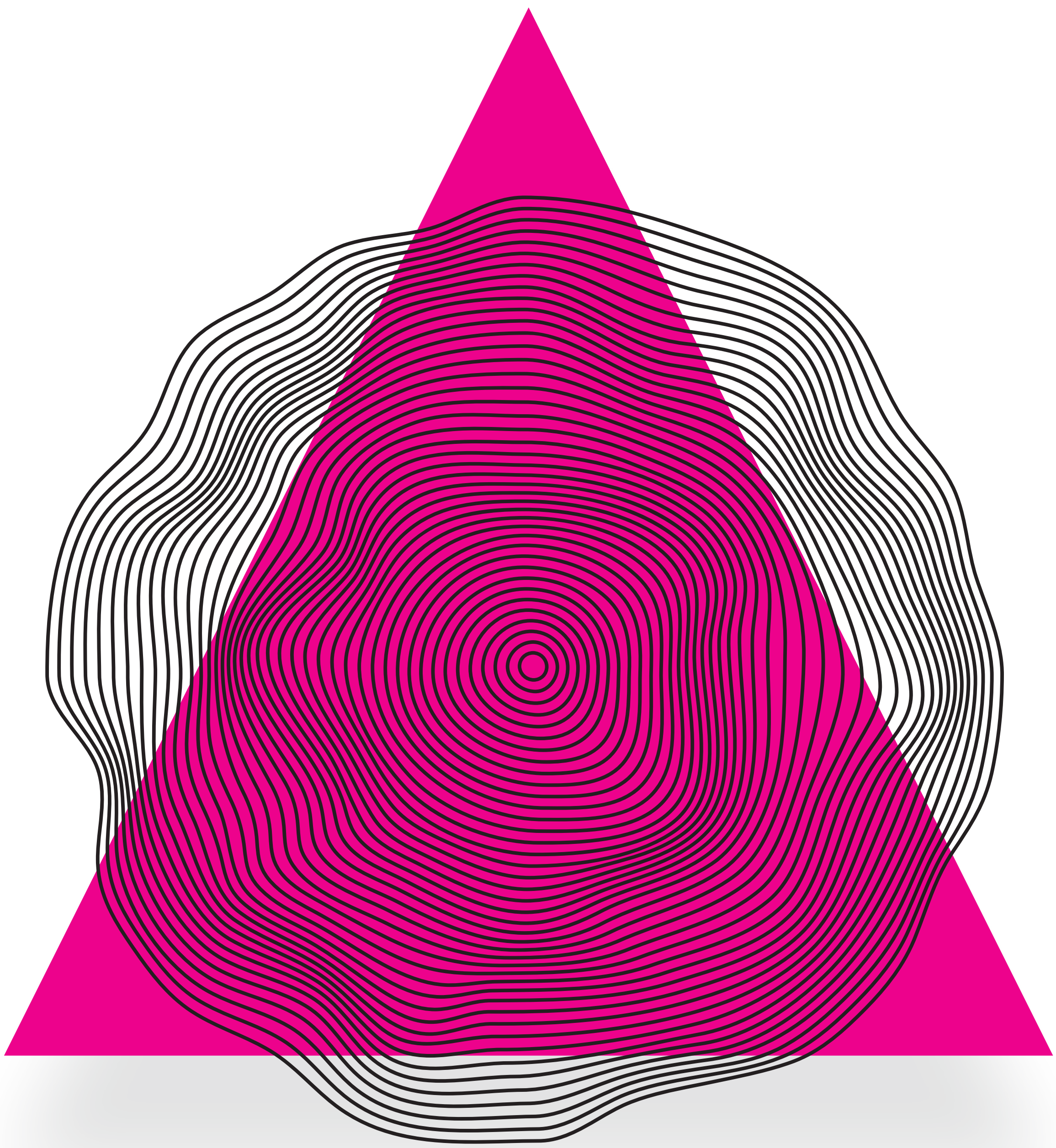
기출의_ 파급효과



수학영역 × 수학Ⅱ / 하 × EXTENSION

수학Ⅱ(하)
EXTENSION
기출의 파급효과

수학Ⅱ(하)

저자의 말

1. 기출의 파급효과 standard에는 수학II 기출을 푸는 데 필수적인 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

1년 동안 열심히 공부한 학생이 현장에서 평가원 문제를 틀리는 이유는 개념이 부족해서가 아니라, 조건이 필연적으로 요구하는 태도와 도구가 없기 때문입니다. 따라서 각 Chapter를 교과서 목차를 따르지 않고 기출을 푸는데 필요한 태도와 도구를 바탕으로 작성했습니다.

