2015학년도 수능대비
6월 모의평가 분석

A형

유사 및 심화 문제

2015년 대학수학능력시험 대비 6월 평가원_21번

21. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1)=0$
(나) $\lim_{x \to n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-1)(n-2)$ $(n=1, 2, 3, 4)$

$g(5)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

1. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(3)=0$
(나) $\lim_{x \to n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-1)(n-2)$ $(n=1, 2, 3, 4)$

$g(5)$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

2. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$\lim_{x \to n} \frac{f(x)}{(x-1)g(x)} = n(n-1)$ $(n=0, 1, 2, 3)$

이때, $g(7)$의 값은?

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

2015년 대학수학능력시험 대비 6월 평가원_30번

30. 양수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 하자. 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a \leq b \leq 20$
(나) $\log b - \log a \leq f(a) - f(b)$

1. 양의 정수 n에 대하여 $\log n$의 지표를 $f(n)$, 가수를 $g(n)$이라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 양의 정수 n의 개수는?

(가) $f(3) < f(n) < f(2011)$
(나) $\{g(n)\}^2 - g(n) + \log 2 \cdot \log 5 < 0$

① 326 ② 328 ③ 330 ④ 332 ⑤ 334

2. 자연수 k에 대하여 $\log k$의 지표와 가수를 각각 x좌표와 y좌표로 갖는 점을 P_k라 하자. 다음 조건을 만족시키는 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오.

(가) $1 \leq m < n < 100$
(나) $\overline{\mathrm{P}_m \mathrm{P}_n} = \sqrt{1 + (\log 2)^2}$

3. 양수 x에 대하여 $\log x$의 지표를 $f(x)$라 하자. 등식

$$2f(m) - f(2m) = 1$$

을 만족시키는 1000 이하의 자연수 m의 개수를 구하시오.

4. 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을

$a_n =$ ($\log n$에 가장 가까운 정수) ($n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

라 하자. 예를 들어 $a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ a_4 = 1,\ \cdots$이다. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\sqrt{10} \fallingdotseq 3.162$로 계산한다.)

[보 기]

ㄱ. $a_{14} = 2$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{20} a_n = 17$

ㄷ. $a_n = 2$를 만족시키는 자연수 n의 개수는 285이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 자연수 n에 대하여 $\log n$의 지표를 $f(n)$, 가수를 $g(n)$ $(0 \le g(n) < 1)$이라 하자.

$g(n+1) < g(n)$을 만족하는 n의 값 중 작은 것부터 차례대로 $n_1, n_2, n_3, \cdots$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} f(n_k)$의 값은?

① 35 ② 36 ③ 45 ④ 46 ⑤ 55

6. 자연수 n에 대하여 $\log n$의 지표와 가수를 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하자. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}_n(f(n),\ g(n))$이 연립부등식

$$\begin{cases} y \ge \frac{1}{3}x \\ 0 \le y \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

의 영역에 속하도록 하는 자연수 n의 개수를 오른쪽 상용로그표를 이용하여 구하여라.

x	$\log x$
2.1	0.3222
2.2	0.3424
3.1	0.4914
3.2	0.5051

2015년 대학수학능력시험 대비 6월 평가원_B형 20번

20. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 의 개수는? [4점]

> (가) $a+b+c=6$
> (나) 좌표평면에서 세 점 $(1,\ a)$, $(2,\ b)$, $(3,\ c)$ 가 직선 위에 있지 않다.

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

1. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 의 개수를 구하시오.

> (가) $a+b+c=6$
> (나) 세 수 a, b, c가 등차수열을 이루지 않는다.

2. 방정식 $x+3y+3z=32$를 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구하여라.

2015년 대학수학능력시험 대비 6월 평가원_B형 30번

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $1 \le f'(x) \le 3$ 이다.
(나) 모든 정수 n 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(4n, 8n)$, 점 $(4n+1,\ 8n+2)$, 점 $(4n+2,\ 8n+5)$, 점 $(4n+3,\ 8n+7)$ 을 모두 지난다.
(다) 모든 정수 k 에 대하여 닫힌 구간 $[2k,\ 2k+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_3^6 f(x)dx = a$ 라 할 때, $6a$ 의 값을 구하시오. [4점]

1. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \le 3) \\ -\frac{1}{2}(x-a)^2+b & (x>3) \end{cases}$ 이 모든 실수에서 미분가능할 때, $y=f(x)$와 $y=3x$로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합 S에 대하여 $4S$의 값을 구하시오.

