각 평면 α상의 두 직선 m, n 상에 각각 존재하는

점 $\mathrm{C, D}$에 수선을 내렸다는 사실과, 정교한 수치 관계를 파악하기 위한 길이이다.

그러니 앞서 말한 ②에 의거하여 수선을 다음과 같이 그어보자.

그리고 편의상 직선 l을 평면 α에 내린 정사영을 직선 l'라 하자.

대다수가 고민하는 공간도형 문제에서의 보조선은 대부분 ②를 이용하면 해결된다.



이 문제의 해결에서 첫 번째 난관은 수치 관계의 해석이다.

위와 같이 x, h라고 필요한 성분을 적당히 미지수로 두고서 피타고라스 정리를 연립해서

$$x^2 + h^2 = 25, (x+1)^2 + h^2 = 32$$

를 풀어내면 결국 $x=3, h=5$를 얻을 수 있지만,

당시 이 문제를 포함한 시험 자체가 워낙에 어려웠던 터라

느긋하게 연립 방정식이나 풀고 있을 생각이 잘 안 든다.

대신, 앞서 말한 ③을 의식하면서 문제를 바라보면,

역시나 출제자는 직각삼각형 길이비인 $3:4:5$와 $4:4:4\sqrt{2}$를 숨겨 두었음을 파악하고서

곧바로 수치를 찾아낼 수 있다.

두 번째, 이 문제의 해결 중 난관은 적당한 보조선이다.

평면 α가 좁게 그려지다 보니 무의식적으로나마 보조선을 어떻게 그을지를

평면 α의 이내에서로 사고를 한정하는 자신을 발견할 수도 있다.

이때 해결책은, 앞서 말한 ②이다.

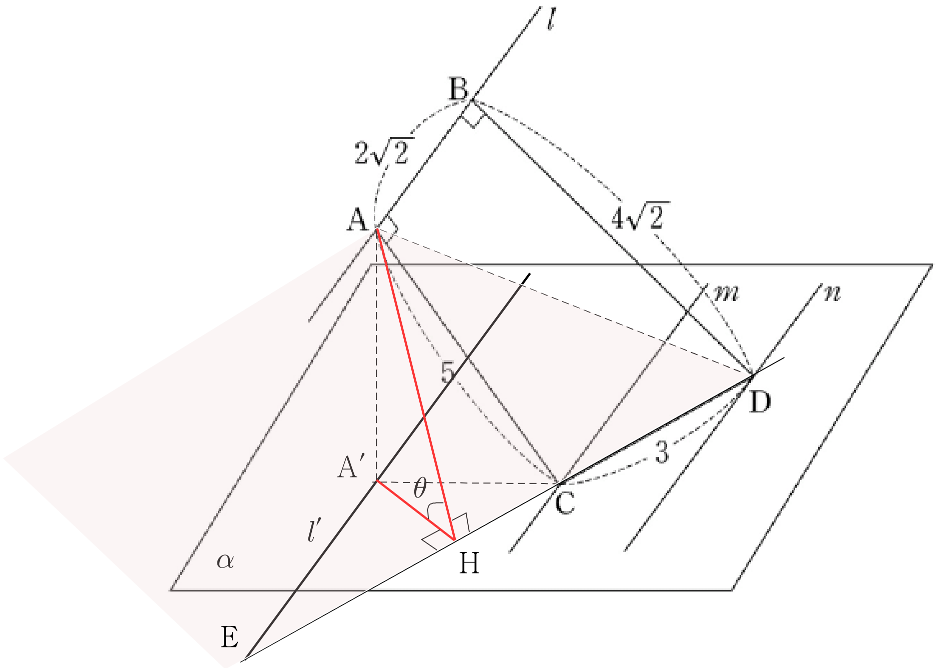
세 점 $\mathrm{A, C, D}$를 포함하는 평면과 바닥 평면인 α간에 이면각 θ에 대한 $\tan$ 값을 묻고 있는데,

이는 기존의 문제들이 $\sin, \cos$을 묻던 것과 달리 학생들로 하여금 혼란을 일으키게 한다.

하지만 결국은 이면각을 묻는 문제에 불과하고,

교선으로서 선분 CD를 연장해서, θ를 품는 적절한 직각삼각형을 찾아 단면화를 해야 한다.

따라서, 점 A에서 직선 CD에 수선을 내려야 하는데, ②를 이용하면 다음과 같다.



물론 $\cos\theta, \sin\theta$를 통해서 구해낼 수도 있지만 $\tan\theta$를 구하라는 점이 참 이채롭다.

이면각 θ를 품는 직각삼각형을 찾아 내어서, 혹은 평면 $\mathrm{AA'H}$로 단면화해서

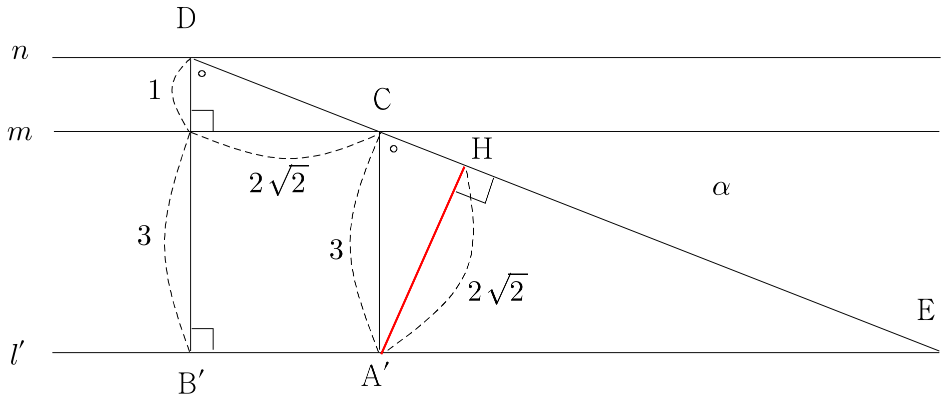
밑변과 높이에 해당하는 선분을 각각 구하라는 출제자의 메시지를 읽어낼 수 있다면.

점 A에서 곧바로 직선 CD에 수선을 내리는 것보다,

$\mathrm{A} \to \mathrm{A'} \to \mathrm{H}$ 순으로 수선을 내리는 편이 직각 관계도 더 잘 보인다.

$\overline{\mathrm{AA'}} = 4$임은 알고 있으니, 결국 $\overline{\mathrm{A'H}}$를 구하면 된다.

이를 구하기 위해 다시 한 번, 평면 α를 관찰해보자.



그러면 닮음 관계로부터 $\overline{\mathrm{A'H}} = 2\sqrt{2}$를 얻고,

$\tan\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{AA'}}}{\overline{\mathrm{A'H}}} = \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$에서 $15\tan^2\theta = 30$임을 알 수 있다.

※ 이면각 관계를 찾기 싫지만 답은 얻어내고 싶은 경우.

평면 α를 $z=0$으로, 점 $\mathrm{B'}$를 원점 삼아 적당히 좌표를 잡자.

그리고 평면 ACD의 법선벡터를 구하기 위해 평면 ACD 상의 적당한 두 벡터를 외적하자.

$\mathrm{A}(2\sqrt{2}, 0, 4), \mathrm{C}(2\sqrt{2}, 3, 0), \mathrm{D}(0, 4, 0)$

이고 $\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (0, 3, -4), \overrightarrow{\mathrm{CD}} = (-2\sqrt{2}, 1, 0)$**에서** $\overrightarrow{\mathrm{CA}} \times \overrightarrow{\mathrm{CD}} = (4, 8\sqrt{2}, 6\sqrt{2}) // (\sqrt{2}, 4, 3)$.

따라서, 평면 ACD의 법선벡터를 $(\sqrt{2}, 4, 3)$**이라 두고, 평면 α의 법선벡터를** $(0, 0, 1)$**이라 하면**

이면각에 대해 $\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{27}\sqrt{1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$**이고,** $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 = 2$**로부터** $15\tan^2\theta = 30$.

2011년 09월 평가원 수리(가형) 29번

문제를 읽으면서 이미지화를 해보자.

머릿속에 똑같이 스캔하여도 좋고, 주어진 그림 위에 눈으로 하나하나 확인해보는 것도 좋다.

평면 α 위에 점 A, 그리고 평면 밖의 B, C

또 $\overline{\mathrm{BP}}=4$이면서 A, C의 내분점인 점 P는

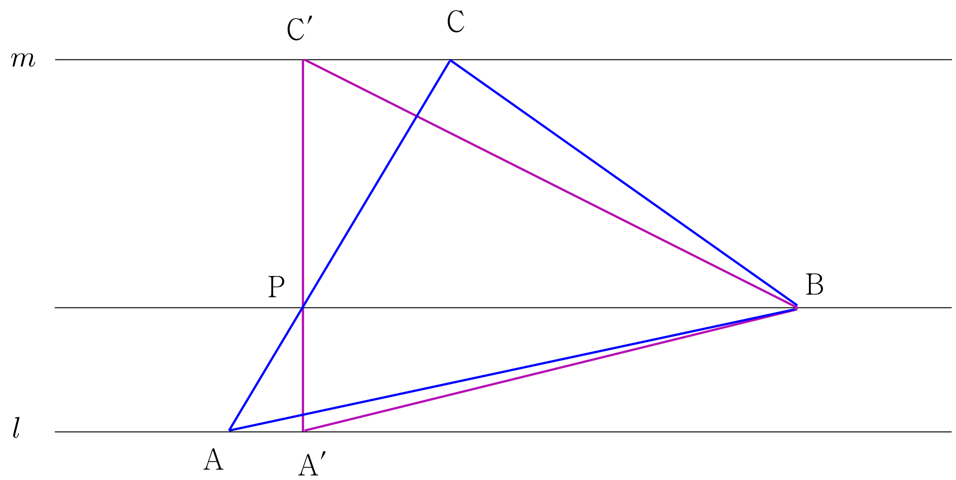
가령, 평면 α를 $z=0$인 바닥 평면으로 보았을 때 점 P의 높이 좌표가 $z=1$로서

결국 B, P는 바닥 평면인 α로부터 같은 위치에 떨어져 있음을 알 수 있다.

이때 적용 가능한 것이 바로 카발리에리의 원리이다.