2. 분권의 이유

'미적분도 아니고 수학II 수준에서 분권이 필요할 정도의 분량이 나올 수 있나?' 하는 의문이 들 수도 있습니다. 분권에는 크게 두 가지 이유가 존재하는데,

(1) 필수적이지만 교과서에는 없는 Chapter의 존재

〈Chapter 3. 다양한 정리와 함수의 극대, 극소〉, 〈Chapter 4. 다항함수, 대칭성〉, 〈Chapter 6. 함수의 방정식vs항등식vs부등식〉, 〈Chapter 9. 합성함수와 역함수〉, 〈Chapter 10. 복합적 개념이 포함된 킬러 문항〉 다섯 개의 챕터는 교과서에 없지만 중요한 태도와 도구를 정리한 챕터입니다.

특히 〈Chapter 6. 함수의 방정식vs항등식vs부등식〉, 〈Chapter 9. 합성함수와 역함수〉는 저학년 과정에서 모두 배우는 내용이지만 방정식, 항등식, 부등식, 합성함수, 역함수의 대강의 '느낌'만 가진 채 실제 문제에서 '어떻게' 처리해야 하는지 모르는 학생이 많아 독립된 챕터를 구성했습니다. 따라서 실제 수학II 교육과정에서 직접적으로 다루는 내용보다 훨씬 많은 내용을 다룹니다.

(2) 자세한 해설

기출 해설을 정말 자세히 썼습니다.

어떤 조건부터 적용해야 하는지,
이 조건을 보고 왜 이러한 생각을 할 수밖에 없는지,
이 조건을 보고 왜 이러한 생각을 하면 안 되는지,
여기서 왜 식으로 풀어야 하는지,
여기서 왜 그래프로 풀어야 하는지에 관한 내용을 다 담았습니다.

'딱딱하고', '불친절하게' 해설하면 분량은 많이 줄일 수 있겠으나, 그 경우 '기출의 파급효과'를 선택하는 의미가 퇴색되죠. 진정한 기출 분석은 위와 같은 질문에 모두 답할 수 있게끔 공부하는 것이기에 최대한 해설을 자세하게 썼습니다.

따라서 위의 두 가지 이유로 불가피하게 분권하게 되었습니다. 추천하는 것은 상하권을 순차적으로 학습하는 것이지만 본인이 어느 한 권에 해당하는 내용에는 자신이 있으면 다른 한 권만 공부하셔도 됩니다.

3. 최중요 준킬러 이상급의 기출을 기출의 파급효과 standard 칼럼 예제로 들어 칼럼에서 배운 태도와 도구를 바로 활용할 수 있도록 하였습니다.

칼럼 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다. 예제로 든 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예제들을 '순서대로' 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

4. 선별 문항

교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 매년 빠르게 발전하는 수능을 대비하기에는 부족합니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다. 이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다. 기출의 파급효과 수학Ⅱ standard에는 평가원, 교육청, 사관학교, 경찰대 기출 중 가장 핵심이 되는 150문제를 담았습니다. 경찰대 문제는 매우 적습니다. **standard 수학Ⅱ(상) 90문제, standard 수학Ⅱ(하) 60문제입니다.**

※ 문제 좌표에서 '가형' 또는 'B형' 또는 '자연계'라고 표시된 것을 제외하면 전부 나형' 또는 'A형' 또는 '인문계' 기출입니다.

5. 더 많은 좋은 기출을 풀어보고 싶은 학생들을 위하여 기출의 파급효과 extension도 준비하였습니다.

기출의 파급효과 extension은 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 위해 예제보다는 다소 쉬운 유제 **extension 수학Ⅱ(상) 158문제, extension 수학Ⅱ(하) 116문제**로 구성되어 있습니다. extension의 유제는 연도순으로 배치되어있습니다.

standard와의 호환성을 위하여 extension에 담긴 기출 역시 standard의 목차를 따릅니다. **standard를 학습한 학생들이라면 extension을 워크북처럼 이용하시면 됩니다. standard 학습을 하면서 extension도 병행한다면 효과도 배가 될 것입니다.** standard를 잘 학습하셨다면 extension에 담긴 기출도 무리 없이 풀릴 겁니다.

standard를 학습하고 더 이상의 기출보단 n제로 학습하길 희망하는 학생들은 n제로 넘어가셔도 좋습니다. standard로 정말 중요한 기출을 거의 다 본 것이나 마찬가지이기 때문입니다.

짧거나 쉬운 Chapter는 2~3일을 잡으시고 길거나 어려운 Chapter는 6~7일 정도를 잡으시면 됩니다.
이를 따른다면 교재를 빠르면 한 달 내로 늦어도 두 달 내로 완료할 수 있을 것입니다.

개념을 한 번 떼고 쉬운 3~4점 n제(쎈 등)를 완료한 후 혼자 힘으로 할 수 있는 만큼 기출을 한 번 정도 열심히 풀고 기출의 파급효과를 시작하면 효과가 좋을 것입니다.

