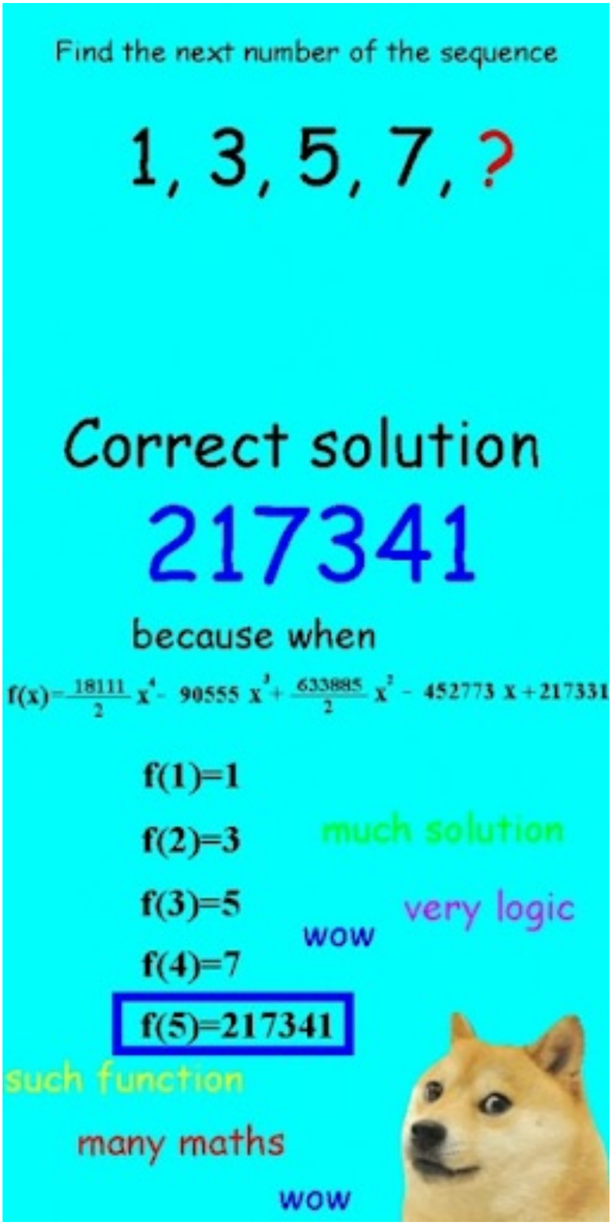
22학년도 수능 대비 수특 기하 선별



xyo
889268

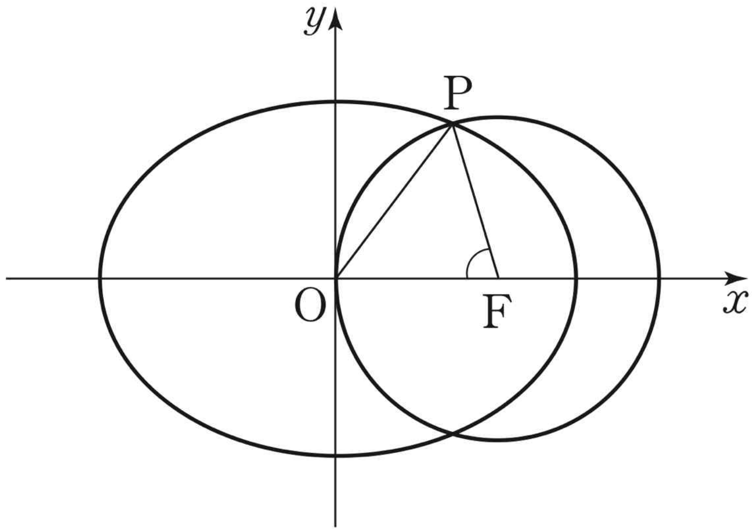
오늘은 무슨 글을 써볼까 하다가, 22학년도 수능 대비(작년 책이라는 뜻이죠) 수특 기하 Level 3에서 제 마음에 드는 문제들을 가져와봤습니다.