즉, 밑변의 길이가 같고 높이가 같은 삼각형들은 넓이가 같다.

한번 평면 ABC를 관찰해보자. 이때 삼각형 ABC와 평면 ABC는 엄연히 다르다!



만약 두 점 B, P가 고정되어 있다고 하자.

직선 BP에 평행하고 점 A, C를 각각 지나는 직선을 l, m이라 하면

삼각형 ABC의 넓이가 같은 상태에서 직선 l, m 위의 두 점 A', C'와 점 B를 이은

삼각형 $\mathrm{A}'\mathrm{BC}'$를 생각해 줄 수 있다.

사실 문제에서는 네 점 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{P}$가 평면 α로부터 이르는 거리와

두 점 B, P 사이의 거리 정도만 주었으므로 삼각형 ABC를 결정할 수 없다.

즉, 삼각형 ABC의 개형들로 무수히 많은 위치의 삼각형들을 결정해줄 수 있고,

그러한 삼각형들의 자취는 두 직선 l, n을 경계로 하는 무수히 긴 띠 모양의 면이 된다.

편의상 이를 β라 하자.

그러면 삼각형 ABC의 넓이는 알고 있으므로,

결국 두 평면 α, β가 이루는 이면각에 대한 코사인 값을 구하면 된다.

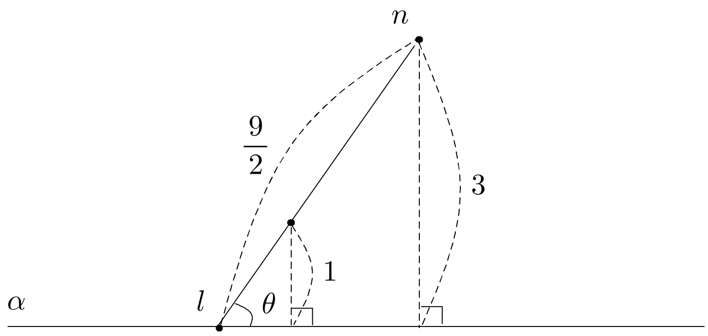
혹자는 이쯤에서 곧바로 직선 $\mathrm{A'C'}$가 $\overline{\mathrm{BP}}$에 수직하도록 잡아서 답을 찾아내기도 한다.

여기서 $\overline{\mathrm{A'C'}}$이 두 직선 l, n에 수직하게 잡도록 하자.

평면 α, β를 적절히 이동시키면 교선으로서 두 직선 l, n이 모두 가능하다.

그러면 삼각형 ABC의 넓이가 9이고 $\overline{\mathrm{BP}} = 4$이므로 $\overline{\mathrm{A'C'}} \geq \dfrac{9}{2}$가 된다.

마지막으로 한 번 더 단면화 해보자. 직선이 점으로 보이는 위치에서!



그러면 $\sin\theta = \dfrac{3}{9/2} = \dfrac{2}{3} \rightarrow \cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$으로부터 $S^2 = \left(9 \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 45$를 얻을 수 있다.

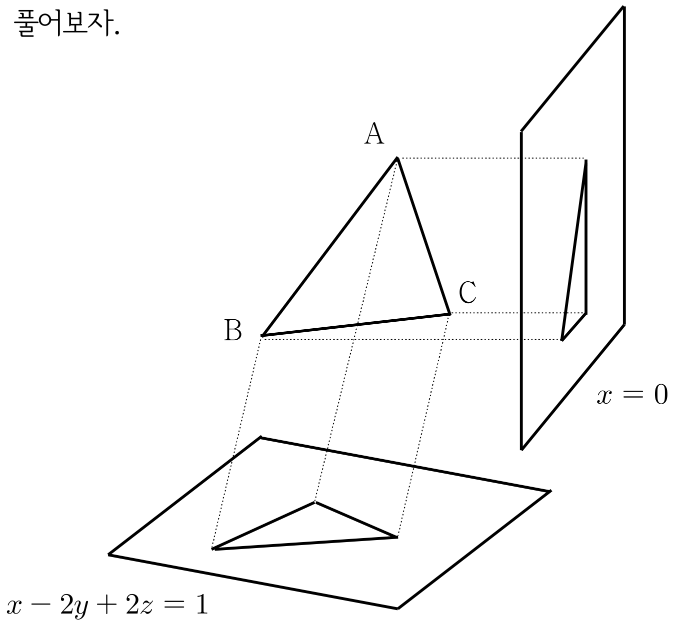
2011년 11월 대수능 수리(가형) 21번

이 문제는 기존의 정사영 문제들의 패러다임을 바꾼 문항이라 할 수 있다. 역시 수능!

첫 번째 관점은, 순도 높은 수식만을 이용한 접근으로서

2014학년도 수능 29번과 2015학년도 수능 29번을 예고하였다고 해도 과언이 아니다.

우선 문제를 풀어보자.



일부러 2014학년도 수능 29번 문제와 유사하게 그렸다.

당연한 이야기지만 평면 ABC라 한다면 삼각형 ABC에만 사고를 한정할 필요는 없다.

제한된 크기의 수능 시험지를 고려해서 평면을 다각형으로 그리는 것이니

필요에 따라 삼각형 ABC 밖의 무한한 영역도 문제 해결 과정에서 사고의 대상이다.

삼각형 ABC를 yz평면, 즉 $x=0$ 평면 위로 정사영 하였더니 넓이가

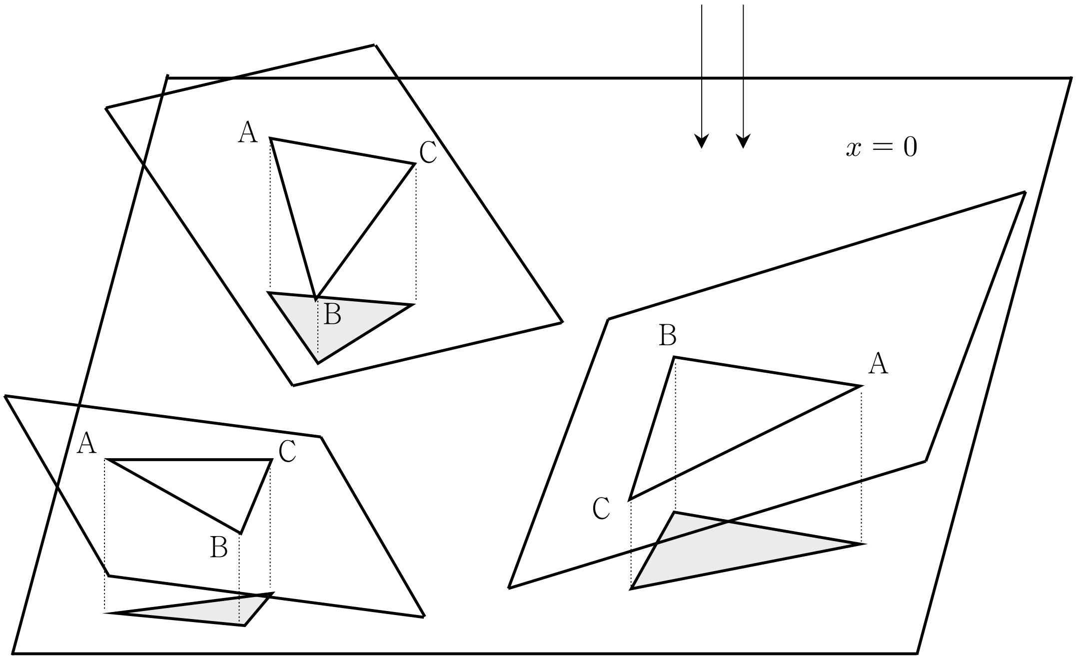
6에서 3으로 줄어들었다는 점으로 미루어 $S'=S\cdot\cos\theta$라는 관계를 생각할 수 있다.

그러니 삼각형 ABC를 품는 평면과 $x=0$ 평면 간에 이루는 이면각 θ에 대한 코사인 값은

$\frac{1}{2}$로 $\cos\theta=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ \theta=60^\circ$가 되어야 한다.

그렇다면 다시 편의상 상황을 적절한 위치에서 바라보았을 때 다음과 같을 것이다.

실제 x, y, z축을 잡았을 때 위치가 아니라, 핵심 정보를 담고 있는 유익한 장면을 포착한 셈!



즉, 삼각형 ABC를 품으면서 $x=0$ 평면과 이면각이 60°가 되는 평면은 무수히 많다.

그리고 그러한 무수히 많은 평면들 중에서 또 다른 고정된 평면인(아직 나타낸 적 없는) $x-2y+2z=1$과 이루는 이면각에 대한 코사인 값이 최대인 상황을 찾기를 문제에서는 요구하고 있는 것이다.

이때 삼각형 ABC를 품는 평면을 α라 하고, 그 법선벡터를 $\vec{h}=(a,b,c)$라 하자.

$x=0$ 평면의 법선벡터가 $(1,0,0)$이고, 평면 α와 이면각이 60°이므로

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

그리고 이를 한 번 더 정리하면

$$4a^2 = a^2+b^2+c^2 \rightarrow 3a^2 = b^2+c^2$$

임을 이끌어 낼 수 있다. 혹은 처음부터 $\vec{h}=(1,p,q)$로 두고 사고를 전개할 수도 있다.

이제 평면 α와 $x-2y+2z=1$의 이면각 θ에 대한 코사인 값을 구해보면

$$\cos\theta = \frac{|a-2b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \left|\frac{a-2b+2c}{6a}\right| = \left|\frac{1}{6}-\frac{b-c}{3a}\right|$$

이렇듯 당시 기존 문제들과는 사뭇 다른 문제를 내면서 평가원은 앞서갔다.

여기서 또 다른 훌륭하고 더 나은 풀이도 얼마든지 존재하겠지만,

수식 처리에 주목하여 **삼각치환**을 사용하자.

즉, $3a^2 = b^2 + c^2$ 로부터 $b = \sqrt{3}\,a\cos t, c = \sqrt{3}\,a\sin t$ 라 잡으면

$\dfrac{1}{6} - \dfrac{b-c}{3a}$ 는 곧 삼각함수 합성을 이용한 최대, 최솟값 구하는 문제로 환원되어서

$$\frac{1}{6} - \frac{b-c}{3a} = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin t \le \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서, $\cos\theta$의 최댓값은 $\dfrac{1+2\sqrt{6}}{6}$ 으로 $1+2\sqrt{6}$ 이 답이다.