9월 평가원을 응시하기 전에 standard와 extension을 '제대로' 1회독을 완료하기만 해도 실력이 부쩍 늘어나 있을 것입니다. 9월 평가원 이후 수능 전까지는 기출의 파급효과에서 잘 안 풀렸던 기출 위주로 다시 풀며 끊임없이 실전 모의고사로 실전 연습을 한다면 수능 때도 분명 좋은 결과가 있을 것입니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

Chapter 06

함수의 방정식 vs 항등식 vs 부등식

유제

01 18학년도 경찰대 15번

방정식 $|x^2-2x-6|=|x-k|+2$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

02 18학년도 수능 29번

두 실수 a와 k에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le a)\\ (x-1)^2(2x+1) & (x>a)\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x\le k)\\ 12(x-k) & (x>k)\end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge g(x)$이다.

k의 최솟값이 $\frac{q}{p}$일 때, $a+p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

03 19년 7월 교육청 20번

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)=ax^4+bx^2+c$ (a, b, c는 상수)가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근이 α, β, γ이다. (단, $\alpha<\beta<\gamma$)
(나) $f(1)=-\frac{3}{4}$, $f'(-1)=1$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

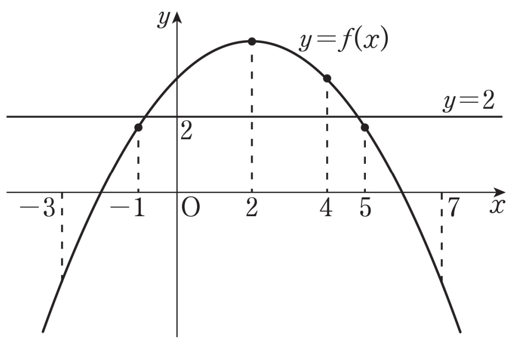
<보 기>

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. $f'(\alpha)=-4$
ㄷ. 방정식 $|f(x)|=k(x-\alpha)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 양수 k의 범위는 $\frac{8}{27}<k<4$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 19년 10월 교육청 12번

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$가 그림과 같다.



열린 구간 $(-3, 7)$에서 부등식

$f'(x)\{f(x)-2\}\le 0$을 만족시키는 정수 x의 개수는? (단, $f'(2)=0$) [3점]

① 4 ② 5 ③ 6

④ 7 ⑤ 8

05 21학년도 6월 평가원 19번

방정식 $2x^3+6x^2+a=0$이 $-2\le x\le 2$에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 a의 개수는? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8

④ 10 ⑤ 12

06 22학년도 9월 평가원 20번

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

07 22학년도 수능 12번

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$을 만족시킨다.

함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때,

$f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 4 ⑤ $\frac{5}{2}$

CHAPTER

06 해설

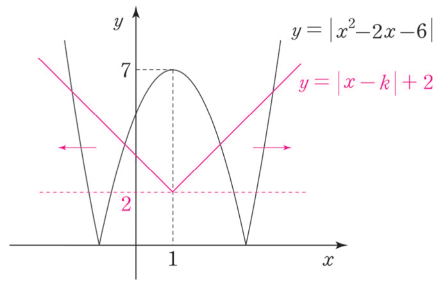
01 18학년도 경찰대 15번

답 : ②

1. 방정식은 인수분해 또는 그래프로 해결한다. 방정식 $|x^2-2x-6|=|x-k|+2$은 절댓값과 미지수 k를 포함하여 인수분해하기는 어려워 보인다. 그래프로 해결하자.

방정식 $|x^2-2x-6|=|x-k|+2$의 실근은
함수 $y=|x^2-2x-6|$의 그래프와
함수 $y=|x-k|+2$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

두 함수의 그래프를 그려 세 개의 교점을
갖도록 하는 k의 값의 합을 구하자.

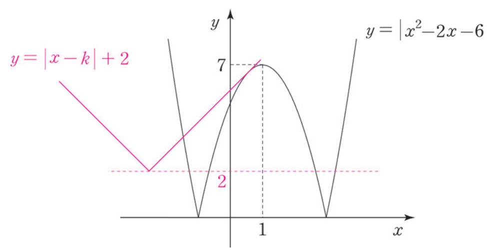


$y=|x-k|+2$의 그래프는 점 $(k,2)$에서 뾰족점을 갖는 V자 모양이다. $y=|x-k|+2$의 뾰족점 $(k,2)$는 항상 직선 $y=2$ 위에 존재하므로 직선 $y=2$ 위에서 점 $(k,2)$를 이동시키면서 두 함수의 그래프의 교점의 개수를 관찰하면 된다. 이런 테크닉이 실전에서 중요하다.