마음에 드는 문제가 그렇게 많지는 않았습니다.
일단 오늘은 제 마음에 들었던 문제들을 보고, 다음에는 마음에 안 들었던 문제를 변형해서 가져와볼까 합니다.

타원 Level 3 2번

$a>b>0$인 두 상수 a, b에 대하여 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F라 하고, 점 F를 중심으로 하고 원점 O를 지나는 원이 타원과 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{6}$, $\cos(\angle\mathrm{OFP})=\frac{1}{4}$일 때, a^2+b^2의 값은?

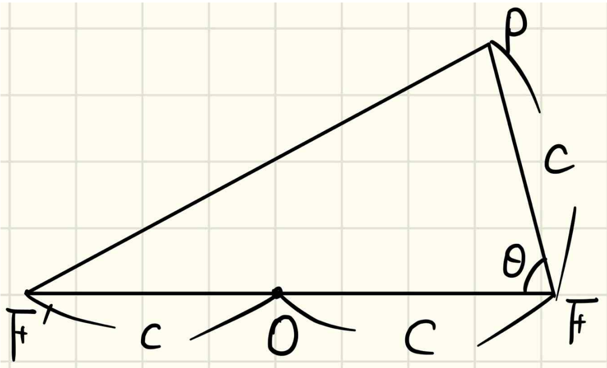
① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15



정답: ④

$\cos(\angle\mathrm{OFP})=\dfrac{1}{4}$라는 조건이 되게 괜찮은 조건입니다. 타원의 초점 중 x좌표가 음수인 점을 F'이라고 합시다. 일단 $\overline{\mathrm{OF}}=c$라 하겠습니다. $\overline{\mathrm{FP}}=c$이고 $\overline{\mathrm{OF}'}=c$인 것도 알 수 있습니다.

삼각형 $\mathrm{PF}'\mathrm{F}$를 그려봅시다.



점 F'에서 직선 PF에 내린 수선의 발을 H라 하면, $\cos\theta=\dfrac{1}{4}$이므로 점 H는 선분 PF의 중점입니다. 그러면 삼각형 $\mathrm{F}'\mathrm{PF}$가 $\overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}}=\overline{\mathrm{F}'\mathrm{F}}=2c$인 이등변삼각형이라는 것까지 알 수 있겠습니다.

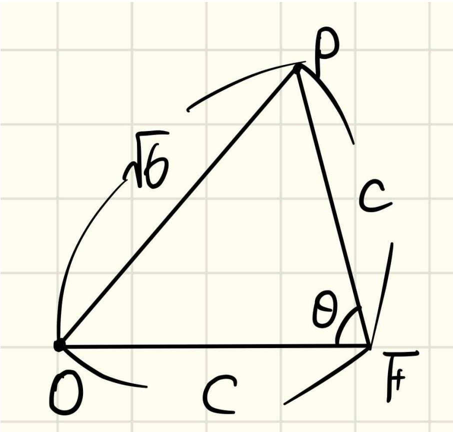
그러므로 타원의 장축의 길이는 $3c$입니다. $2a=3c$이므로 $a^2=\dfrac{9}{4}c^2$을 얻고,

$a^2-b^2=c^2$에서 $b^2=\dfrac{5}{4}c^2$를 얻을 수 있습니다.

구하고자 하는 값은 $a^2+b^2=\dfrac{14}{4}c^2$입니다. 답이 ④번이겠거니 할 수 있습니다. 만약에 답이 ①번이라면 $c=\dfrac{2\sqrt{11}}{\sqrt{14}}$같은 더러운 숫자가 나오니까요. 나머지 선택지도 마찬가지구요. 어쨌든 c를 계산해봅시다. 다음 페이지에서 계산해보겠습니다.

