2015학년도 수능 수학영역 B형 해설

01

[풀이]

행렬의 덧셈의 정의에 의하여

$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 값은 9이다.

답 ⑤

02

[풀이]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}{3}=\frac{\ln e}{3}=\frac{1}{3}$$

답 ③

03

[풀이]

삼각함수의 합성을 하면

$f(x)=2\sqrt{2}\sin(x+\alpha)-\sqrt{2}$

(단, $\cos\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$)

함수 $f(x)$는 $x=\frac{4n+1}{2}\pi-\alpha$($n$은 정수)일 때 최댓값을 $\sqrt{2}$를 갖는다.

답 ①

04

[풀이]

정적분의 기본 정리에 의하여

$$\int_0^1 3\sqrt{x}\,dx=\left[2x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=2$$

답 ②

05

[풀이]

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 C라고 하자.

내분점의 공식에서 점 C의 y좌표는

$\frac{2\times(-3)+1\times a}{2+1}=0$ 즉, $a=6$

내분점의 공식에서 점 C의 z좌표는

$\frac{2\times b+1\times(-2)}{2+1}=0$ 즉, $b=1$

$\therefore\ a+b=7$

답 ④

06

[풀이]

합성변환 $f\circ g$를 나타내는 행렬은

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$

문제에서 주어진 조건에서

$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ 6 \end{pmatrix}$

$\therefore\ a=3$

답 ③

07

[풀이]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라고 하면

$r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{3}$

일반항 a_n은

$a_n=a_1r^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\ (n\geq 1)$

$(a_1)^2=9$, $\frac{(a_{n+1})^2}{(a_n)^2}=\frac{1}{9}$이므로

수열 $\{(a_n)^2\}$은 첫째항이 9이고, 공비가 $\frac{1}{9}$인 등비수열이다.

무한등비급수의 공식에 의하여

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=\frac{9}{1-\frac{1}{9}}=\frac{81}{8}$$

답 ①

08

[풀이]

두 사건 A^C과 B가 서로 배반사건이므로

$A^C\cap B=\varnothing$ 즉, $B\subset A$

확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(B)$

문제에서 주어진 값을 대입하면

2015학년도 수능 수학영역 B형 해설

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)$

$=\dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{10}=\dfrac{3}{10}$

답 ②

09

[풀이]

정적분의 정의에서

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$$

$$=\int_1^3\frac{1}{x}dx=[\ln x]_1^3=\ln 3$$

답 ②

[참고]

다음과 같은 정적분도 가능하다.

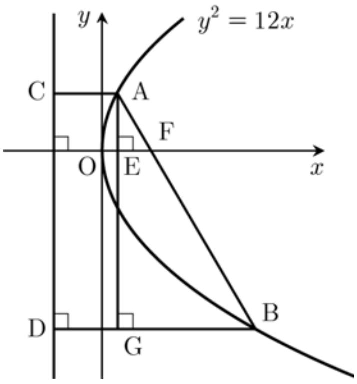
$$\int_0^1\frac{2}{1+2x}dx,\ \int_0^2\frac{1}{1+x}dx$$

10

[풀이1]

$y^2=4\times3\times x$에서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(3,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

점 A를 지나고 y축과 평행한 직선이 x축, 선분 BD와 만나는 점을 각각 E, G라고 하자.



$\overline{\mathrm{BD}}=k$라고 하자.

포물선의 정의에서

$\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{AC}}=4,\ \overline{\mathrm{FB}}=\overline{\mathrm{BD}}=k$

두 직각삼각형 AFE, ABG는 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{FE}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BG}}$

대입하면

$4:2=4+k:k-4$

일차방정식을 풀면

$\therefore\ k=12$

답 ①

[풀이2]

$y^2=4\times3\times x$에서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(3,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

포물선의 정의에서

$\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{AC}}=4$

점 A의 x좌표는 1이므로 점 A의 좌표는

$\mathrm{A}(1,\ \sqrt{12})$

직선 AF의 방정식은

$y=-\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$

직선 AF의 방정식과 포물선의 방정식을 연립하면

$(-\sqrt{3}x+3\sqrt{3})^2=12x$

정리하면

$x^2-10x+9=0,\ (x-1)(x-9)=0$

$x=1$ 또는 $x=9$

점 B의 x좌표는 9이므로

$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}}=12$

답 12

11

[풀이]

과자 1봉지의 무게를 확률변수 $X(\mathrm{g})$라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(75,\ 2^2)$을 따른다.

여기서 $Z=\dfrac{X-75}{2}$라고 하면 확률변수 Z는 표준정규분포를 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(76\le X\le 78)=\mathrm{P}(0.5\le Z\le 1.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

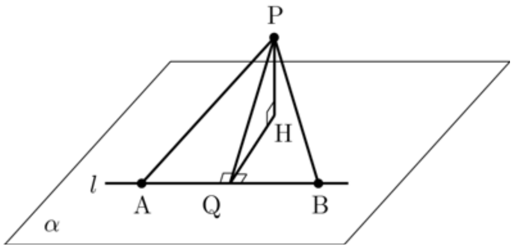
$=0.4332-0.1915=0.2417$

답 ⑤

2015학년도 수능 수학영역 B형 해설

12

[풀이]



점 H에서 직선 l에 내린 수선의 발을 Q라고 하면

$\overline{\mathrm{PH}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{HQ}} \perp l$

이므로, 삼수선의 정리에서

$\overline{\mathrm{PQ}} \perp l$

$\triangle\mathrm{ABP}$는 정삼각형이므로 점 Q는 선분 AB의 중점이다.