2. 교점을 관찰해보면, 함수 $y=|x^2-2x-6|$의 그래프와 함수 $y=|x-k|+2$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나려면 **두 함수의 그래프가 서로 접해야 하며 이를 만족하는 k의 값은 두 가지가 존재한다.**

(ⅰ) $k<1$인 경우

곡선 $y=-x^2+2x+6$와 직선 $y=x-k+2$가 접해야 한다. 접하는 상황을 다루는 여러 가지 도구가 존재하는데, 그중 **'중근을 갖는 방정식'**을 이용하자. (※ 참고)



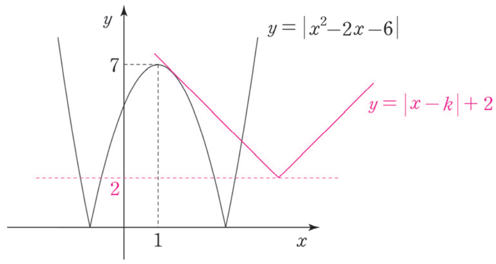
곡선 $y=-x^2+2x+6$와 직선 $y=x-k+2$가 서로 접하므로 **방정식 $-x^2+2x+6=x-k+2$가 중근**을 가져야 한다.

방정식 $x^2-x-k-4=0$의 판별식 $D=(-1)^2-4(-k-4)=4k+17=0$

$\therefore k=-\dfrac{17}{4}$

(ii) $k > 1$인 경우

곡선 $y = -x^2 + 2x + 6$와 직선 $y = -x + k + 2$가 접해야 한다. (i)과 마찬가지로 **'중근을 갖는 방정식'**을 이용하자.



곡선 $y = -x^2 + 2x + 6$와 직선 $y = -x + k + 2$가 접하므로
방정식 $-x^2 + 2x + 6 = -x + k + 2$가 중근을 가져야 한다.

방정식 $x^2 - 3x + k - 4 = 0$의 판별식 $D = (-3)^2 - 4(k-4) = -4k + 25 = 0$

$\therefore k = \dfrac{25}{4}$

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $-\dfrac{17}{4} + \dfrac{25}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$이다.

※ 접선을 다루는 도구 - 〈Chapter 5〉 中

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 $x = a$에서 접하는 것을 수식적으로 표현한다면 $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$이다. 따라서 **접선을 다룰 때도 기본적으로 $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$를 이용**하면 된다. 하지만 이 방법만 가지고 항상 미지수의 값을 구할 수 있는 것은 아니다. 접선을 다루는 특수한 도구 3가지를 알아보자.

(1) (두 점을 지나는) 직선의 기울기=미분계수

접선이 등장하는 상황에서 가장 쉽고 빠르게 적용할 수 있는 도구는 '직선의 기울기=미분계수'이다. 예를 들어 점 (a, b)에서 $f(x)$에 그은 접선과 $f(x)$의 접점의 좌표가 $(t, f(t))$일 때 $\dfrac{f(t) - b}{t - a} = f'(t)$이다.

(2) 접선의 방정식

접선의 방정식을 구한 다음, 해당 접선이 지나가는 또 다른 점의 좌표를 대입한다. 함수의 **바깥의 한 점에서 함수에 그은 접선**이 있는 경우에 주로 사용한다.

예를 들어 점 (a, b)에서 $f(x)$에 그은 접선이 $f(x)$와 점 $(t, f(t))$에서 만날 때, 접선의 방정식 $y = f'(t)(x - t) + f(t)$을 작성한 다음 (a, b)를 대입하면 $b = f'(t)(a - t) + f(t)$이다.

한편, **접선이 두 함수의 공통접선**인 경우 두 접선의 방정식이 서로 같아야 하므로 **계수 비교법**을 통해 미지수를 알아낼 수 있다. 예를 들어 $f(x)$의 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선과 $g(x)$ 위의 점 $(b, g(b))$에서의 접선이 공통접선인 경우, $y = f'(a)(x - a) + f(a)$와 $y = g'(b)(x - b) + g(b)$가 서로 같아야 하므로 $f'(a) = g'(b)$, $f(a) - af'(a) = g(b) - bg'(b)$이어야 한다.

(3) 중근을 갖는 방정식

$f(x)$의 그래프와 직선 $g(x)$가 $x=t$에서 접할 때, 방정식 $f(x)=g(x)$는 t를 중근으로 갖는다. **이 방법은 주로 이차함수의 그래프와 직선이 접하는 경우**에 사용한다. 이차방정식이 중근을 가질 조건은 $D=0$으로 굉장히 간단하기 때문이다. (혹은 완전제곱식의 꼴로 만들어준다고 생각해도 좋다.)

만약 삼차함수와 접선이 있는 경우, 방정식을 풀었을 때 '중근과 하나의 실근' 또는 '삼중근'이 나오게끔 하면 된다.

도구 적용의 우선순위

상황에 따라 다르겠으나 **(1), (2), (3)의 순으로 적용하자**. 대개 이 순으로 식 설정이 깔끔하고 계산이 적은 경향을 보인다.

