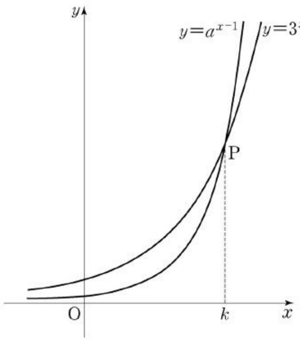
[13~14] $a>3$인 상수 a에 대하여 두 곡선 $y=a^{x-1}$과 $y=3^x$이 점 P에서 만난다. 점 P의 x좌표를 k라 할 때, 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



14. 점 P에서 곡선 $y=3^x$에 접하는 직선이 x축과 만나는 점을 A, 점 P에서 곡선 $y=a^{x-1}$에 접하는 직선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 $\mathrm{H}(k, 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AH}}=2\overline{\mathrm{BH}}$일 때, a의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

*sol*1)

A와 B의 x좌표를 각각 b, c라고 하면, 접선의 방정식에서

$0=\ln 3\times 3^k(b-k)+3^k \Rightarrow \overline{\mathrm{AH}}=k-b=\dfrac{1}{\ln 3}$

$0=\ln a\times a^{k-1}(c-k)+a^{k-1} \Rightarrow \overline{\mathrm{BH}}=k-c=\dfrac{1}{\ln a}$

이고, $\overline{\mathrm{AH}}=2\overline{BH}$이므로 $\dfrac{1}{\ln 3}=\dfrac{2}{\ln a}$입니다.

$\therefore a=9$

*sol*2)

두 접선과 x축, $x=k$에 의해 결정되는 직각삼각형 PHA와 PHB는 높이는 동일하고 밑변의 길이는 $\triangle$PHA가 $\triangle$PHB의 두배입니다. 따라서 $x=k$에서의 접선의 기울기는 a^{x-1}가 3^x의 2배가 됩니다.

식으로 쓰면 $\ln a\times a^{k-1}=2\times\ln 3\times 3^k$이고 P는 두 곡선의 교점이므로 $a^{k-1}=3^k$.

$\therefore a=9$

19. 좌표공간에서 직선 $l: \frac{x}{2} = 6 - y = z - 6$과 평면 α가 점 P$(2, 5, 7)$에서 수직으로 만난다. 직선 l 위의 점 A(a, b, c)와 평면 α 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = 6$일 때, $a+b+c$의 값은? (단, $a>0$) [4점]

① 15　② 16　③ 17　④ 18　⑤ 19

*sol*1)

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$는 평면 α와 수직이고 점 Q가 α위의 점이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = 6$, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = \sqrt{6}$ 입니다.

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$이 α의 법선벡터임을 생각하면 $\overrightarrow{PA} = (2t, -t, t)$로 둘 수 있고 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = \sqrt{6}$을 계산하면
$t = \pm 1$, $a \neq 0$임을 고려하면 점 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = (4, 4, 8)$, 따라서 $a+b+c$의 값은 16입니다.

*sol*2)

위와 같이 풀어도 어렵지 않게 풀리는 문제이지만 벡터의 합의 기하학적 의미를 생각하면
조금 더 간단하게 풀 수 있습니다.(벡터의 합을 점의 평행이동으로)

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PA}}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$는 평면 α의 법선벡터입니다. 그러므로 점 A는 점 P가 법선벡터의
상수배만큼 평행이동한 점으로 볼 수 있습니다.

여기에서 평면 α의 법선벡터의 크기에 대해 생각해봅시다.
가장 간단한 벡터로 $\vec{n} = (2, -1, 1)$를 생각하면, $|\vec{n}| = \sqrt{6}$이다. $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = |\vec{n}|$이므로,
점 A는 점 P에서 $\pm \vec{n}$만큼 평행이동한 점입니다. 이제 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}$를 계산하면 같은 답을
구할 수 있습니다.

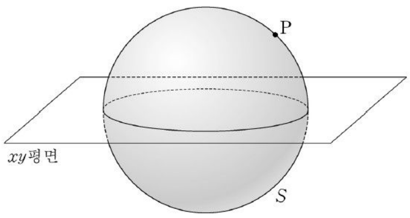
위에서는 설정한 법선벡터의 크기가 마침 $\sqrt{6}$이어서 바로 답이 나와버렸지만
법선벡터를 $(6, -3, 3)$으로 설정했을 경우를 가정하고 조금 더 생각해보겠습니다.

이 경우엔 설정한 법선벡터의 크기가 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$와 일치하지 않습니다.
이럴 경우 위에서 얘기한 상수배에 해당하는 상수를 찾으면 되고,
그 상수는 벡터의 크기비교를 통해 구할 수 있습니다.

$\vec{n} = (6, -3, 3)$이라고 하면 $|\vec{n}| = 3\sqrt{6}$입니다. 그런데 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = \sqrt{6}$이므로
마찬가지로 A는 점 P가 $\pm \frac{1}{3}\vec{n} = \pm(2, -1, 1)$만큼 평행이동한 점임을 알 수 있게 됩니다.