직각삼각형 PQH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{HQ}} = \sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}^2 - \overline{\mathrm{PH}}^2} = \sqrt{11}$$

따라서 점 H와 직선 l 사이의 거리는 $\sqrt{11}$이다.

답 ①

13

[풀이]

점 P는 주어진 두 곡선의 교점이므로

$$a^{k-1} = 3^k$$

지수법칙에 의하여

$$\left(\frac{a}{3}\right)^k = a$$

주어진 조건에 의하여

$$0 < \frac{3}{a} < 1$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+k}}{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a\times\left(\frac{a}{3}\right)^{n}}{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\frac{a}{3}+\left(\frac{3}{a}\right)^n} = 3$$

답 ③

14

[풀이]

함수 $y=3^x$의 도함수는

$$y' = 3^x \ln 3$$

곡선 $y=3^x$ 위의 점 P에서의 미분계수는

$$y'|_{x=k} = 3^k \ln 3$$

곡선 $y=3^x$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$y = 3^k(\ln 3)(x-k) + 3^k$$

$y=0$을 대입하여 점 A의 좌표를 구하면

$$\mathrm{A}\left(k-\frac{1}{\ln 3},\ 0\right)$$

마찬가지의 방법으로 곡선 $y=a^{x-1}$ 위의 점 Q에서의 접선의 방정식을 구하면

$$y = a^{k-1}(\ln a)(x-k) + a^{k-1}$$

$y=0$을 대입하여 점 B의 좌표를 구하면

$$\mathrm{B}\left(k-\frac{1}{\ln a},\ 0\right)$$

$$\overline{\mathrm{AH}} = \frac{1}{\ln 3},\ \overline{\mathrm{BH}} = \frac{1}{\ln a}$$

문제에서 주어진 등식에 대입하면

$$\frac{1}{\ln 3} = 2\frac{1}{\ln a}$$

정리하면

$$\ln a = 2\ln 3 = \ln 9$$

$\therefore\ a=9$

답 ④

15

[풀이]

남학생의 수를 x로 두자.

	남학생	여학생	합
수학 동아리○	$\frac{3}{5}x$	$160-\frac{x}{2}$	$160+\frac{x}{10}$
수학 동아리×	$\frac{2}{5}x$	$160-\frac{x}{2}$	$160-\frac{x}{10}$
합	x	$320-x$	320

조건부확률의 정의에 의하여

$$p_1 = \frac{\frac{3}{5}x}{160+\frac{x}{10}},\ p_2 = \frac{160-\frac{x}{2}}{160+\frac{x}{10}}$$

문제에서 주어진 등식에 대입하면

2015학년도 수능 수학영역 B형 해설

$$\frac{\frac{3}{5}x}{160+\frac{x}{10}}=2\frac{160-\frac{x}{2}}{160+\frac{x}{10}}$$

정리하면

$\frac{3}{5}x=2\left(160-\frac{x}{2}\right)$

일차방정식을 풀면

$x=200$

답 ④

16

[풀이]

ㄱ. (참)

문제에서 주어진 왼쪽 식에서

$A\left(\frac{1}{3}A-\frac{1}{3}B\right)=E$

역행렬의 정의에서

$A^{-1}=\frac{1}{3}A-\frac{1}{3}B$

ㄴ. (참)

역행렬의 정의에서

$AA^{-1}=A^{-1}A$

보기 ㄱ의 결과를 대입하면

$A\left(\frac{1}{3}A-\frac{1}{3}B\right)=\left(\frac{1}{3}A-\frac{1}{3}B\right)A$

정리하면

$AB=BA$

ㄷ. (참)

문제에서 주어진 오른쪽 식에서

$AAB-BBA=A+B$

보기 ㄴ의 결과에 의하여

$AAB-BAB=A+B$

행렬의 곱셈의 성질에 의하여

$(A-B)AB=A+B$

보기 ㄱ의 결과에 의하여

$3A^{-1}AB=A+B$ 즉, $3B=A+B$

정리하면

$A=2B$

문제에서 주어진 왼쪽 식에 대입하면

$A^2-A\left(\frac{1}{2}A\right)=3E$

정리하면

$A^2=6E$

$\therefore\ (A+2B)^2=(2A)^2=4A^2=24E$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

17

[풀이]

자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로

주어진 식에 의하여

$S_{n+1}=(n+2)S_n+n!\,(n\geq 1)$

이다. 양변을 $(n+2)!$로 나누면

$\frac{S_{n+1}}{(n+2)!}=\frac{S_n}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

이다. $b_n=\frac{S_n}{(n+1)!}$이라 하면

$b_1=\frac{S_1}{2!}=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$이고

$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

이다.

계차수열과 일반항의 관계에서

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$

(단, $n\geq 2$)

수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$b_n=\frac{n}{n+1}\,(n\geq 1)$

이므로

$S_n=n\times n!$

이다.