02 18학년도 수능 29번

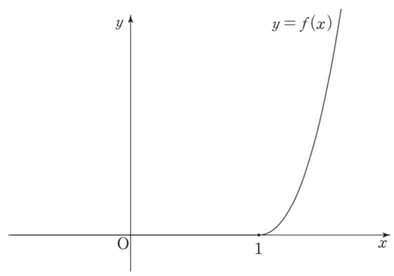
답 : 32

1. 구간에 따라 정의된 함수 $f(x)$는 각각의 구간 내에서 미분가능하므로, **구간의 경계인 $x=a$에서 미분가능하도록 만들어주자.**

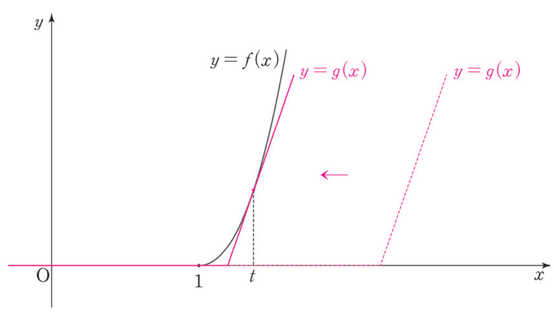
   $f(x)$의 $x=a$에서의 좌극한과 좌미분계수가 모두 0이므로 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하려면 $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한과 우미분계수도 모두 0이어야 한다. $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한과 우미분계수는 각각 $f(a), f'(a)$와 같으므로 $f(a)=f'(a)=0$를 만족시키는 a의 값은 1이다.

   ※ 엄밀히 말하면, $f(a)=0$을 만족시키는 a 중에서 $f'(a)=0$까지 만족시키는 a의 값을 찾으면 된다. $f(x)$가 $x=a$에서 연속이지 않으면, $f(x)$의 $x=a$에서의 우미분계수는 존재하지 않기 때문이다. - 〈Chapter 1〉

   이를 바탕으로 $y=f(x)$의 그래프를 그려주면 오른쪽 그림과 같다.



2. $y=g(x)$도 마찬가지로 k를 경계로 하는 구간에 따라 정의된 함수이다. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq g(x)$이고, k를 이동하면서 관찰해보면 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 **접하는 순간에 k는 최솟값**을 갖는다.



   ※ 어떤 변수의 최솟값 또는 최댓값을 구할 때는 아무렇게나 관찰하는 것보다, $(+\infty)$ 또는 $(-\infty)$에서 출발하여 일정한 방향으로 변수의 값을 증가 또는 감소시키면서 관찰하는 것이 좋다.

   $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 $x=t$에서 접할 때 $f'(t)=12$이다.

$$f'(x) = (2x-2)(2x+1) + 2(x-1)^2$$
$$= 2(x-1)(2x+1+x-1)$$
$$= 6x(x-1) \ (\text{단, } x > 1)$$

$f'(t) = 6t(t-1) = 12$, $\therefore\ t = 2\ (\because\ t > 1)$

$f(x)$와 $g(x)$가 접하는 순간에 직선 $y = 12(x-k)$는 $(2, 5)$를 지나므로 $k = \dfrac{19}{12}$

따라서 $a + p + q = 1 + 12 + 19 = 32$이다.

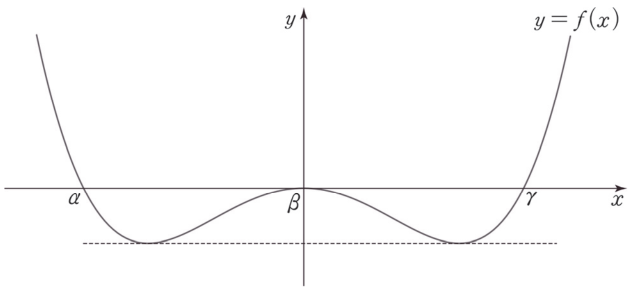
03 19년 7월 교육청 20번

답 : ⑤

사차함수 $f(x)$의 식이 짝수차항만으로 이루어져 있으므로 $f(x)$는 우함수다.

– 〈Chapter 4〉, 〈Chapter 8〉

최고차항의 계수가 양수이면서 우함수인 사차함수 $f(x)$에 대해 방정식 $f(x) = 0$의 모든 실근이 α, β, $\gamma\ (\alpha < \beta < \gamma)$이므로 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



1. $f(x)$는 $x = 0$에서 x축에 접한다. $f(0) = 0$ (O)

2. $f(x)$의 $x = \alpha$에서의 미분계수를 묻고 있다. $f'(x)$와 α의 값을 구해야 하므로 조건 (나)를 이용하여 $f(x)$의 식부터 알아내자.

   $f(0) = 0$이므로 $f(x) = ax^4 + bx^2$이다. (단, a, b는 상수, $a \neq 0$)

   (나) 조건을 $f(x)$의 식에 대입하면 $f(1) = a + b = -\dfrac{3}{4}$, $f'(-1) = -4a - 2b = 1$

   a, b에 관한 두 방정식을 연립하면 $a = \dfrac{1}{4}$, $b = -1$이다.