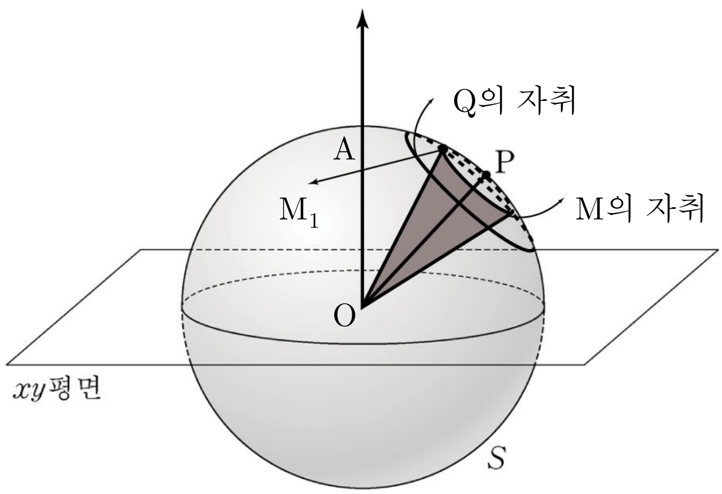
29. 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2=50$과 점 $\mathrm{P}(0, 5, 5)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\pi$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) 원 C는 점 P를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다. (나) 원 C의 반지름의 길이는 1이다.



$sol1)$

선분 PQ가 원 C의 지름이 되도록 하는 점 Q의 자취를 생각합시다.
C의 반지름이 1이므로 선분 PQ의 길이는 2입니다. 또 Q는 구 S위의 점이므로
Q의 자취는 P를 중심으로 하는 반지름이 2인 구와 구 S의 교선, 즉 원의 원주 입니다.
문제를 풀기 위해서는 이면각의 크기의 최솟값을 구해야하는데 이를 평면들의 교선을
이용해 찾기에는 무리가 있으니 평면의 법선벡터 사이의 각을 이용하겠습니다.
원 C의 중심을 M이라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$은 원 C를 포함하는 평면의 법선벡터가 됩니다.
또 M은 Q와 같이 P를 중심으로 하는 반지름이 1인 구와 구 S의 교선이므로 M의 자취 또한
원의 원주입니다. 즉 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$의 자취는 밑면이 $\overrightarrow{OP}$에 수직인 원뿔의 모선입니다.
$\mathrm{A}(0, 0, 5\sqrt{2})$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$는 xy평면의 법선벡터입니다.
이제 $\angle \mathrm{POM} = \phi$라고 하고 두 법선벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$이 이루는 각을 θ라고 하고 점 O, A, P와
같은 평면에 있는 점 M 중 A에 가까운 것을 M_1이라고 하면 M이 M_1일 때 θ가 최솟값인
$\theta_{\min} = \frac{\pi}{4} - \phi$을 가질것은 자명합니다. $\cos\phi = \sqrt{\frac{49}{50}}$, $\sin\phi = \sqrt{\frac{1}{50}}$ 이므로 덧셈정리에 의해



$\cos\theta_{\min} = \frac{4}{5}$입니다.
따라서 원 C의 xy평면에의 정사영의 넓이의 최댓값은 $\pi \times \frac{4}{5}$이고, $p+q$의 값은 9입니다.

$sol2)$

이번에는 좌표를 이용해서 풀어보겠습니다.
원 C의 중심을 M이라고 하고 $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(a,b,c)$라고 하겠습니다.
각 OMP는 수직이고 $|\overrightarrow{\mathrm{MP}}|=1, |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{50}$이므로 피타고라스 정리에 의해
$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2=a^2+b^2+c^2=49$입니다. 또 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{PM}}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 만족하는
점 Q를 생각하면 Q는 구 S위의 점이며 Q의 좌표는 $(2a, 2b-5, 2c-5)$입니다.
이 좌표를 구의 방정식에 대입해서 정리하면 $b+c=\dfrac{49}{5}$를 얻습니다. $(\because a^2+b^2+c^2=49)$

여기까지 계산하면 M이 구와 평면의 교선인 원 위의 점임을 알 수 있으므로 $sol1)$과
같이 생각해도 답을 구할 수 있지만, 일단 좌표를 이용한 풀이로 끝까지 가보겠습니다.

xy평면의 법선벡터를 $(0,0,1)$로 잡으면 두 법선벡터가 이루는 각 θ에 대한 코사인값은
$\cos\theta=\dfrac{|(0,0,1)\bullet(a,b,c)|}{|(0,0,1)|\times|(a,b,c)|}=\dfrac{|c|}{7}$입니다.
$b=\dfrac{49}{5}-c$를 $a^2+b^2+c^2=49$에 대입한 후 c에 대해 근의 공식을 적용하면
$c=\dfrac{49\pm\sqrt{49-50a^2}}{10}$이고,
구하는 것은 $\dfrac{|c|}{7}$의 최댓값이므로 $c=\dfrac{49+\sqrt{49-50a^2}}{10}$으로 생각하면 됩니다.
a^2가 작아질 수록 c의 값은 커지므로, $a^2=0$일 때 c의 최댓값을 가집니다.
$a^2=0$을 대입하면 $c_{\max}=\dfrac{49+\sqrt{49}}{10}=\dfrac{56}{10}=\dfrac{28}{5}$

$\therefore \cos\theta_{\min}=\dfrac{c_{\max}}{7}=\dfrac{4}{5}$

따라서 정사영의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{4}{5}\pi$이고 $p+q$는 9