수열의 합과 일반항의 관계에서

$a_n=S_n-S_{n-1}=n\times n!-(n-1)\times(n-1)!$

$=(n^2-n+1)(n-1)!\,(n\geq 2)$

$a_1=S_1=1$

그러므로

$a_n=(n^2-n+1)\times(n-1)!\,(n\geq 1)$

이다.

$f(n)=n,\ g(n)=n^2-n+1$

$\therefore\ f(7)+g(6)=38$

답 ③

2015학년도 수능 수학영역 B형 해설

18

[풀이]

표본평균 $\overline{X}$가 2의 값을 가질 경우는 다음과 같이 3가지이다.

첫 번째 나온 공에 적힌 숫자가 1, 두 번째 나온 공에 적힌 숫자가 3일 확률은

$\frac{1}{8}\times\frac{5}{8}$

첫 번째 나온 공에 적힌 숫자가 2, 두 번째 나온 공에 적힌 숫자가 2일 확률은

$\frac{2}{8}\times\frac{2}{8}$

첫 번째 나온 공에 적힌 숫자가 3, 두 번째 나온 공에 적힌 숫자가 1일 확률은

$\frac{5}{8}\times\frac{1}{8}$

확률의 덧셈정리에 의하여

$\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X}=2)$

$=\frac{1}{8}\times\frac{5}{8}+\frac{2}{8}\times\frac{2}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{1}{8}=\frac{7}{32}$

답 ⑤

19

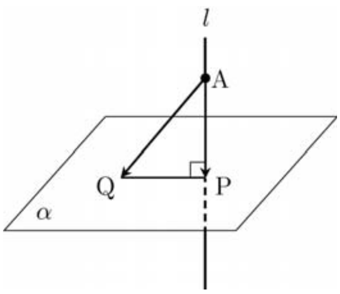
[풀이1]

$\frac{x}{2}=6-y=z-6=t$로 두면

$x=2t,\ y=6-t,\ z=t+6$

점 A의 좌표를 다음과 같이 두자.

$\mathrm{A}(2t,\ 6-t,\ t+6)$



직선 $\mathrm{AP}(l)$은 평면 α에 수직이므로

$\mathrm{PQ}\perp\mathrm{AP}$

공간벡터의 성분에 의한 연산에 의하여

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-2t+2,\ t-1,\ -t+1)$

벡터의 내적의 정의에서

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$

$=(-2t+2)^2+(t-1)^2+(-t+1)^2=6$

정리하면

$6t^2-12t=0$

t에 대한 이차방정식을 풀면

$t=2(\because a=2t>0)$

$a,\ b,\ c$의 값을 구하면

$a=4,\ b=4,\ c=8$

$\therefore\ a+b+c=16$

답 ②

[풀이2]

$\frac{x}{2}=6-y=z-6=t$로 두면

$x=2t,\ y=6-t,\ z=t+6$

점 A의 좌표를 다음과 같이 두자.

$\mathrm{A}(2t,\ 6-t,\ t+6)$

직선 l의 방향벡터를 $\vec{d}$라고 하면

$\vec{d}=(2,\ -1,\ 1)$

$l\perp\alpha$이므로 $\vec{d}$를 평면 α의 법선벡터로 두어도 좋다.

평면 α의 방정식은

$2x-y+z=6$

점 Q의 좌표를 다음과 같이 두자.

$\mathrm{Q}(p,\ q,\ 6-2p+q)$

공간벡터의 성분에 의한 연산에 의하여

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$=(-2t+2,\ t-1,\ -t+1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$=(-2t+p,\ t+q-6,\ -t-2p+q)$

벡터의 내적과 성분의 정의에서

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=6t^2-12t+6=6$

정리하면

$6t^2-12t=0$

t에 대한 이차방정식을 풀면

$t=2(\because a=2t>0)$

$a,\ b,\ c$의 값을 구하면

$a=4,\ b=4,\ c=8$

$\therefore\ a+b+c=16$

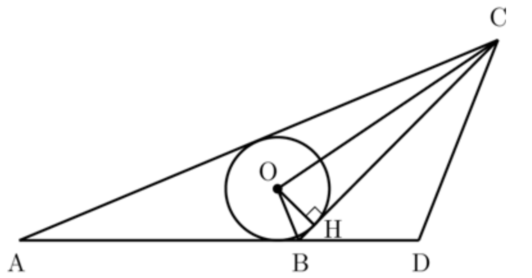
답 ②

20

[풀이1]

2015학년도 수능 수학영역 B형 해설

원의 중심을 O, 점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\triangle$ABC에서 직선 OC는 $\angle$C의 이등분선이므로

$\angle \mathrm{HCO} = \dfrac{\theta}{2}$

직각삼각형 COH에서

$\overline{\mathrm{HC}} = \cot\dfrac{\theta}{2}$

$\triangle$ABC에서 직선 OB는 $\angle$B의 이등분선이므로

$\angle \mathrm{OBH} = \dfrac{\pi}{2} - \theta$

직각삼각형 OBH에서

$\overline{\mathrm{BH}} = \tan\theta$

선분 BC의 길이는

$\overline{\mathrm{BC}} = \tan\theta + \cot\dfrac{\theta}{2}$

$\triangle$ABC에서 $\angle$B의 외각의 크기는

$\angle \mathrm{CBD} = 2\theta$

$\triangle$BDC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\theta} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\pi - 3\theta)}$$