   $\therefore f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - x^2$, $f'(x) = x^3 - 2x$

   α의 값을 구하기 위해 방정식 $f(x) = 0$을 풀자.

$$\frac{1}{4}x^4 - x^2 = 0$$
$$\frac{1}{4}x^2(x^2 - 4) = 0$$
$$\frac{1}{4}x^2(x+2)(x-2) = 0$$

$\alpha < \beta < \gamma$이므로 $\alpha = -2$
$\therefore f'(\alpha) = f'(-2) = -4$ (O)

※ **위의 풀이는 $f(x)$의 대칭성을 전혀 이용하지 않은 풀이이다. 대칭성을 이용해서도 풀어보자.**
태도 측면에서는 대칭성을 이용한 풀이를 추천하지만, 결과적으로 계산은 비슷한 수준이다.

$f(x)$는 $x=0$에서 x축과 접하고 방정식 $f(x)=0$의 0이 아닌 두 근 α, β는 $x=0$에 대해 대칭이므로 다음과 같이 식을 세울 수 있다.

$$f(x) = kx^2(x-\alpha)(x+\alpha) = kx^2(x^2 - \alpha^2)$$
$$f'(x) = 2kx(x^2 - \alpha^2) + kx^2(2x)$$

$$f'(\alpha) = 2k\alpha^3$$

조건 (나)를 $f(x)$, $f'(x)$의 식에 대입하여 k, α의 값을 구하자.

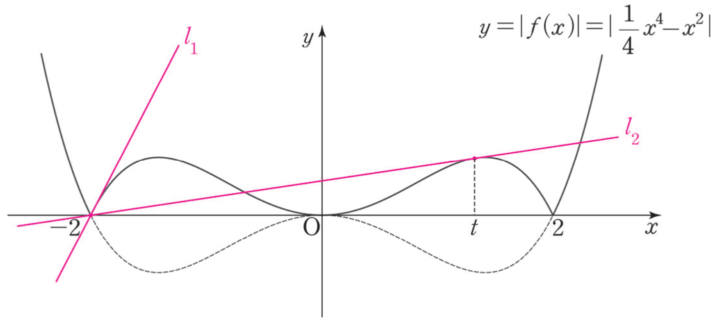
$$f(1) = k(1 - \alpha^2) = -\frac{3}{4}$$
$$f'(-1) = -2k(1-\alpha^2) - 2k = 1$$

두 방정식을 연립하면 $k = \frac{1}{4}$, $\alpha = -2$
$$\therefore f'(\alpha) = 2k\alpha^3 = 2 \times \frac{1}{4} \times (-2)^3 = -4$$

3. **방정식이 제시되었으므로 인수분해와 그래프 두 가지 관점을 떠올리자.** 방정식이 절댓값 함수 $|f(x)|$를 포함한 관계로 인수분해는 곤란하다. 그래프 관점을 적용하자.

방정식 $|f(x)| = k(x - \alpha)$의 서로 다른 실근의 개수가 3
⇔ 함수 $y = |f(x)|$의 그래프와 함수 $y = k(x-\alpha)$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수가 3

$\alpha = -2$이므로 $y = k(x-\alpha)$는 곧 $y = k(x+2)$이며,
$y = k(x+2)$는 항상 점 $(-2, 0)$을 지나고 기울기가 k인 직선이다.



함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k(x-\alpha)$의 서로 다른 교점의 개수가 3이 되기 위해 **직선의 기울기 k는 직선 l_1의 기울기보다 작고 직선 l_2의 기울기보다 커야 한다.** 지금부터 직선 l_1과 직선 l_2의 기울기를 구해보자.

i) 직선 l_1의 기울기

쉽게 구할 수 있다. 직선 l_1은 함수 $y=-f(x)$의 $x=-2$에서의 접선이므로 기울기는 $-f'(-2)$와 같다. $-f'(-2)=-(-4)=4$

ii) 직선 l_2의 기울기

l_1보다는 까다롭다.

접선을 다루는 도구 중 '직선의 기울기=미분계수'를 적용하자. $y=-f(x)$와 직선 l_2의 접점의 좌표를 $\left(t, -\frac{1}{4}t^4+t^2\right)$로 설정하면

점 $(-2, 0)$과 점 $\left(t, -\frac{1}{4}t^4+t^2\right)$을 지나는 **(직선의 기울기)**: $\dfrac{-\frac{1}{4}t^4+t^2}{t+2}$

$x=t$에서 $y=-f(x)$의 **(미분계수)**: $-t^3+2t$

두 값이 서로 같으므로 방정식 $\dfrac{-\frac{1}{4}t^4+t^2}{t+2}=-t^3+2t$을 풀어주자.

$3t^4+8t^3-4t^2-16t=0$, $t(3t^3+8t^2-4t-16)=0$ 조립제법을 적용하여 인수분해하면

$t(t+2)^2(3t-4)=0$ $\therefore t=\frac{4}{3}$ ($\because$ 그래프를 보면 $t\neq 0$, $t\neq -2$)

구해야 할 것은 **직선 l_2의 기울기**다,

(직선 l_2의 기울기)=($x=t$에서의 $y=-f(x)$의 미분계수)$=-\left(\frac{4}{3}\right)^3+2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{27}$

따라서 방정식 $|f(x)|=k(x-\alpha)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 양수 k의 범위는 $\frac{8}{27}<k<4$이다. (O)

ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

comment

1. 19학년도 6월 평가원 21번 문항의 선지 (ㄷ)과 발문 형태, 풀이과정이 매우 유사하다. 세부요소만 달리할 뿐 기출 소재와 핵심 태도와 도구는 항상 반복된다.