두 번째 관점은, 정사영을 회전을 통해 바라보는 것이다.

수능 초기 단계의 정사영 문제들은 하나같이 $S' = S \cdot \cos\theta$ 에서

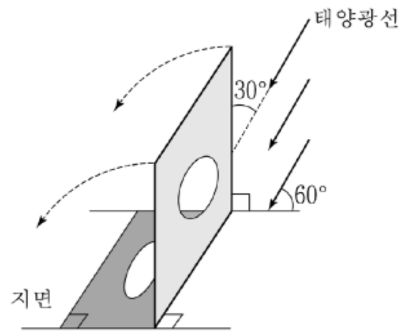
S, S' 나 $\cos\theta$ 값 구하는 데에만 관심을 갖다가(이건 따로 예제를 들지 않겠다.)

평가원 시험이 마치 유행처럼, 무조건 + 최대한 + 일단 + 그냥 어렵게 출제되던 시절에

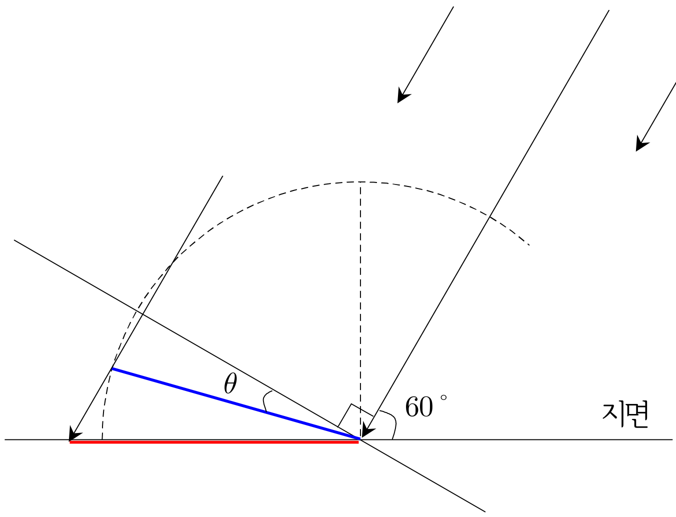
소위 **'이중 정사영'**을 묻는 문제가 등장했다.

[2008년 09월 평가원 수리(가형) 25번]

25. 그림과 같이 태양광선이 지면과 $60°$의 각을 이루면서 비추고 있다. 한 변의 길이가 4인 정사각형의 중앙에 반지름의 길이가 1인 원 모양의 구멍이 뚫려 있는 판이 있다. 이 판은 지면과 수직으로 서 있고 태양광선과 $30°$의 각을 이루고 있다. 판의 밑변을 지면에 고정하고 판을 그림자 쪽으로 기울일 때 생기는 그림자의 최대 넓이를 S라 하자. S의 값을 $\dfrac{\sqrt{3}(a+b\pi)}{3}$ 라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이고 판의 두께는 무시한다.) [4점]



즉, 빛이 정사영 내리려는 평면에 수직하게 들어오지 않는 경우로서, 단면화 해서 관찰해보면



빛(=태양광선)에 수직인 가상의 평면을 고려해서 그 위로 정사영 식을 세워야 한다.

즉, 가상의 평면에 맺히는 넓이랑에 대한 식으로

$$S\cos 30^\circ = (16-\pi)\cos\theta \ \ (-30^\circ \le \theta \le 60^\circ)$$

에서 $\theta = 0$일 때 최댓값 S를 얻을 수 있다.

사실 이 시험이 있기 며칠 전에 사관학교 시험에도 나왔었다.

[2008년 08월 사관학교 수리(가형)]

23. 좌표공간에서 평면 $y=(\tan 75^\circ)x$ 위의 도형 S를 벡터 $\vec{v}=(1,\ -1,\ 0)$에 평행한 광선으로 비추었더니, zx 평면에 나타난 도형 S의 그림자는 중심이 $(4,\ 0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 3인 원이 되었다. 이 때, 도형 S의 넓이는? [4점]

① $3\sqrt{3}\pi$ ② $4\sqrt{3}\pi$ ③ $\frac{9\sqrt{6}}{4}\pi$

④ $3\sqrt{6}\pi$ ⑤ $\frac{9\sqrt{6}}{2}\pi$

이후로 악명 높은 2011학년도 수능에서 계산량을 높이고 낚시 요소도 가미한 버전의

정사영 문제가 등장하였으나 이것도 생략 하겠다.

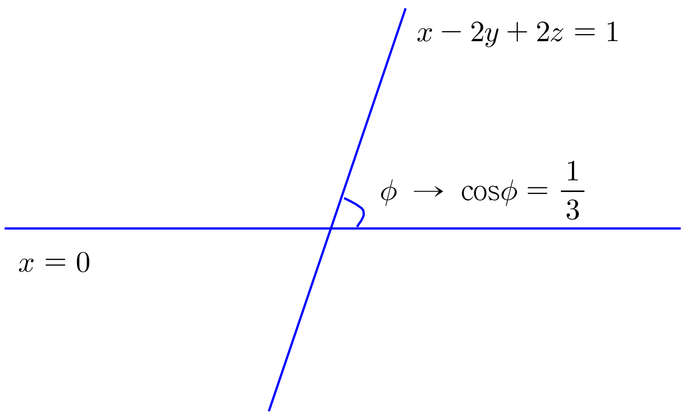
다음으로 등장한 최신판 정사영 유형이 바로 이 문제이다.

문제에서는 총 세 개의 평면이 등장한다.

$x=0$과 $x-2y+2z=1$과 평면 ABC인데, 평면 ABC는 고정되지 않은 평면으로서

다만 $x=0$ 평면과 이면각이 60°라는 것만 알 수 있다.

그렇다면 우선 고정된 두 평면을 다음과 같이 생각할 수 있고,



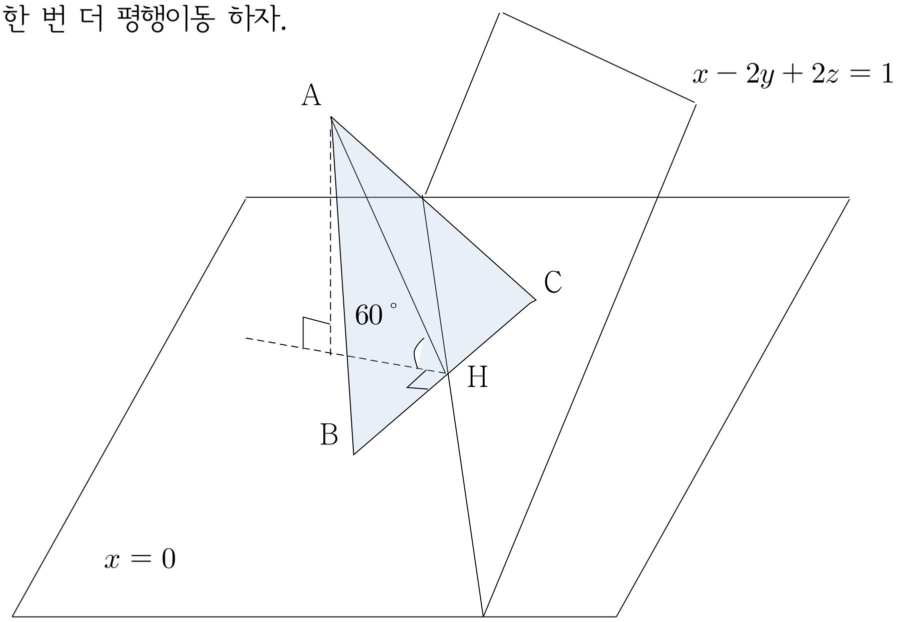
편의상 삼각형 ABC의 한 변 BC를 $x=0$ 평면과 평행하다고 가정하고 평행이동 해보자.

어차피 삼각형 ABC를 평면 $x-2y+2z=1$ 위로 정사영만 하면 되니까

꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발 H가

두 평면 $x=0$와 $x-2y+2z=1$의 교선$(-2y+2z=1, x=0)$에 놓이도록

다시 한 번 더 평행이동 하자.



이때 이 문제를 풀기 위해 은연중에 머릿속에 떠오르는 몇 가지 사고를 극복할 수 있어야 한다.

① 이렇게 그리는 평면들은 아주 이상적인 대상이어서 관통한다고 찢어지거나 하지 않는다.

② 삼각형 ABC의 꼴이 정해져 있지 않으므로 넓이와 이면각 조건만을 만족한다면

임의로 잡아도 무방하다.

밑변 BC의 길이가 고정되어 있으니 삼각형 ABC의 평면 $x-2y+2z=1$ 위로 넓이는

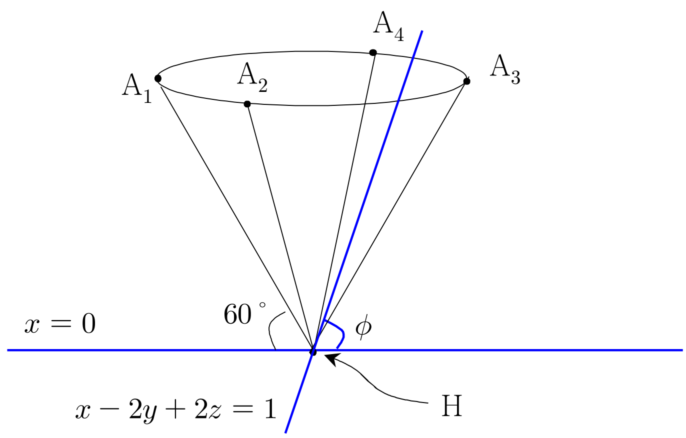
결국 $\overline{\mathrm{AH}}$의 평면 $x-2y+2z=1$ 위로 정사영 길이의 값이 최대일 때 발생한다.

한편, 구하고자 하는 상황을 파악하기 위해

평면 ABC가 $x=0$ 평면과 이면각 60°를 유지하는 상태에서

점 H를 고정한 채 회전시켜 보자.

단, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \cos\phi$를 염두에 두고, 단면화와 입체를 적절히 혼합해서 그려보면



점 H가 고정된 상태에서 점 A의 가능한 위치로 원뿔의 밑면이라는 자취를 이루고 있으며

$\overline{\mathrm{AH}}$의 평면 $x-2y+2z=1$ 위로 정사영 길이의 값이 최대가 되려면

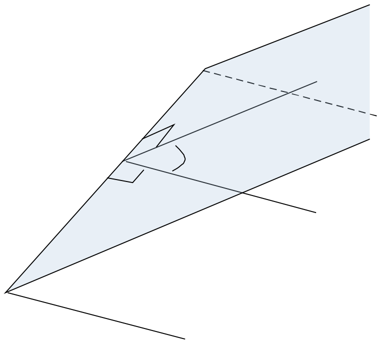
$\overline{\mathrm{AH}}$와 평면 $x-2y+2z=1$가 이루는 각이 최소가 되는 A_3에 위치할 때임을 알 수 있다.

그리고 그 값은

$$\cos(\phi-60^\circ) = \cos\phi\cos 60^\circ + \sin\phi\sin 60^\circ = \frac{1+2\sqrt{6}}{6}$$

으로 삼각형 ABC의 평면 $x-2y+2z=1$ 위로의 정사영 넓이의 최댓값은 $1+2\sqrt{6}$이다.

2012년 05월 평가원 수학(B형) 30번



이면각을 있는 그대로 찾아내길 요구하는 문제이다.

이면각을 따질 때는 제일 먼저 교선을 찾아서,

교선에 각각 수직인 평면 위의 반직선이나 선분 등을 이용해

이면각에 대한 삼각비 값을 구하는 것이 일반적이다.

여담이지만 이 문제를 통해서도 알 수 있듯,

무조건 평가원에서 공간도형 그림을 그릴 때

보이는 것은 실선, 보이지 않는 것은 점선으로 그린다는 규칙을 따르지는 않는다.

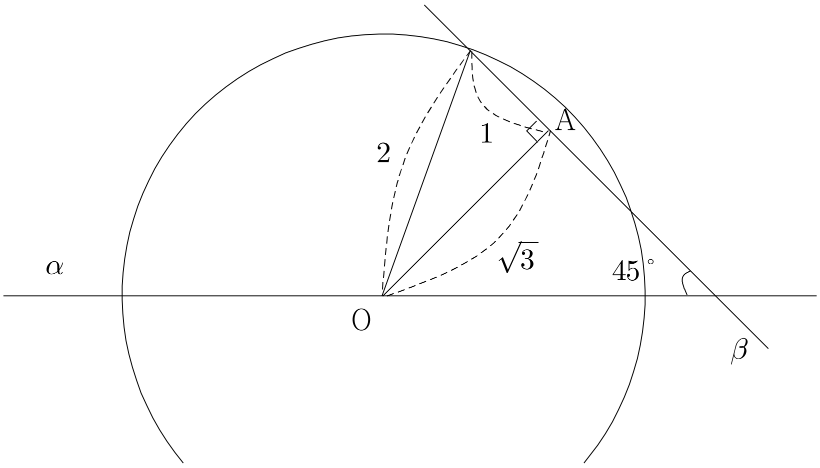
총 네 개의 평면과 하나의 구가 등장하는데,

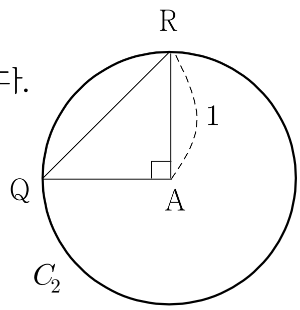
평면 PQR과 평면 AQPO의 교선은 직선 PQ로 금방 보이지만

교선에 수직인 성분이 잘 드러나지 않는다.

따라서 주어진 조건을 따라 수치 관계를 가미해서 해석해보자.

먼저 두 평면 α, β의 교선에 수직이면서 선분 OA를 품는 평면으로 단면화 해보자.





그랬더니 45° 이외에 $1:2:\sqrt{3}$ 길이 비의 특수각이 또 숨겨져 있었다.

즉, 삼각형 AQR은 반지름이 1인 원 C_2 내부에 존재하는

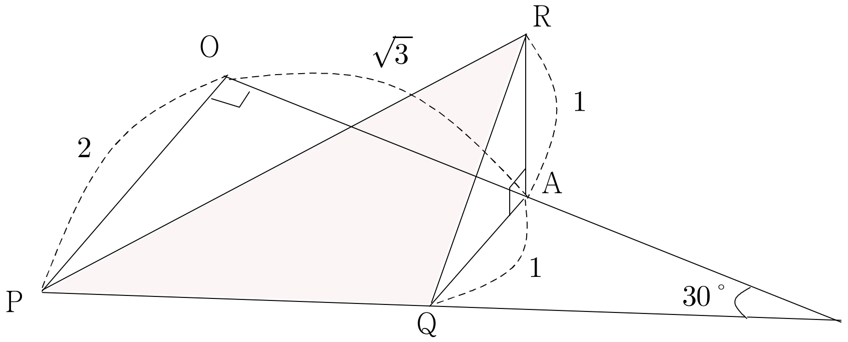
직각이등변삼각형이었던 것이다.

이제 평면 PQR과 평면 AQPO을 관찰해보자.

이 과정에서 구는 수치 정보를 파악하고 나서 쓸 일이 없으니 다시 그려줄 필요는 없다.

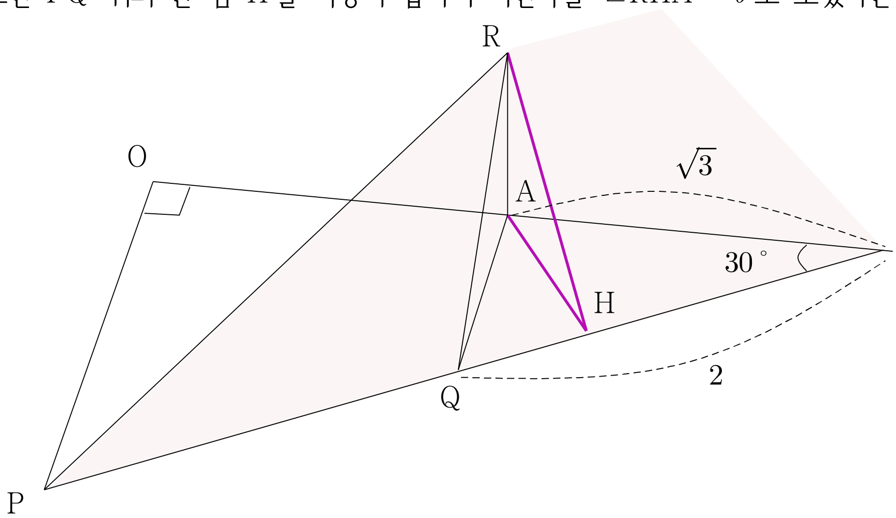
이때, 점 R의 평면 AQPO 위로 수선의 발이 때마침 점 A이므로

이면각을 품는 직각삼각형 요소로 두 점 A, R을 포함하기 위해 다음과 같이 연장하자.



너무 어려울까봐 곳곳에 특수각을 숨겨놓은 출제자의 배려도 느껴진다.

즉, 교선 PQ 위의 한 점 H를 적당히 잡아서 이면각을 $\angle\mathrm{RHA} = \theta$로 보겠다는 것이다.



그러면 $\overline{\mathrm{AH}} \perp \overline{\mathrm{QH}}, \overline{\mathrm{RH}} \perp \overline{\mathrm{QH}}, \overline{\mathrm{AH}} \perp \overline{\mathrm{RA}}$이므로

피타고라스 정리나 닮음 관계 등을 통해 $\overline{\mathrm{AH}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$을 얻고, $\tan\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{AR}}}{\overline{\mathrm{AH}}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$에서

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$$

이므로 $p + q = 7 + 3 = 10$이 답이 된다.

2012년 09월 평가원 수리(가형) 27번

두 개의 구와 하나의 평면, 그리고 이들 간의 적당한 교원이 등장하는데,

이름이 붙지 않은 구 $x^2+y^2+z^2=16$을 편의상 S'라 하자.

공간 상에서 두 구의 위치관계는, 마치 평면에서 두 원의 위치 관계를 따지듯이

서로의 반지름과 중심과의 거리로 따지면 된다.

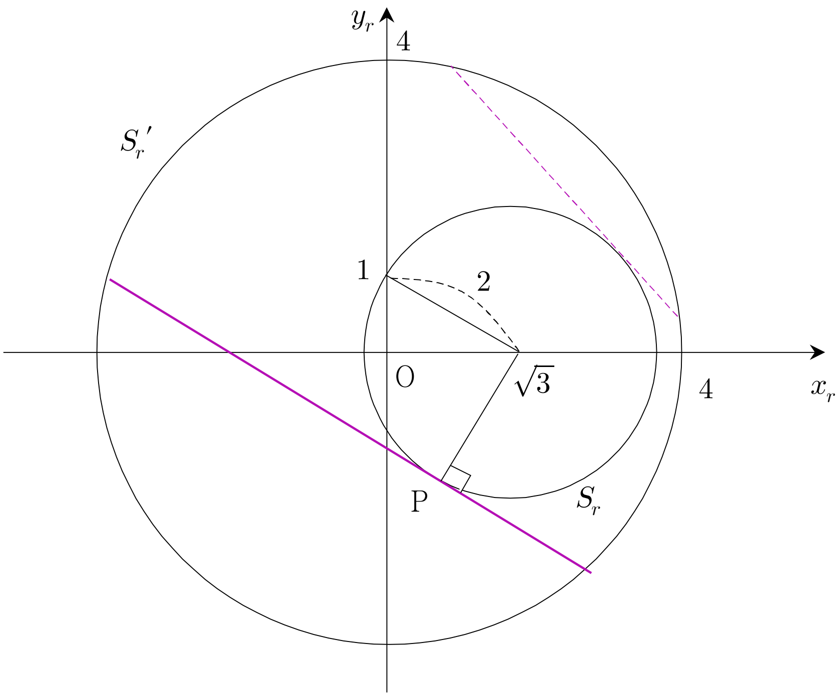
그러면 $\sqrt{3}<4-2$이므로, 삶은 계란의 흰자와 노른자처럼 구 S' 내부에 구 S가 존재한다.