정리하면

$$\overline{\mathrm{BD}} = \frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\left(\tan\theta + \cot\frac{\theta}{2}\right)$$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{BC}} \times \overline{\mathrm{BD}} \times \sin 2\theta$$

$$= \frac{\sin\theta}{2\sin 3\theta}\left(\tan\theta + \cot\frac{\theta}{2}\right)^2 \sin 2\theta$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{\theta \to +0} \{\theta \times S(\theta)\}$$

$$= \lim_{\theta \to +0} \frac{\theta \sin\theta}{2\sin 3\theta}\left(\tan\theta + \cot\frac{\theta}{2}\right)^2 \sin 2\theta$$

$$= \lim_{\theta \to +0} \frac{1}{3} \times \frac{\sin\theta}{\theta} \times \frac{1}{\dfrac{\sin 3\theta}{3\theta}}$$

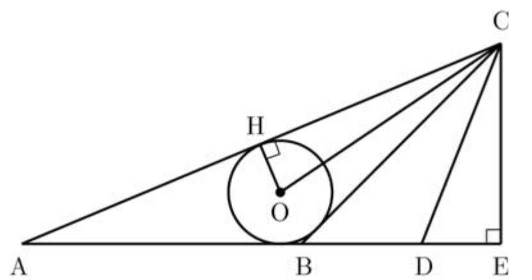
$$\times \left(\theta \times \tan\theta + 2 \times \frac{\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}} \times \cos\frac{\theta}{2}\right)^2 \times \frac{\sin 2\theta}{2\theta}$$

$$= \frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times 2^2 \times 1 = \frac{4}{3}$$

답 ④

[풀이2]

원의 중심을 O, 점 O에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H, 점 C에서 선분 AD의 연장선에 내린 수선의 발을 E라고 하자.



$\triangle$ABC에서 직선 OC는 $\angle$C의 이등분선이므로

$\angle \mathrm{OCH} = \dfrac{\theta}{2}$

직각삼각형 OCH에서

$\overline{\mathrm{CH}} = \cot\dfrac{\theta}{2}$

$\triangle$ABC는 $\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{C}$인 이등변삼각형이므로 점 H는 선분 AC의 중점이다.

$\overline{\mathrm{CA}} = 2\,\overline{\mathrm{CH}} = 2\cot\dfrac{\theta}{2}$

직각삼각형 AEC에서

$\overline{\mathrm{EC}} = \overline{\mathrm{CA}}\sin\theta = 2\cot\dfrac{\theta}{2}\sin\theta$

한편 $\triangle$ABC에서 $\angle$B의 외각의 크기는

$\angle \mathrm{CBD} = 2\theta$

직각삼각형 CBE에서

$\overline{\mathrm{BE}} = \overline{\mathrm{EC}}\cot 2\theta = 2\cot\dfrac{\theta}{2}\sin\theta\cot 2\theta$

$\triangle$CBD에서 $\angle$D의 외각의 크기는

$\angle \mathrm{CDE} = 3\theta$

직각삼각형 CDE에서

$\overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{EC}}\cot 3\theta = 2\cot\dfrac{\theta}{2}\sin\theta\cot 3\theta$

$\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{BE}} - \overline{\mathrm{DE}} = 2\cot\dfrac{\theta}{2}\sin\theta(\cot 2\theta - \cot 3\theta)$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S(\theta) = \dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{EC}}$

$= 2\cot^2\dfrac{\theta}{2}\sin^2\theta(\cot 2\theta - \cot 3\theta)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\therefore \lim\limits_{\theta\to+0}\{\theta\times S(\theta)\}$

$= \lim\limits_{\theta\to+0} 2\theta\cot^2\dfrac{\theta}{2}\sin^2\theta(\cot 2\theta - \cot 3\theta)$

$= \lim\limits_{\theta\to+0} 8\times\cos^2\dfrac{\theta}{2}\times\left(\dfrac{1}{\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}}\right)^2\times\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^2$

$\times\left(\dfrac{1}{\dfrac{\sin 2\theta}{2\theta}}\times\dfrac{\cos 2\theta}{2} - \dfrac{1}{\dfrac{\sin 3\theta}{3\theta}}\times\dfrac{\cos 3\theta}{3}\right)$

$= 8\times 1^2\times 1^2\times 1^2\times\left(1\times\dfrac{1}{2} - 1\times\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{4}{3}$

답 ④

21

[풀이]

직선 BC의 방정식은

$y = \dfrac{m}{2^m - 1}(x-1)$

$x = 2^n$을 대입하면 $y = \dfrac{m(2^n-1)}{2^m-1}$

점 D의 좌표는

$\mathrm{D}\left(2^n,\ \dfrac{m(2^n-1)}{2^n-1}\right)$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에서