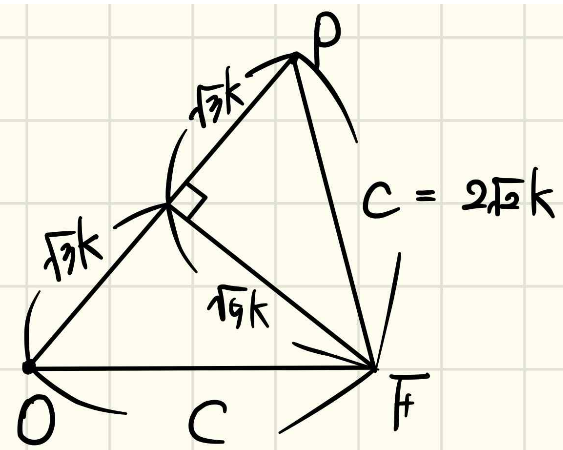
c의 값을 얻으려면 $\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{6}$ 이라는 조건을 써야 하고, $\cos(\angle \mathrm{OFP}) = \dfrac{1}{4}$ 도 써야 합니다.

이등변삼각형 OFP만 가져와보겠습니다.



여기서 코사인법칙을 이용해서 c의 값을 계산할 수 있습니다. $c = 2$라서 답은 ④입니다.

c의 값을 계산하는 다른 방법을 소개하고 싶네요. $\cos\theta = \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{5-3}{5+3}$ 으로 표현할 수 있습니다.[1]
그러면 삼각형 OFP의 모양은 다음과 같습니다.



$\overline{\mathrm{OP}} = 2\sqrt{3}k = \sqrt{6}$ 이므로 $k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이고, $c = 2$입니다. 그러므로 답은 ④입니다.

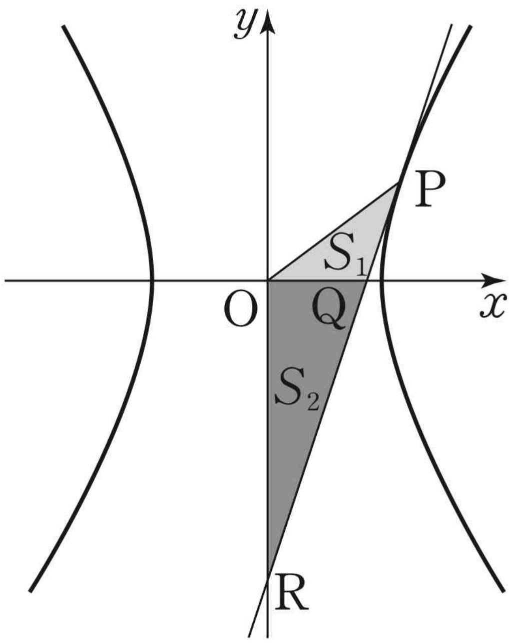
---

1) 이게 갑자기 뭐 하는 짓인가 싶으실 수 있습니다. **이등변삼각형 각 구하기**라는 주제로 제가 책에서 다루고 있는 내용인데, 이것도 나중에 일부를 공개하겠습니다. 많은 관심 부탁

쌍곡선 Level 3 1번

그림과 같이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 제1사분면에 있는 x좌표가 4인 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, y축과 만나는 점을 R라 할 때, 삼각형 POQ의 넓이를 S_1, 삼각형 QOR의 넓이를 S_2라 하자. $S_1 : S_2 = 1 : 3$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는?
(단, O는 원점이다.)

① 6 ② $2\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{11}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{13}$



정답: ④

두 삼각형의 밑변을 선분 OQ로 봅시다. $S_1 : S_2 = 1 : 3$이므로 두 삼각형의 높이의 비가 $1 : 3$입니다.

그러므로 점 P의 y좌표를 k라 하면, 점 R의 y좌표는 $-3k$입니다. $(k > 0)$
점 $\mathrm{P}(4, k)$가 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점이므로 $\frac{16}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = 1$입니다.
점 P에서의 접선의 방정식은 $\frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 1$이고, 이 직선이 점 $\mathrm{R}(0, -3k)$를 지나므로 $b^2 = 3k^2$을 얻을 수 있습니다.

그러므로 $\frac{16}{a^2} - \frac{k^2}{3k^2} = 1$에서 $a^2 = 12$이므로 쌍곡선의 주축의 길이는 $4\sqrt{3}$입니다.