그런데, 두 구 S, S'의 중심이 각각 $(1,1,1),(0,0,0)$이므로

x, y, z축을 온전하게 그리고서 상황을 그리려면 상당히 난감해진다.

대신, 이러한 특성을 온전히 반영해서 좌표를 새로 잡아도 된다.

왜냐면 결국 문제에서 말하는 교원의 넓이의 최댓값을 구하는데 상관없기 때문이다.



즉, 원점은 유지한 채 서로 수직인 좌표축을 적당히 회전(rotation)해서

위와 같은 상황을 캐치할 수 있다.

두 구 S_r, S_r'의 중심이 각각 $(\sqrt{3},0,0),(0,0,0)$이고, 반지름이 각각 $2, 4$일 때,

이제 구 S_r 위의 한 점 P에서의 접평면과 구 S_r'이 이루는 교원의 넓이의 최댓값을 구하자.

$x_r y_r$ 평면으로 단면화를 해보면 해당하는 교원은 마치 선분처럼 보이고,

이 선분의 길이가 곧 교원의 지름에 해당하기 때문에

선분의 길이가 최대인 지점의 P를 찾아야 한다.

직관적으로 $\mathrm{P}(\sqrt{3}-2, 0)$인 것이 보이지만, 계산을 통해 구해보자.

$x_r y_r$ 평면으로 단면화를 했을 때 $\mathrm{P}(\sqrt{3}+2\cos\theta, 2\sin\theta)$라 둘 수 있고,

$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = (\sqrt{3}+2\cos\theta)^2 + 4\sin\theta^2 = 7+4\sqrt{3}\cos\theta \geq 7-4\sqrt{3}$$

이므로 $\overline{\mathrm{OP}} \geq \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 가 되고, 이때 $\theta=\pi$로서 $\mathrm{P}(\sqrt{3}-2, 0, 0)$임을 알 수 있다.

그러면 해당하는 교원의 넓이의 최댓값은

$$\left(4^2-\overline{\mathrm{OP}}^2\right)\pi = (9+4\sqrt{3})\pi$$

이므로 $a+b=13$이 답이 된다.

2012년 09월 평가원 수리(가형) 29번

당시로서는 뜬금없이 시험이 어렵게 출제된 터라 느긋하게 이 문제를 풀어보기가 힘들었다.

우선 (나)의 조건에 따라 순서대로 k를 대입해보자.

$k=3,2,1$ 순으로 대입하면 수치 관계가 조금 더 잘 보인다는 말도 있다.

그러면

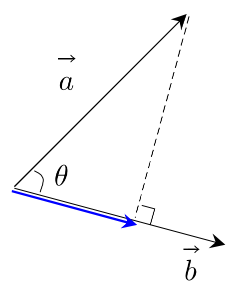
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}-\dfrac{1}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\right|^2=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}-\dfrac{1}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\right|^2=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}-\dfrac{1}{4}\left|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\right|^2=1 \rightarrow \overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}=1 \end{cases}$$

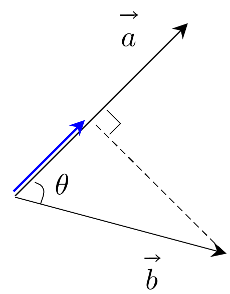
에서 $\left|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\right|=2, \overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}=3, \overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}=1$을 얻을 수 있다.

여기서 주어진 정보를 보고 그냥 알아야 한다는 점에서 혹자에게는 풀이가 어려울 수도 있는데,

정리한 조건에서 $\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}$가 공통으로 들어가 있으므로 기준을 $\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}$로 삼아서 그림을 그려보자.

단, 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{b}|(|\vec{a}|\cos\theta)=|\vec{a}|(|\vec{b}|\cos\theta)$의 기하학적인 의미를 보면



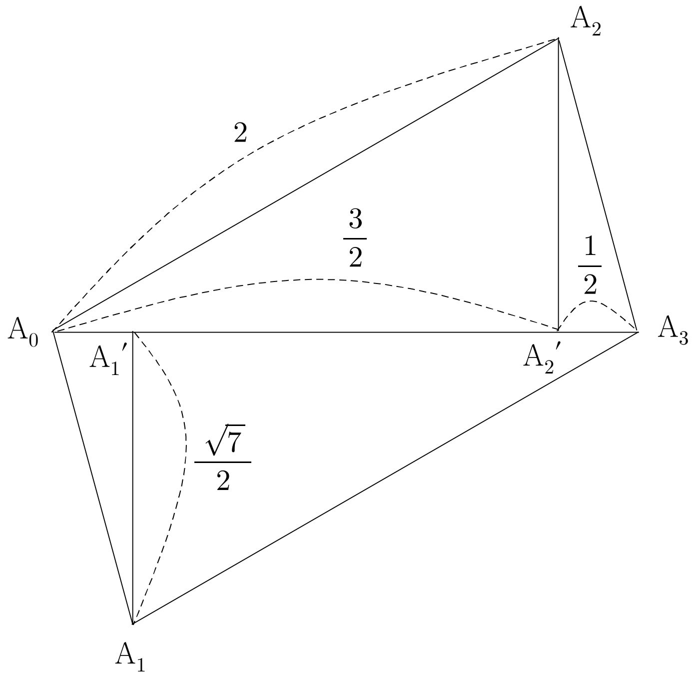


에서처럼 동일방향 성분의 곱으로 보자.

(가) 조건과 $\left|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\right|=2$로부터 네 점 $\mathrm{A_0, A_1, A_2, A_3}$에서

$\left|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}}\right|$을 제외하곤 각 점들 간의 거리가 모두 2이다.

그러면 고정된 두 점 $\mathrm{A_0, A_3}$에 대하여 다음과 같이 그려볼 수 있다.



$\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_2}=3$에서 점 A_2의 선분 A_0A_3 위로 내린 수선의 발 $A_2{}'$에 대해

$\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_2}=\left|\overrightarrow{A_0A_3}\right|\left|\overrightarrow{A_0A_2{}'}\right|=3$에서 $\left|\overrightarrow{A_0A_2{}'}\right|=\dfrac{3}{2}$임을 알 수 있고, 마찬가지로

$\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_1}=1$에서 점 A_1의 선분 A_0A_3 위로 내린 수선의 발 $A_1{}'$에 대해

$\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_1}=\left|\overrightarrow{A_0A_3}\right|\left|\overrightarrow{A_0A_1{}'}\right|=1$에서 $\left|\overrightarrow{A_0A_1{}'}\right|=\dfrac{1}{2}$이 된다.

그리고 피타고라스 정리를 이용해서 나머지 길이도 구해줄 수 있다.

이렇듯 기준이 되는 고정된 두 점 A_0, A_3에 대하여 나머지 두 점 A_1, A_2도 잡아줄 수 있다.

마지막으로 이 문제의 포인트는, 삼각형 $A_0A_3A_2, A_0A_3A_1$는 모두 직선 A_0A_3를 회전축 삼아

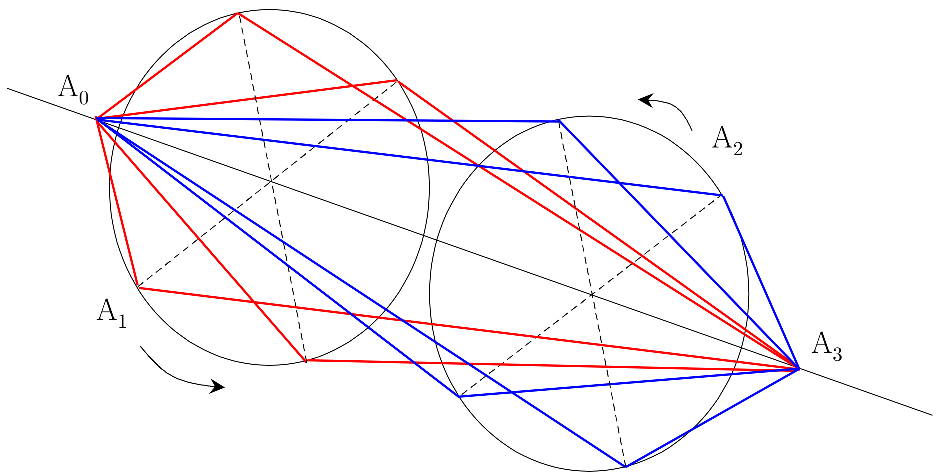
뱅글뱅글 돌아가도 주어진 조건을 모두 만족한다는 것이다.

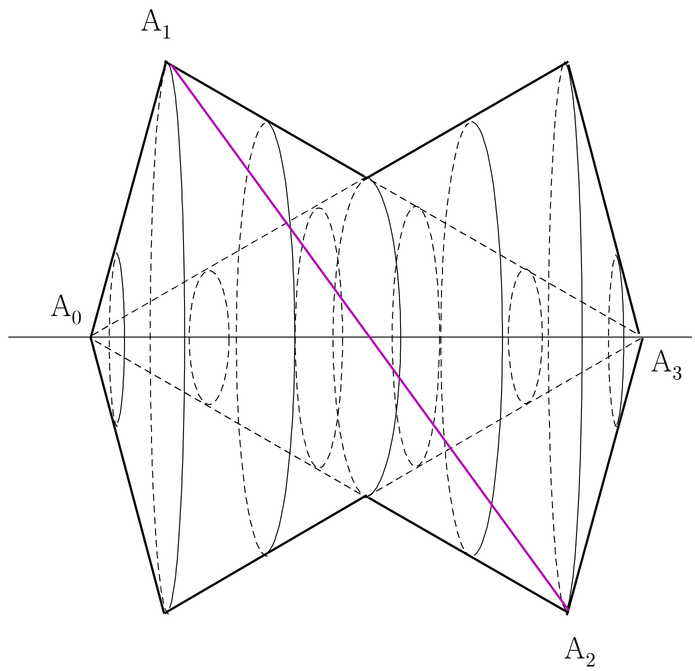
이 문제에서 등장하는 삼각형들은 실제 색종이를 오려서 만든 현실의 대상이 아니라

철저하게 이상적으로 존재하는 삼각형들이므로 자유롭게 회전을 고려할 수 있다.

그렇다면 아마도 다음과 같이 적분 문제에서 등장함직한 개형을 상상할 수 있을 것이다.

꼭 그려서 캐치하지 않아도 된다.