2. 선지 (ㄷ)에서 직선 l_2의 기울기를 구할 때, 센스를 발휘한다면 접선을 지나는 방정식을 설정한 다음 한 점을 대입할 수도 있다. (ㄷ)에서 $\frac{8}{27}$이라는 숫자가 나왔으므로 $k=\frac{8}{27}$일 때, $y=k(x-2)$가 $y=-f(x)$의 접선이 되는지 확인해보면 된다. 접선이 점 $(-2,0)$을 지난다면 (ㄷ)은 옳고, 안 지난다면 (ㄷ)은 틀렸다. 직접 계산을 해보면 접선이 점 $(-2,0)$을 지나는 것을 확인할 수 있다.

04 19년 10월 교육청 12번

답 : ②

부등식 $f'(x)\{f(x)-2\}\leq 0$에서 **두 가지 항** $f'(x)$, $\{f(x)-2\}$**를 복합적으로 고려하지 말고 하나씩 따지자.** $f'(x)$의 부호를 기준으로 케이스를 분류하면 된다. 열린 구간 $(-3,7)$에서 $f'(x)$는 $x=2$에서 부호가 변하므로 $f'(x)<0$일 때, $f'(x)=0$일 때, $f'(x)>0$일 때의 3가지 CASE를 관찰하자.

단, 정수 x의 개수를 셀 때 항상 **문제의 기본 조건인 열린 구간** $(-3,7)$**을 고려하자.**

(i) $f'(x)<0$일 때
$x>2$인 구간이다. $f'(x)\{f(x)-2\}\leq 0$의 양변을 $f'(x)$로 나누면 $f(x)-2\geq 0$
$2<x<7$에서 $f(x)\geq 2$를 만족하는 정수 x는 $3,4$이다.

(ii) $f'(x)=0$일 때
$x=2$이다. $f'(2)\{f(x)-2\}=0$이므로 주어진 부등식을 만족한다.

(iii) $f'(x)>0$일 때
$x<2$인 구간이다. $f'(x)\{f(x)-2\}\leq 0$의 양변을 $f'(x)$로 나누면 $f(x)-2\leq 0$
$-3<x<2$에서 $f(x)\leq 2$를 만족하는 정수 x는 -2, -1이다.

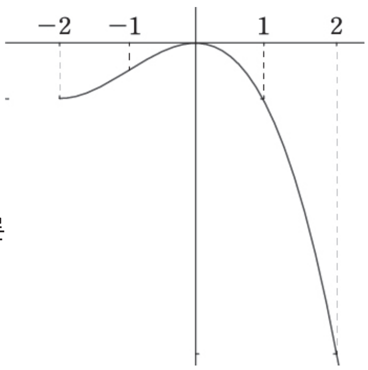
따라서 조건을 만족시키는 정수 x의 개수는 5이다.

05 21학년도 6월 평가원 19번

답 : ③

1. 삼차방정식 $2x^3+6x^2+a=0$이 인수분해가 안 되므로 그래프로 그려서 해결하자.
   태도 : 방정식은 인수분해 또는 그래프로 해결한다.

   $a=-2x^3-6x^2$이므로 $f(x)=-2x^3-6x^2$라 하자.



2. $f'(x)=-6x^2-12x=-6x(x+2)$이다.
   따라서 함수 $f(x)$의 개형은 삼차함수의 비율에 의하여
   구간 $[-2,\ 2]$에서 다음과 같이 그려진다.

   따라서 구간 $[-2,\ 2]$에서 방정식 $2x^3+6x^2+a=0$이 서로 다른
   두 실근을 갖도록 하는 a의 값의 범위는 $f(-2)\le a<f(0)$이다.

   $f(-2)=16-24=-8$, $f(0)=0$이므로
   $-8\le a<0$에서 정수 a의 개수는 $0-(-8)=8$이다.

※ 삼차함수의 극값 차이 공식을 이용해도 좋다. $f(x)$의 극값의 차는 $\dfrac{|-6|\times 2^3}{6}=8$이다. 이 공식을 잘 모르겠다면 〈Chapter 8〉을 참고하자.