~~그림 안 그려도 돼서 참 좋네요.~~

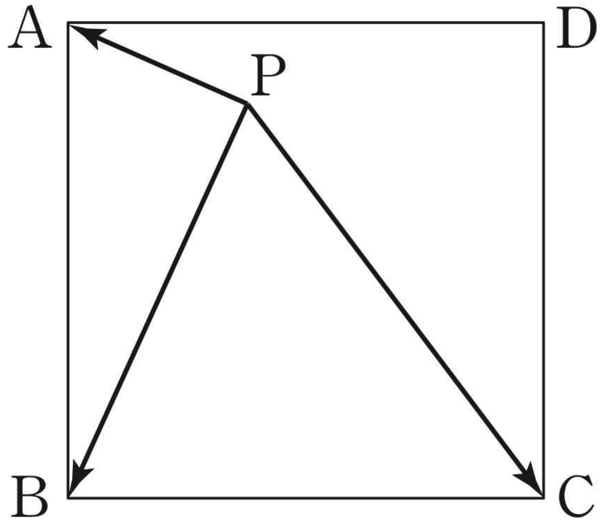
이 문제를 변형하여 22학년도 6월 평가원 27번 문제를 만든 것 같습니다.
220627이 약간 더 어렵습니다.

평면벡터의 성분과 내적 Level 3 2번

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD 내부의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ (나) 두 실수 m, n에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PC}} = m\overrightarrow{\mathrm{PA}} + n\overrightarrow{\mathrm{PB}}$이다.

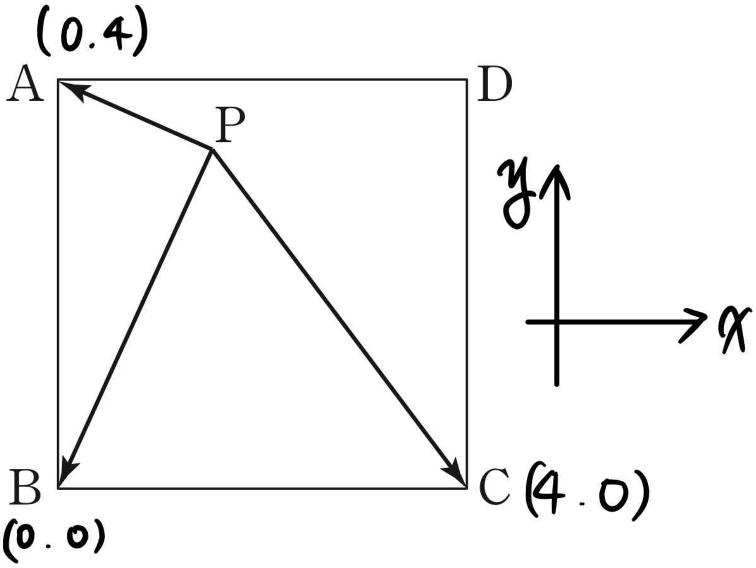
$m+n$의 값이 최대일 때, 삼각형 PAB의 넓이를 구하시오.



정답: 4

(가) 조건을 보면 점 P는 두 점 A, B를 지름의 양끝으로 하는 원 위의 점이라는 것을 알 수 있습니다. 점 P가 정사각형 내부의 점이랬으니 정확히 말하면 반원 위의 점입니다.

(나)를 보고 당장 어떻게 하기가 어렵습니다. 문제에서 정사각형을 줬으므로 좌표로 해결할 수 있겠습니다.



점 P의 x좌표를 a라 하겠습니다. 점 P는 중심이 $(0,2)$이고 반지름의 길이가 2인 반원 위의 점이므로 $0<a\leq 2$입니다.

그러면 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 x성분은 $-a$로 같고, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$의 x성분은 $4-a$입니다.
벡터 $m\overrightarrow{\mathrm{PA}}+n\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 x성분은 $-a\times(m+n)$으로 표현할 수 있겠습니다.

그러므로 $m+n=1-\dfrac{4}{a}$를 얻을 수 있습니다. $0<a\leq 2$일 때, $1-\dfrac{4}{a}$의 값이 최대가 되도록 하는 a의 값은 2입니다.

점 P가 정사각형의 대각선의 교점이었네요. 삼각형 PAB의 넓이는 4입니다.