따라서 두 점 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$의 거리가 최대가 되려면,

동일 평면상에 존재하면서 반대쪽에 위치해야 한다. 그렇다면 거리가 최소가 될 때는?

이때 두 점의 최대거리는 $M^2 = 1^2 + (\sqrt{7})^2 = 8$이 된다.

2012년 11월 대수능 수리(가형) 20번

지금 이 글을 읽고 있을 정도라면 적어도 어지간한 수능 공간도형 문제는

손에 마르고 닳도록 충분히 풀어본 프로 수험생일 것이기에

좌표를 이용해 직선의 방정식을 세우거나, 직각삼각형의 닮음비를 이용하거나

등등 갖가지 풀이를 생각해서 접근하려 할 것이다.

모든 풀이와 순간 순간의 사고 과정은 존중되어 마땅하나

여기서는 지면 관계상 정사면체의 높이를 이용한 접근을 해보겠다.

자신의 풀이에 논리적 오류가 없고, 적당한 시간 내에 올바른 정답을 이끌어 냈다면

굳이 또 다른 풀이에 자신을 맞춰갈 이유는 없다.

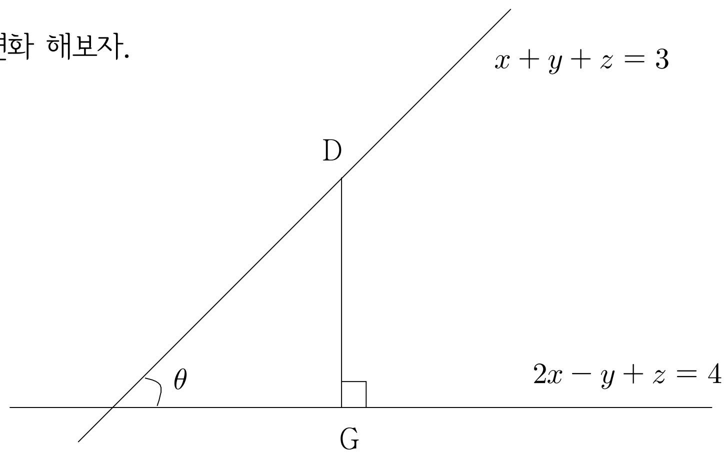
한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$임이 익숙해져있듯,

한 변의 길이가 a인 정사면체에선 높이가 $a\sqrt{\frac{2}{3}}$임을 외우고 있다고 가정하겠다.

문제에 등장하는 두 평면 $2x-y+z=4, x+y+z=3$이 이루는 이면각 θ에 대해

$$\cos\theta = \frac{2-1+1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

이므로 다음과 같이 단면화 해보자.



삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하였을 때, 수선 관계를 보면

평면 $x+y+z=3$ 위의 꼭짓점 D에서 평면 $2x-y+z=4$에 내린 수선의 발이 G이고,

만약 점 G에서 평면 $x+y+z=3$에 이르는 거리를 계산한다면 $\overline{\mathrm{DG}}$가 나오지 않는다.

이때는 직선 DG의 방향벡터를 곧 평면 $2x-y+z=4$의 법선벡터인 $(2,\,-1,1)$로 보고,

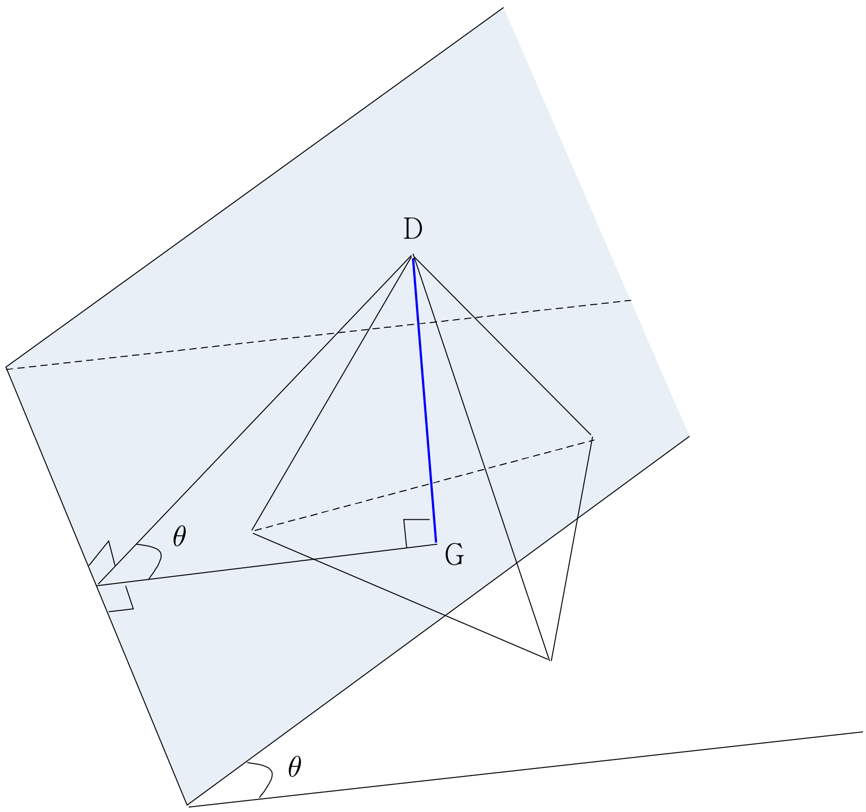
$$\overleftrightarrow{\mathrm{DG}}\ :\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{1}$$

이라 세운 후 $\mathrm{D}(2t+1,\,-t+1,t+3)$이라 매개변수를 잡고 평면 $x+y+z=3$에 대입하면

$t=-1$이 되고 정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이를 a라 하였을 때

$$\overline{\mathrm{DG}}=\sqrt{6}=a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

로부터 $a=3$임을 알 수 있다.



※ $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$를 직접 쓰지 않은게 아쉬운데,

만약 꼭짓점 G에서 평면 $x+y+z=3$에 수선을 내렸다면

직각삼각형의 닮음비를 써서 푸는데 사용할 수도 있었을 것이다.

2012년 11월 대수능 수리(가형) 28번

쉽다면 쉽고 어렵다면 어려운 문제이다.

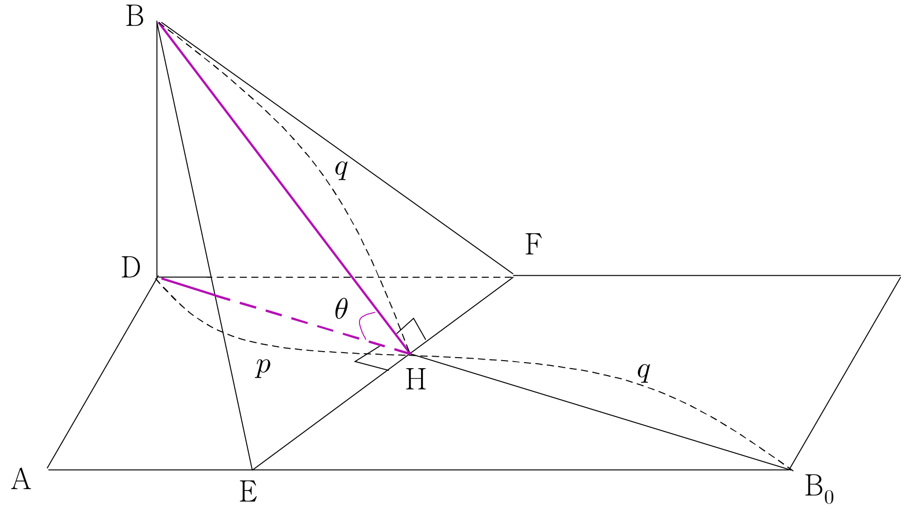
이면각을 따질 때는 정사영을 통해 간접적으로 구하거나, 제이코사인법칙을 이용하거나

내지는 이면각을 품는 직각삼각형의 성분을 찾아서 풀 수도 있지만

가장 심플한 방법은 두 면이 이루는 교선을 먼저 찾고

교선 위의 어떤 한 점으로부터 각 평면에 수직인 두 반직선간에 이루는 각으로 생각하는 것이다.

마침 두 면의 교선으로 $\overline{\mathrm{EF}}$ 가 보이고, 점 B 의 평면 AEFD 위로의 정사영이 점 D 이므로,



교선 $\overline{\mathrm{EF}}$ 위의 한 점 H 를 잡아주면 $\theta = \angle\mathrm{BHD}$ 가 된다.

문제에서 주어진 두 개의 그림 중에서 왼쪽 그림에서는 $\overline{\mathrm{BD}} \perp \overline{\mathrm{EF}}$ 라고 말할 수 없지만

오른쪽 그림에서 점 B 의 평면 AEFD 위로의 정사영이 점 D 라는 사실로부터

$\overline{\mathrm{BD}} \perp \overline{\mathrm{EF}}$ 라고 확신할 수 있기 때문이다.

이때 $\overline{\mathrm{DH}} = p, \overline{\mathrm{HB}} = q$ 라 하면 $p + q = 3\sqrt{10}$ 이고,

직각삼각형 $\mathrm{ABD}, \mathrm{HB_0E}$ 의 닮음 관계로부터 $(p+q) : 9 = 6 : q$ 를 얻으므로

이를 연립하면 $p = \dfrac{6}{5}\sqrt{10}, q = \dfrac{9}{5}\sqrt{10}$ 이 나온다.

따라서, $60\cos\theta = 60 \cdot \dfrac{p}{q} = 40$ 이 답이다.