$(\triangle\mathrm{ABD}$의 넓이$) = \dfrac{m(2^n-1)^2}{2(2^m-1)}$

조건 (나)에서

$\dfrac{m(2^n-1)^2}{2(2^m-1)} \le \dfrac{m}{2}$

정리하면

$(2^n-1)^2 \le 2^m - 1$

$n=1$이면 $1 \le 2^m - 1$에서 $m \ge 1$

$a_1 = 1$

$n=2$이면 $9 \le 2^m - 1$에서 $m \ge 4$

$a_2 = 4$

$n=3$이면 $49 \le 2^m - 1$에서 $m \ge 6$

$a_3 = 6$

$n=4$이면 $225 \le 2^m - 1$에서 $m \ge 8$

$a_4 = 8$

$\vdots$

이상에서 일반항 a_n을 추론하면

$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 2n & (n \ge 2) \end{cases}$

시그마의 기본 성질과 등차수열의 합의 공식에 의하여

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{10} a_n = a_1 + \dfrac{a_2 + a_{10}}{2}\times 9 = 1 + 108 = 109$

답 ①

[참고]

자연수 n에 대하여

$2^{2n} - 1 - (2^n-1)^2 = 2^{n+1} - 2 > 0$

$2^{2n-1} - 1 - (2^n-1)^2 = -\dfrac{1}{2}(2^n-2)^2 \le 0$

(단, 등호는 $n=1$일 때 성립한다.)

자연수 n에 대하여

$2^{2n-1} - 1 \le (2^n-1)^2 < 2^{2n} - 1$

(단, 등호는 $n=1$일 때 성립한다.)

자연수 n에 대하여 부등식

$(2^n-1)^2 \le 2^m - 1$

을 만족시키는 자연수 m의 범위는

$n=1$일 때, $m \ge 1$

$n \ge 2$일 때, $m \ge 2n$

22

[풀이]

로그의 정의에서

$5 = \log_2 2^5$

주어진 방정식은

$\log_2(x+6) = \log_2 32$

$x + 6 = 32$

$\therefore\ x = 26$

답 26

2015학년도 수능 수학영역 B형 해설

23

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = -\sin x + 8e^{2x}$

$\therefore\ f'(0) = 8$

답 8

24

[풀이]

$\sqrt{x^2 - 6x - 1} = t$로 두면 주어진 방정식은

$t^2 - t - 2 = 0,\ (t-2)(t+1) = 0$

$t = 2(t > 0)$

$\sqrt{x^2 - 6x - 1} = 2$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2 - 6x - 5 = 0 \qquad \cdots(*)$

$(*)$의 판별식을 D라고 하면

$D = (-6)^2 - 4 \times (-5) > 0$이므로 $(*)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이때, 서로 다른 두 실근을 각각 $\alpha,\ \beta(\alpha < \beta)$라고 하면 $\alpha,\ \beta$는 주어진 무리방정식의 서로 다른 두 실근이다. $(*)$에서 근과 계수와의 관계에 의하여

$k = \alpha\beta = -5$

$\therefore\ k^2 = 25$

답 25

25

[풀이]

주어진 조건에서

$P_A = 20\log 255 - 10\log E_A$

$P_B = 20\log 255 - 10\log E_B$

위의 두 식을 변변히 빼면

$P_A - P_B = -10\log E_A + 10\log E_B$

로그의 성질에 의하여

$P_A - P_B = 10\log\dfrac{E_B}{E_A} = 10\log 100 = 20$

답 20

26

[풀이]

조건 (가)에서 abc가 홀수이므로 $a,\ b,\ c$는 모두 홀수이다.

조건 (나)에서 $a,\ b,\ c$가 가질 수 있는 수는 19 이하의 양의 홀수이다.

순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 서로 다른 10개의 홀수에서 3개를 택하는 중복조합의 수이다.

중복조합의 수를 구하는 공식에서

${}_{10}\mathrm{H}_3 = {}_{10+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_{12}\mathrm{C}_3 = 220$

답 220

27

[풀이1]

타원의 방정식에서

$\sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

이므로, 주어진 타원의 초점의 좌표는

$\mathrm{F}(\sqrt{5},\ 0),\ \mathrm{F}'(-\sqrt{5},\ 0)$

$\overline{\mathrm{FP}} = a$로 두자.

타원의 정의에서

$\overline{\mathrm{F'P}} = 6 - a$

직각삼각형 $\mathrm{FPF'}$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{F'F}}^2 = \overline{\mathrm{FP}}^2 + \overline{\mathrm{PF'}}^2$

대입하면

$(2\sqrt{5})^2 = a^2 + (6-a)^2$

정리하면

$a^2 - 6a + 8 = 0,\ (a-2)(a-4) = 0$

만약 $a = 4$이면 점 P는 제2사분면 위의 점이므로 주어진 조건에 모순이다.

$a = 2$ 즉, $\overline{\mathrm{FP}} = 2$

주어진 조건에서

$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{FQ}} - \overline{\mathrm{FP}} = 4 \qquad \cdots ㉠$

타원의 정의에서

$\overline{\mathrm{PF'}} = 6 - \overline{\mathrm{FP}} = 4 \qquad \cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $\triangle\mathrm{F'PQ}$는 직각이등변삼각형이다.