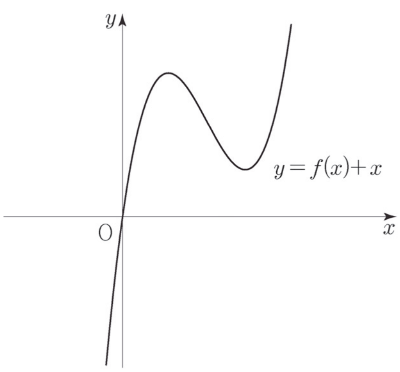
06 22학년도 9월 평가원 20번

답 : 21

1. 방정식을 식으로 따지든 그래프로 따지든 절댓값부터 풀어주자.
   방정식 $f(x)+|f(x)+x|=6x+k$의 절댓값을 풀기 위하여
   x의 범위에 따라 절댓값 안의 함수 식의 부호가 어떻게 변하는지 살펴보자.

   $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{9}{2}x^2+10x$ 이므로

   $f(x)+x=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{9}{2}x^2+11x=\dfrac{1}{2}x\left(x^2-9x+22\right)$ 이다.



   이때, $x^2-9x+22=0$의 판별식
   $D=9^2-4\times1\times22=-7<0$이므로
   함수 $y=\dfrac{1}{2}x\left(x^2-9x+22\right)$의 그래프는 x축과 원점에서만 만난다.

   따라서 $x<0$에서 $f(x)+x<0$이고, $x>0$에서 $f(x)+x>0$이므로

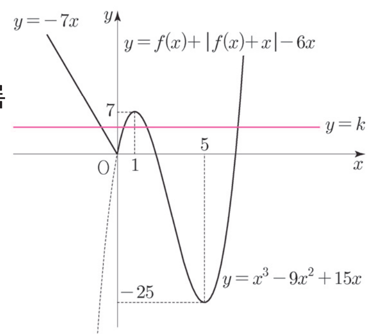
$$f(x)+|f(x)+x| = \begin{cases} -x & (x<0) \\ 2f(x)+x & (x \geq 0) \end{cases}$$ 이다.

2. 그래프 관점을 적용하자. **방정식에서 실근의 개수는 그래프에서의 교점의 개수와 같다.**
$f(x)+|f(x)+x| = 6x+k$ 에서 $f(x)+|f(x)+x|-6x = k$ 이므로
곡선 $y = f(x)+|f(x)+x|-6x$ 와 직선 $y = k$ 의 교점의 개수가 4 가 되도록 하는 정수 k 의 값을 구하자.

$$f(x)+|f(x)+x|-6x = \begin{cases} -7x & (x<0) \\ 2f(x)-5x & (x \geq 0) \end{cases} = \begin{cases} -7x & (x<0) \\ x^3-9x^2+15x & (x \geq 0) \end{cases}$$

에서 $g(x) = x^3-9x^2+15x$ 라 하면 $g'(x) = 3x^2-18x+15 = 3(x-1)(x-5)$ 이므로
함수 $y = g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극댓값 7, $x = 5$ 에서 극솟값 -25 를 갖는다.

따라서 함수 $f(x)+|f(x)+x|-6x = \begin{cases} -7x & (x<0) \\ x^3-9x^2+15x & (x \geq 0) \end{cases}$



의 그래프 개형은 다음과 같다. 따라서 교점의 개수가 4 가 되도록 하는 k 의 값의 범위는 $0<k<7$ 이므로 모든 정수 k 의 합은
$1+2+3+4+5+6 = \dfrac{6\times 7}{2} = 21$ 이다.

comment

방정식은 인수분해 혹은 그래프로 해결한다는 태도를 잊지 마라. 이 문제는
$y = f(x)+|f(x)+x|-6x$ 의 그래프를 그린 다음 직선 $y = k$와의 교점을 관찰하는 것이 출제의도다.

07 22학년도 수능 12번

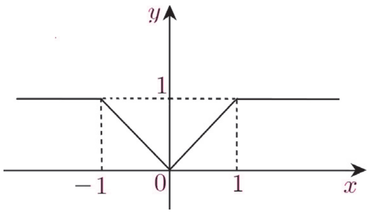
답 : ③

1. $\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$ 의 식을 x^2이 존재하는 항과 존재하지 않는 항으로 나누어 살펴보자.

   $\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2=x^2f(x)-x^2$, $\{f(x)\}^2\{f(x)-1\}=x^2\{f(x)-1\}$ 이므로

   $f(x)=1$ 또는 $\{f(x)\}^2=x^2$, 즉 $|f(x)|=|x|$ 이다.

2. **함수 $f(x)$ 이 연속하며 최댓값이 1 이고, 최솟값이 0 이기 위해서는 $|x|>1$ 에서 $f(x)=1$, $|x|\le 1$ 에서 $f(x)=|x|$ 를 만족시켜야 한다.**

   이때, 함수 $f(x)$ 는 $f(x)=\begin{cases}1 & (x\le -1,\ x\ge 1)\\ x & (0\le x\le 1)\\ -x & (-1\le x\le 0)\end{cases}$ 이므로

   $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 이다.

comment

이 문항을 보고 21학년도 9월 평가원 20번 문항을 떠올릴 수 있으면 좋겠다. 구간에 따라 정의된 함수를 다양한 방식으로 표현하는 평가원을 확인할 수 있다.