이 문제 수특 해설 보니까 되게 어렵게 풀었더군요. 하지 않겠습니다.

공간좌표 Level 3 3번

좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(2, 3, 2\sqrt{3})$과 구 $S: x^2+y^2+z^2=9$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 점 P를 포함하는 평면을 α라 하자.

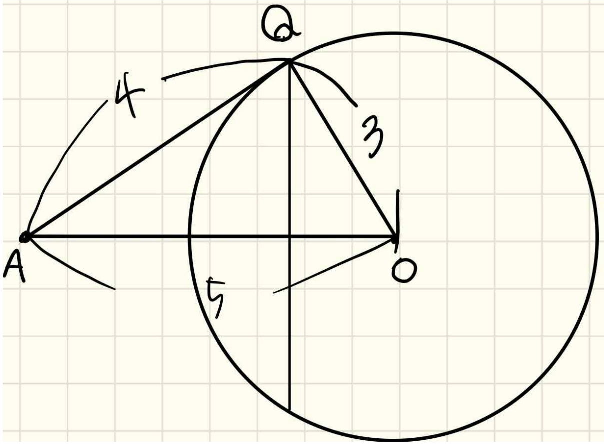
선분 AP를 $1:p\,(p>0)$로 내분하는 점을 Q라 하면 직선 AP와 구 S는 점 Q에서 접한다.

평면 α가 구 S에 접할 때, 상수 p의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

정답: ③

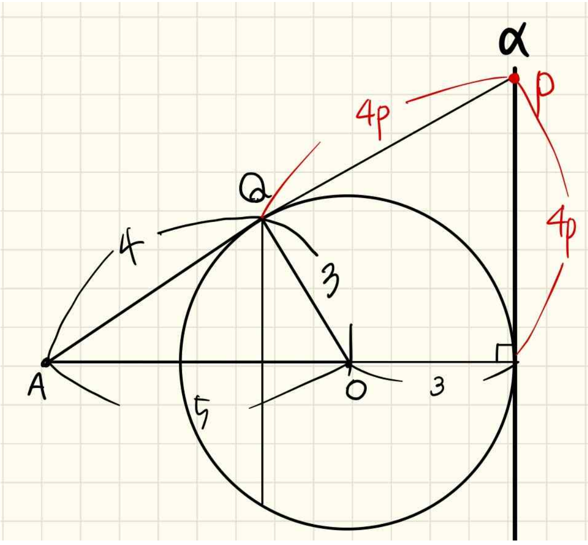
구의 중심이 원점 O이고, $\overline{\mathrm{OA}}=5$네요.
일단 알 수 있는 건 직선 AQ와 구 S가 점 Q에서 접한다는 것입니다. 그림 하나 그려볼까요?



점 Q가 직선 OA를 축으로 해서 한 바퀴 돌겠네요. 우리가 궁금한 건 P입니다.
점 A는 고정되어 있는 점이고, 점 Q가 돌고 있는데, 세 점 A, Q, P가 한 직선 위에 있습니다.
그럼 P도 직선 OA를 축으로 해서 한 바퀴 도네요. 점 P의 자취가 원이라는 걸 알았습니다.

그럼 이 원을 포함하는 평면이 α네요. 점 P가 직선 OA를 축으로 해서 돌고 있으므로 평면 α와 직선 OA는 서로 수직입니다.

직선 OA와 수직인 평면 α가 구 S와 접한다고 하였으므로 그림이 다음과 같이 그려지겠네요.



점 Q가 선분 AP를 $1:p$로 내분한다고 했으므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=4p$입니다. p의 값을 구해야 하는데, 직각삼각형이 보이네요. $4p=8\tan(\angle\mathrm{OAQ})=8\times\dfrac{3}{4}=6$이므로 $p=\dfrac{3}{2}$입니다.

해설 보니까 좌표축 그리고 그 위에 구 그리고 평면 그리고 그러던데, 그러지 마세요. 특히 좌표축을 문제 풀기 시작할 때 그리면 방해되니까 그리지 마세요.

오늘은 여기까지 하겠습니다.