($\triangle\mathrm{QF'F}$의 넓이)

$=$($\triangle\mathrm{FPF'}$의 넓이)$+$($\triangle\mathrm{F'PQ}$의 넓이)

$= 4 + 8 = 12$

답 12

[풀이2]

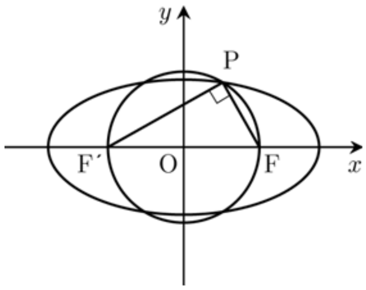
타원의 방정식에서

$\sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

이므로, 주어진 타원의 초점의 좌표는

$\mathrm{F}(\sqrt{5},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{5},\ 0)$

$\angle \mathrm{FPF}' = \frac{\pi}{2}$이므로 세 점 P, F, F′를 지나는 원의 중심은 O이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이다.



원의 방정식과 타원의 방정식을 연립하면

$$\frac{x^2}{9}+\frac{5-x^2}{4}=1$$

x에 대한 이차방정식을 풀면

$$x=\pm\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

점 P의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{3\sqrt{5}}{5},\ \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$$\overline{\mathrm{FP}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(0-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=2$$

주어진 조건에서

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{FQ}}-\overline{\mathrm{FP}}=4 \qquad \cdots ㉠$$

타원의 정의에서

$$\overline{\mathrm{PF}'}=6-\overline{\mathrm{FP}}=4 \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 △F′PQ는 직각이등변삼각형이다.

(△QF′F의 넓이)

=(△FPF′의 넓이)+(△F′PQ의 넓이)

$=4+8=12$

답 12

28

[풀이]

적분과 미분의 관계에서

$f'(x)=(a-x)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=a$

$x=a$에서 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

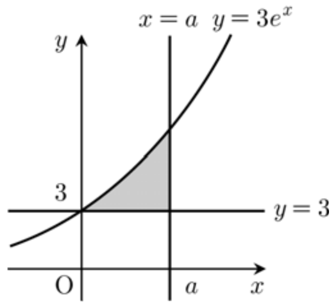
정적분의 부분적분법에 의하여

$$f(a)=\int_0^a (a-t)e^t dt$$

$$=\left[(a-t)e^t\right]_0^a-\int_0^a(-e^t)dt$$

$$=-a-\left[-e^t\right]_0^a=e^a-a-1=32$$

즉, $e^a=a+33$ $\qquad \cdots (*)$



두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 정적분의 공식에 의하여

$$\int_0^a (3e^x-3)dx=\left[3e^x-3x\right]_0^a$$

$=3e^a-3a-3$

$=3(a+33)-3a-3(\because (*))$

$=96$

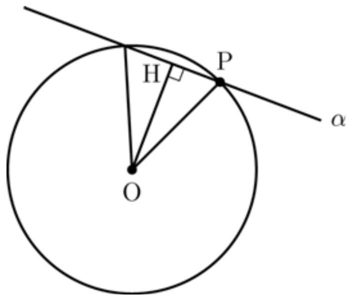
답 96

29

[풀이]

원 C를 포함하는 평면을 α, 점 O에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

평면 OPH로 구 S와 평면 α를 자른 단면은 다음과 같다.



직각삼각형 OPH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{PH}}^2}=7$$

평면 α의 법선벡터 중에서 단위벡터를 $\overrightarrow{n_1}$이라 하면

2015학년도 수능 수학영역 B형 해설

$\overrightarrow{n_1}=(a,\ b,\ c)$

(단, $a^2+b^2+c^2=1$)

평면 α의 방정식은

$\alpha : ax+by+cz=5b+5c$

원점에서 평면 α에 이르는 거리는 선분 OH의 길이와 같다.

점과 평면 사이의 거리 공식에 의하여

$$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{|5b+5c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

정리하면

$$b+c=\pm\frac{7}{5}$$

xy평면의 법선벡터 중에서 단위벡터를 $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_2}=(0,\ 0,\ 1)$

평면 α와 xy평면이 이루는 예각을 θ라고 하면

$$\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right|=|c|$$

이제 $|c|(=\cos\theta)$의 최댓값을 구하면 된다.

(1) $b+c=\frac{7}{5}$인 경우

연립방정식

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ b+c=\frac{7}{5} \end{cases}$$

에서 $|c|$의 최댓값을 구하면 된다.

곱셈공식을 이용하여 식을 변형하면

연립방정식

$$\begin{cases} b+c=\frac{7}{5} \\ bc=\frac{a^2}{2}+\frac{12}{25} \end{cases}$$

에서 $c(=|c|)$의 최댓값을 구하면 된다.

$b,\ c(0\le b\le c)$는 이차방정식

$$t^2-\frac{7}{5}t+\frac{a^2}{2}+\frac{12}{25}=0$$

의 두 실근이다.

$$c=\frac{\frac{7}{5}+\sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2-4\left(\frac{a^2}{2}+\frac{12}{25}\right)}}{2}$$

$$\le\frac{\frac{7}{5}+\sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2-4\times\frac{12}{25}}}{2}=\frac{4}{5}$$

(단, 등호는 $a=0$일 때 성립한다.)