2013년 11월 대수능 수학 영역(B형) 29번

$sol.1)$ 삼각치환을 이용한 수식으로 밀어 붙이는 풀이

구하라는 벡터를 좀 더 의미를 파악하기 쉽도록 준 식을 변형하면

$$2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2=\left(|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2\right)+\left(|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2\right)\cdots(*)$$

그리고, $\overrightarrow{PQ}$가 $\overrightarrow{P_1Q_1},\overrightarrow{P_2Q_2}$와 이루는 예각의 크기를 각각 α,β라 했을 때

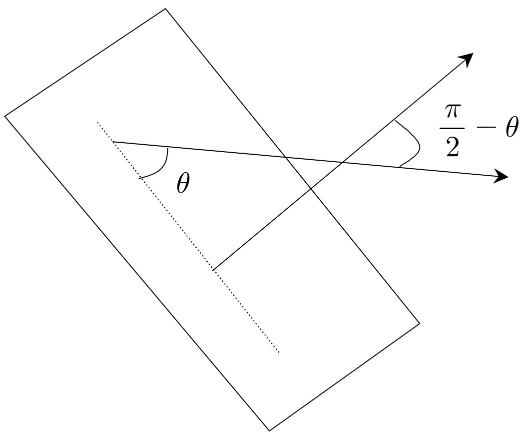
$|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2=|\overrightarrow{PQ}|^2\cos^2\alpha$와 $|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2=|\overrightarrow{PQ}|^2\cos^2\beta$가 됨을 이용하여 (*)를 다시

$$|\overrightarrow{PQ}|^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\quad\cdots\quad(**)$$

로 깔끔하게 바꿀 수 있다.

그리고 최댓값을 구하라고 하고 있으니 $\overrightarrow{PQ}$가 지름이 되도록 4로 잡아주면

결국 $\sin\alpha,\sin\beta$에 대한 식을 세워 해석하는 작업이 남게 된다.
한편, 직선의 방향벡터와, 평면의 법선벡터를 내적하면
아래 그림에서 볼 수 있듯 코사인이 아닌 사인에 대한 값으로 정리된다는 점에 주의해서,



$\overrightarrow{PQ}=4(a,b,c)$의 방향벡터 성분인 (a,b,c)와

각각의 평면의 법선벡터 $(0,1,0),(0,1,\sqrt{3})$가 이루는 사인 값을 구해보면

$\sin\alpha=b,\sin\beta=\dfrac{b+\sqrt{3}c}{2}$가 나오고, 식 $(**)$는

$$|\overrightarrow{PQ}|^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\le 16\left\{b^2+\left(\frac{b+\sqrt{3}c}{2}\right)^2\right\}$$

로 바뀐다.

여기서 까다로운데, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=4(a,b,c)$의 방향벡터 (a,b,c)는 사실 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$가 x,y,z축과 이루는 각에 대한 코사인 값으로 각 성분이 방향코사인이 되어 $-1\le a,b,c\le 1$와 $a^2+b^2+c^2=1$를 만족한다.

이때, $b^2+\left(\dfrac{b+\sqrt{3}\,c}{2}\right)^2$가 최대가 되려면 $a=0$이어야 하고,

그러면 $b^2+c^2=1$를 만족하므로 다시 $b=\cos\phi, c=\sin\phi$라 치환하면

$$b^2+\left(\frac{b+\sqrt{3}\,c}{2}\right)^2=\frac{5b^2+2\sqrt{3}\,bc+3c^2}{4}$$

$$=\frac{2b^2+2\sqrt{3}\,bc+3}{4}=\frac{1}{4}(1+\cos2\phi+\sqrt{3}\sin2\phi+3)$$

$$\le\frac{1}{4}(4+2)=\frac{3}{2}$$

가 되어 최종적으로 구하고자 하는 값은

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\le 16\left\{b^2+\left(\frac{b+\sqrt{3}\,c}{2}\right)^2\right\}\le 16\cdot\frac{3}{2}=24$$

가 된다.

여기서 선행되어야 할 지식들이 여럿 있고, $\boxed{}$ 부분에서 논리적 비약이 있다.

***sol.2)* 단면화**

$2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}|^2=\cdots\le 16(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)$까지 왔다고 하자.

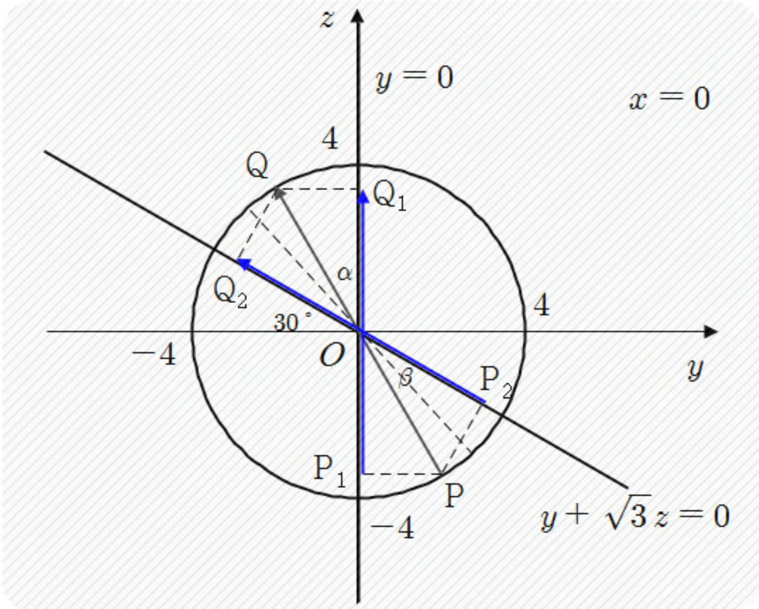
이번에는 조금 더 시각적으로 α,β를 관찰해 보려는데,

각 평면을 적절하게 평행이동 하여도 크기가 변하지 않음을 이용할 것이다.

그런데 이왕에 평행이동 하여도 상관없다면

각각의 평면이 구의 중심인 원점을 지나도록 $y=0, y+\sqrt{3}z=0$라고 잡자.

그리고 이때 평면 $x=0$으로 단면화 해서 관찰해보면 다음과 같다.



그러면 $\alpha+\beta=60^\circ$ 이고, 직관적으로 $\alpha=\beta=30^\circ$ 일 때 답이 나올 것 같지만,

아쉽게도, 그리고 놀랍게도 그 때가 답이 아니다!

(어떤 풀이는 이 부분에서 논리적 도약을 하여 곧바로 정답의 상황으로 가기도 한다.)

귀찮더라도 직접 삼각함수 계산을 해보면

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin^2\alpha+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$$

$$=\sin^2\alpha+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2$$

$$=\frac{5}{4}\sin^2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{3}{4}\cos^2\alpha$$

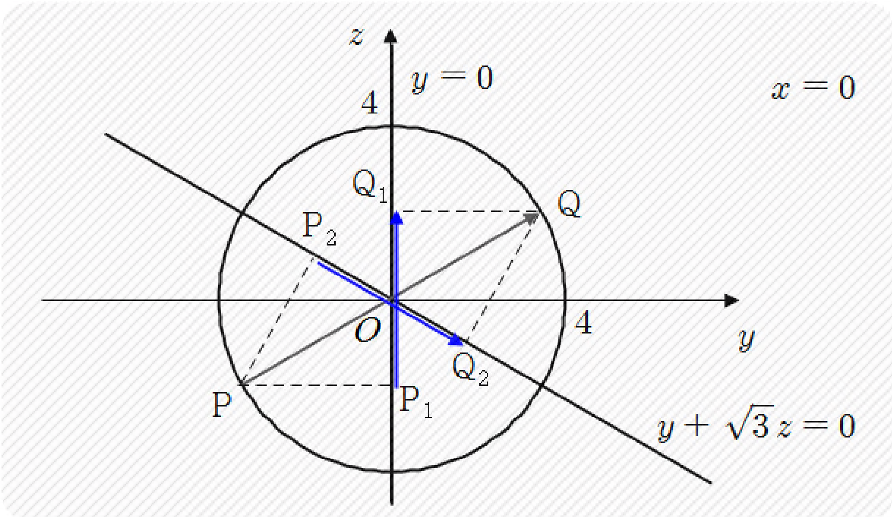
$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sin^2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1-\cos2\alpha-\sqrt{3}\sin2\alpha}{4}\le\frac{3}{4}+\frac{1+2}{4}=\frac{3}{2}$$

가 되어 답은 $2\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2-\left|\overrightarrow{P_1Q_1}\right|^2-\left|\overrightarrow{P_2Q_2}\right|^2=\cdots\le16\cdot\frac{3}{2}=24$가 나온다.

즉, $\alpha=-60^\circ,\beta=120^\circ$ 인 상황에서 최댓값이 발생하며,

그 순간을 포착하면 다음과 같이 두 평면의 둔각 부분으로 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$가 향할 때이다.



$sol.3)$ **한석원 선생님의 해설 - 수험생의 관점**

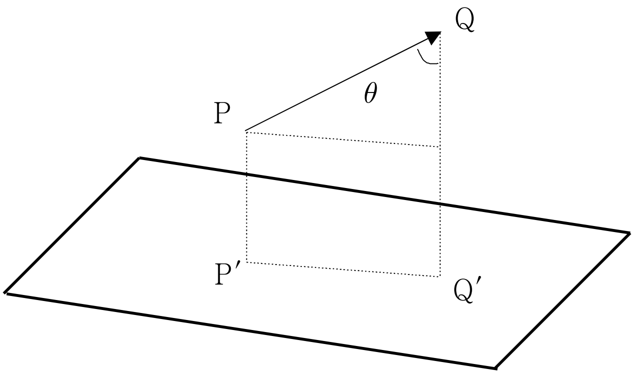
이 문제를 실전에서 풀어내기 위해서는 28번까지 문제들이 어렵지 않았으니

여기에 투자할 시간을 많이 확보하였다는 전제가 필요하다.

전체적으로 $sol.1)$과 유사하다.

하지만 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(a,b,c)$로 방향벡터 성분으로 쪼개지는 않고 통째로 계산하자.

또, 그림 하나 만으로 $\cos\theta_1=\dfrac{b}{4}, \cos\theta_2=\dfrac{b+\sqrt{3}c}{8}$를 충분히 이끌어 낼 수 있고



그래서 $a^2+b^2+c^2=16$일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=4$이라 일단 인정하고서

$$\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}\right|^2\right) + \left(\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}\right|^2\right) = \frac{4b^2 + (b + \sqrt{3}\,c)^2}{4}$$

의 최댓값은 역시 삼각치환 $b = 4\cos\theta, c = 4\sin\theta$를 이용하여 구하는데,

반각공식, 삼각함수 합성 등을 이용하여 계산하면 최댓값이 24임을 알 수 있다.