즉, $|c|=c\le\frac{4}{5}$

(2) $b+c=-\frac{7}{5}$인 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로

$$|c|\le\frac{4}{5}$$

(1), (2)에서

$$|c|\le\frac{4}{5}$$

원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 $S(\theta)$라고 하면

$$S(\theta)=\pi\cos\theta=\pi|c|\le\frac{4}{5}\pi$$

$\therefore\ p+q=9$

답 9

30

[풀이1]

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & (x>-1) \\ -f(x) & (x\le-1) \end{cases}$$

함수 $|f(x)|$는 구간 $(-\infty,\ -1)$과 $(-1,\ \infty)$에서 미분가능하다.

k가 짝수일 때,

$|f(x^k)|=f(x^k)$

함수 $|f(x^k)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

k가 홀수일 때,

$$|f(x^k)|=\begin{cases} f(x^k) & (x>-1) \\ -f(x^k) & (x\le-1) \end{cases}$$

함수 $|f(x^k)|$는 구간 $(-\infty,\ -1)$과 $(-1,\ \infty)$에서 미분가능하다.

이상에서 함수 $g(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$과 $(-1,\ \infty)$에서 미분가능하다.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분 가능하려면 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 미분 가능해야 한다.

(1) $n=2m-1$인 경우(m은 자연수)

$x>-1$일 때,

$$g(x)=100(e^{x+1}-1)-\sum_{k=1}^{2m-1}(e^{x^k+1}-1)$$

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$$

$=$

2015학년도 수능 수학영역 B형 해설

$$\lim_{x\to-1+0}\left\{100\frac{e^{x+1}-1}{x+1}-\frac{e^{x+1}-1}{x+1}+\frac{e^{x^2+1}-e^2}{x+1}-\cdots+\frac{e^{x^{2m-2}+1}-e^2}{x+1}-\frac{e^{x^{2m-1}+1}-1}{x+1}\right\}$$

$=100-1+2e^2-3+4e^2+\cdots-(2m+1)$

$\cdots$㉠

$x<-1$일 때,

$g(x)$

$=100(1-e^{x+1})-\sum_{k=1}^{2m-1}(-1)^k(e^{x^k+1}-1)$

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$$

$=$

$$\lim_{x\to-1-0}\left\{-100\frac{e^{x+1}-1}{x+1}+\frac{e^{x+1}-1}{x+1}-\frac{e^{x^2+1}-e^2}{x+1}+\cdots-\frac{e^{x^{2m-2}+1}-e^2}{x+1}+\frac{e^{x^{2m-1}+1}-1}{x+1}\right\}$$

$=-100+1+2e^2+3+4e^2+\cdots+(2m-1)$

$\cdots$㉡

함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 미분 가능해야 하므로

㉠$=$㉡ : $2(1+3+5+\cdots+2m-1)=200$

정리하면

$m^2=100$ 즉, $m=10$, $n=19$

(2) $n=2m$인 경우(m은 자연수)

$x>-1$일 때,

$g(x)=100(e^{x+1}-1)-\sum_{k=1}^{2m}(e^{x^k+1}-1)$

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$$

$=$

$$\lim_{x\to-1+0}\left\{100\frac{e^{x+1}-1}{x+1}-\frac{e^{x+1}-1}{x+1}+\frac{e^{x^2+1}-e^2}{x+1}-\cdots-\frac{e^{x^{2m-1}+1}-1}{x+1}+\frac{e^{x^{2m}+1}-e^2}{x+1}\right\}$$

$=100-1+2e^2-3+4e^2+\cdots+2me^2$

$\cdots$㉢

$x<-1$일 때,

$g(x)=100(1-e^{x+1})-\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k(e^{x^k+1}-1)$

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$$

$=$

$$\lim_{x\to-1-0}\left\{-100\frac{e^{x+1}-1}{x+1}+\frac{e^{x+1}-1}{x+1}-\frac{e^{x^2+1}-e^2}{x+1}+\cdots+\frac{e^{x^{2m-1}+1}-1}{x+1}-\frac{e^{x^{2m}+1}-e^2}{x+1}\right\}$$

$=-100+1+2e^2+3+4e^2+\cdots+2me^2$

$\cdots$㉣

함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 미분 가능해야 하므로

㉢$=$㉣ : $2(1+3+5+\cdots+2m-1)=200$

정리하면

$m^2=100$ 즉, $m=10$, $n=20$

(1), (2)에서 n은 19 또는 20이다.

답 39

[풀이2]

$$|f(x)|=\begin{cases}f(x) & (x>-1)\\ -f(x) & (x\le-1)\end{cases}$$

함수 $|f(x)|$는 구간 $(-\infty,\ -1)$과 $(-1,\ \infty)$에서 미분가능하다.

k가 짝수일 때,

$|f(x^k)|=f(x^k)$

함수 $|f(x^k)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

k가 홀수일 때,

$$|f(x^k)|=\begin{cases}f(x^k) & (x>-1)\\ -f(x^k) & (x\le-1)\end{cases}$$

함수 $|f(x^k)|$는 구간 $(-\infty,\ -1)$과 $(-1,\ \infty)$에서 미분가능하다.