그리고, 다시 돌아가서 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| = 4$ 부분에 만약 $b^2 + c^2 = 16 - a^2$이라 한다면,

$$b = \sqrt{16 - a^2}\cos\theta, c = \sqrt{16 - a^2}\sin\theta$$

가 되고, 이를 $\dfrac{4b^2 + (b + \sqrt{3}\,c)^2}{4}$에 넣어도

최댓값이 $\dfrac{3}{2}(16 - a^2)$이 되어 $a = 0$이어야만 함을 알 수 있다.

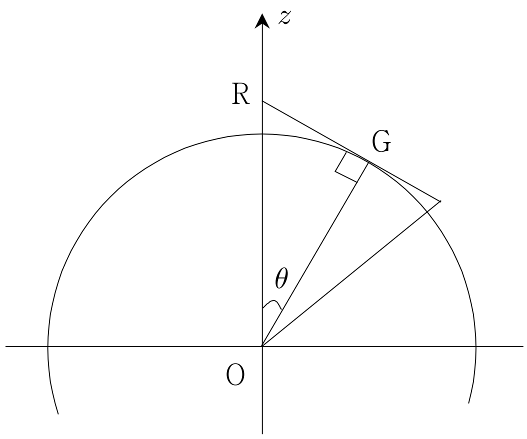
2014년 10월 교육청 수학 영역(B형) 30번

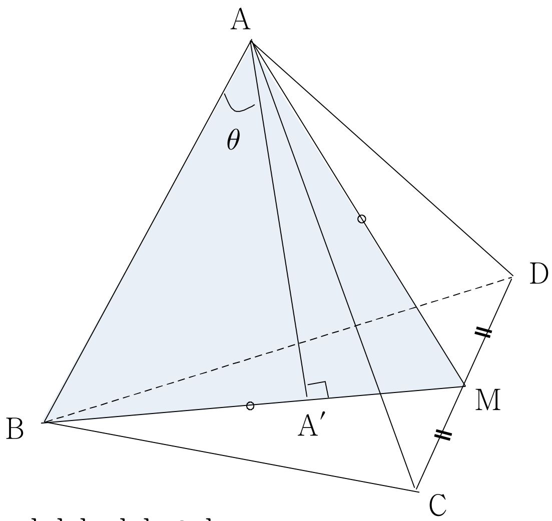
한편으로는 며칠 뒤 있을 2015학년도 수능 29번을 예언하였다고 볼 수도 있다.

삼각형 PQR의 무게중심을 G라 하였을 때,

면 PQR이 z축과 만난다면 울퉁불퉁한 모습으로 인해 사고가 불필요하게 복잡해질 수 있으나

대신 선분 OG, 즉 점 G의 자취가 되는 구의 일부를 위주로 보면 핵심 관계가 더 잘 보인다.





한번 그림 속에 손을 집어 넣고서 삼각형 PQR을 만지작 거려 보자.

그러면 위와 같이 점 G가 최대한 z축에서 멀리 떨어져 있을 때

면 PQR의 정사영 넓이가 최소가 되게끔 최대한 기울어지고,

또한 θ는 최대가 됨을 알 수 있다.

한편, 정사면체 ABCD를 $\overline{\mathrm{CD}}$의 중점 M에 대해 자른 단면인 삼각형 ABM은

정삼각형이 아니라 이등변삼각형임을 떠올리며 이때 $\mathrm{A, B, C, D, M}$등은 임의로 잡아준 것

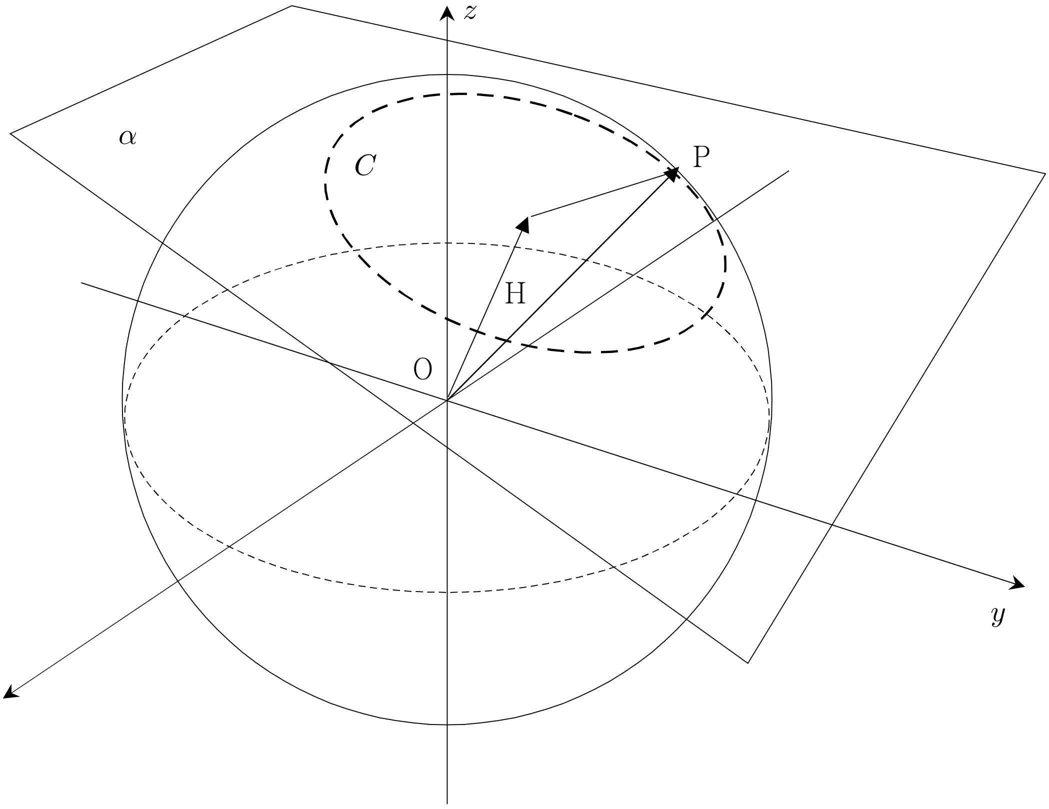
$$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{A'B}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

를 구할 수 있고,

$$S \geq \frac{\sqrt{3}}{4} \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = k$$

로부터 $160k^2 = 20$을 얻을 수 있다.

2014년 11월 대수능 수학 영역(B형) 29번



평면 α의 크기가 1인 법선벡터, 즉 단위법선벡터를 (a, b, c)라 하면

$a^2+b^2+c^2=1$이고,

$$\alpha : a(x-0)+b(y-5)+c(z-5)=0$$

즉, $\alpha : ax+by+cz=5b+5c$ 라 둘 수 있다.

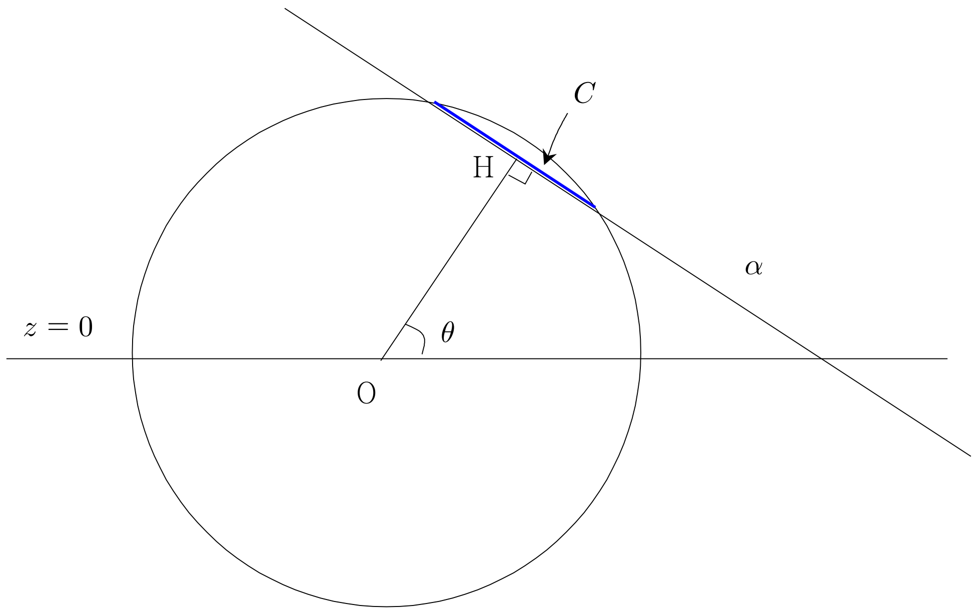
그리고 평면 α와 구가 만나서 생기는 교원을 C라 하고, 그 중심을 H라 하자.

그러면 교원의 반지름으로서 $\overline{\mathrm{HP}}=1$이고, $\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{50-1}=7$이다.

한편, 원점과 평면 α 사이의 거리로부터

$$\frac{5b+5c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=5b+5c=7$$

임을 알 수 있고,



xy평면의 법선벡터와 α평면의 법선벡터가 이루는 예각 $\dfrac{\pi}{2}-\theta$에 대하여

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=c$$

이고, 그리고 교원 C의 xy평면 위로 정사영 넓이는 $\pi\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\pi\sin\theta=c\pi$

이므로 c의 최댓값을 구하면 된다.

정리하자면, $a^2+b^2+c^2=1$이고, $b+c=\dfrac{7}{5}$일 때 c의 최댓값을 구하면 되는 것이다.

이때 $b^2+c^2=1-a^2$에서 $(b+c)^2=b^2+c^2+2bc=1-a^2+2bc=\dfrac{49}{25}$이고,

$bc=\dfrac{12}{25}+\dfrac{a^2}{2}$이므로 $t^2-\dfrac{7}{5}t+\dfrac{12}{25}+\dfrac{a^2}{2}=0$의 두 근을 b,c로 보고

$$c=\frac{\dfrac{7}{5}+\sqrt{\dfrac{49}{25}-4\left(\dfrac{12}{25}+\dfrac{a^2}{2}\right)}}{2}\le\frac{\dfrac{7}{5}+\sqrt{\dfrac{1}{25}}}{2}=\frac{4}{5}$$

가 되어 구하고자 하는 교원 C의 xy평면 위로 정사영 넓이의 최댓값은 $\dfrac{4}{5}\pi$가 된다.

따라서 $p+q=9$가 답이다.

※ 단면화를 통한 풀이는 한번 생각 해보길 바란다.