이상에서 함수 $g(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$과 $(-1,\ \infty)$에서 미분가능하다.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분 가능하려면 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 미분 가능해야 한다.

(1) $n=2m-1$인 경우(m은 자연수)

$$g(x)=\begin{cases}h_1(x) & (x>-1)\\ h_2(x) & (x\le-1)\end{cases}$$

두 함수 $h_1(x)$, $h_2(x)$는 다음과 같다.

$h_1(x)=100(e^{x+1}-1)-\sum_{k=1}^{2m-1}(e^{x^k+1}-1)$

$h_2(x)=100(1-e^{x+1})-$

$$\sum_{k=1}^{2m-1}(-1)^k(e^{x^k+1}-1)$$

두 함수 $h_1(x)$, $h_2(x)$의 도함수는

$$h_1'(x)=100e^{x+1}-\sum_{k=1}^{2m-1}kx^{k-1}e^{x^k+1}$$

$$h_2'(x)=-100e^{x+1}-\sum_{k=1}^{2m-1}(-1)^k kx^{k-1}e^{x^k+1}$$

우선 함수 $g(x)$의 $x=-1$에서의 연속성을 판단하자.

$\lim_{x\to-1+0} g(x)$

$=\lim_{x\to-1+0} h_1(x)=-(m-1)(e^2-1)$

$\lim_{x\to-1-0} g(x)$

$=\lim_{x\to-1-0} h_2(x)=-(m-1)(e^2-1)$

$g(-1)$

$=h_2(-1)=-(m-1)(e^2-1)$

이상에서

$\lim_{x\to-1} g(x)=g(-1)$

함수의 연속의 정의에서 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

이제 함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 미분가능할 조건을 구하자.

$x>-1$일 때,

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1+0}\frac{h_1(x)-h_1(-1)}{x+1}$$

$=h_1'(-1)$

$$=100-\sum_{k=1}^{2m-1}k(-1)^{k-1}e^{(-1)^k+1}$$

$=100-(1-2e^2+3-4e^2+\cdots+2m-1)$

$\cdots$㉠

$x<-1$일 때,

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1-0}\frac{h_2(x)-h_2(-1)}{x+1}$$

$=h_2'(-1)$

$$=-100-\sum_{k=1}^{2m-1}k(-1)^{2k-1}e^{(-1)^k+1}$$

$=-100+(1+2e^2+3+4e^2+\cdots+2m-1)$

$\cdots$㉡

함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 미분 가능해야 하므로

㉠=㉡ : $2(1+3+5+\cdots+2m-1)=200$

정리하면

$m^2=100$ 즉, $m=10$, $n=19$

(2) $n=2m$인 경우(m은 자연수)

$$g(x)=\begin{cases}h_3(x) & (x>-1)\\ h_4(x) & (x\le -1)\end{cases}$$

두 함수 $h_3(x)$, $h_4(x)$는 다음과 같다.

$$h_3(x)=100(e^{x+1}-1)-\sum_{k=1}^{2m}(e^{x^k+1}-1)$$

$$h_4(x)=100(1-e^{x+1})-\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k(e^{x^k+1}-1)$$

두 함수 $h_3(x)$, $h_4(x)$의 도함수는

$$h_3'(x)=100e^{x+1}-\sum_{k=1}^{2m}kx^{k-1}e^{x^k+1}$$

$$h_4'(x)=-100e^{x+1}-\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k kx^{k-1}e^{x^k+1}$$

우선 함수 $g(x)$의 $x=-1$에서의 연속성을 판단하자.

$\lim_{x\to-1+0} g(x)$

$=\lim_{x\to-1+0} h_3(x)=-(m-1)(e^2-1)$

$\lim_{x\to-1-0} g(x)$

$=\lim_{x\to-1-0} h_4(x)=-(m-1)(e^2-1)$

$g(-1)$

$=h_4(-1)=-(m-1)(e^2-1)$

이상에서

$\lim_{x\to-1} g(x)=g(-1)$

함수의 연속의 정의에서 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

이제 함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 미분가능할 조건을 구하자.

$x>-1$일 때,

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$$

$= \lim_{x \to -1+0} \frac{h_3(x) - h_3(-1)}{x+1}$

$= h_3{}'(-1)$

$= 100 - \sum_{k=1}^{2m} k(-1)^{k-1} e^{(-1)^k + 1}$

$= 100 - (1 - 2e^2 + 3 - 4e^2 + \cdots - 2me^2)$

$\cdots$ ㉢

$x < -1$일 때,

$\lim_{x \to -1-0} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1}$

$= \lim_{x \to -1-0} \frac{h_4(x) - h_4(-1)}{x+1}$

$= h_4{}'(-1)$

$= -100 - \sum_{k=1}^{2m} k(-1)^{2k-1} e^{(-1)^k + 1}$

$= -100 + (1 + 2e^2 + 3 + 4e^2 + \cdots + 2me^2)$

$\cdots$ ㉣

함수 $g(x)$가 $x = -1$에서 미분 가능해야 하므로

㉢=㉣ : $2(1+3+5+\cdots+2m-1) = 200$

정리하면

$m^2 = 100$ 즉, $m = 10$, $n = 20$

(1), (2)에서 n은 19 또는 20이다.

답 39