2. 함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2\ \ (a>0)$과 실수 t에 대하여, $x \leqq t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때 $\int_{-2}^{3} g(t)dt$의 최댓값을 M이라 할 때 $5M$의 값을 구하시오.

3. 삼차함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ m-f(x) & (a \leqq x<b) \\ n+f(x) & (x \geqq b) \end{cases}$$

로 정의한다. 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분 가능 할 때 $\int_{-3}^{1} g(x)dx$의 값을 구하시오.

6월 모의평가시험 유사 및 심화문제_정답

A형

21번	1	2
⑤	②	⑤

30번	1	2	3	4	5	6
71	②	12	540	④	③	13

B형

20번	1	2
⑤	15	45

30번	1	2	3
167	90	37	172

A형 21번 정답 ⑤

해설

$n=1$일 때, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ ……㉠

$n=2$일 때, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ ……㉡

$n=3$일 때, $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)}{g(x)}=2$ ……㉢

$n=4$일 때, $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{f(x)}{g(x)}=6$ ……㉣

조건 ㈎에서 $g(1)=0$이므로 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$는

$g(x)=(x-1)\left(x^2+ax+b\right)$로 놓을 수있다.

따라서 ㉠, ㉡에서 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$이고

㉢에서 $\dfrac{f(3)}{g(3)}=\dfrac{2}{9+3a+b}=2$이므로 $3a+b+8=0$ ……㉤

㉣에서 $\dfrac{f(4)}{g(4)}=\dfrac{6}{16+4a+b}=6$이므로 $4a+b+15=0$ ……㉥

㉤, ㉥을 연립하여 풀면 $a=-7$, $b=13$

$\therefore$ $g(x)=(x-1)\left(x^2-7x+13\right)$

따라서 구하는 $g(5)$의 값은 $4\times3=12$

A형 21번-1 정답 ②

해설

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$에서 $f(x)$는 $(x-1)(x-2)$를 인수를 갖는다.

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)}{g(x)}=2$에서 $g(3)=0$이므로 $f(3)=0$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$, $g(x)=(x-3)g_1(x)$

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{2}{g_1(3)}=2$에서 $g_1(3)=1$

$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{6}{g_1(4)}=6$에서 $g_1(4)=1$

$\therefore g_1(x)=(x-3)(x-4)+1$

$\therefore g(5)=2\times(2+1)=6$

A형 21번-2 정답 ⑤

해설

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{(x-1)g(x)}=0$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x-1)g(x)}=0$에서 $f(x)=x(x-1)^2$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-1)g(x)}=\frac{2}{g(2)}=2$에서 $g(2)=1$

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{(x-1)g(x)}=\frac{12}{2g(3)}=6$에서 $g(3)=1$

$\therefore g(x)=(x-2)(x-3)+1$

$\therefore g(7)=21$

A형 30번 정답 71

해설

$\log x$의 지표를 $g(x)$라 하면 $\log x=g(x)+f(x)$이고 조건 (나)에서

$\{g(b)+f(b)\}-\{g(a)+f(a)\}\le f(a)-f(b)$

$g(b)+2f(b)\le g(a)+2f(a)$

(1) $g(a)=g(b)=0$인 경우 또는 $g(a)=g(b)=1$인 경우

$g(b)+2f(b)\le g(a)+2f(a)$에서 $f(b)\le f(a)$인데 $\log x$의 가수 $f(x)=\log x-[\log x]$가 증가함수이므로 주어진 조건을 만족하는 a와 b는 같은 경우이다. 따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 20이다.

(2) $g(a)=0$, $g(b)=1$인 경우

$g(b)+2f(b)\le g(a)+2f(a)$에서 $1+2f(b)\le 2f(a)$

$2+2f(b)\le 1+2f(a)$

$2\log b \le 1+2\log a=\log 10a^2$, $\quad b^2 \le 10a^2$

부등식을 만족하는 순서쌍은

$a=4$일 때, b는 10에서 12까지 3가지

$a=5$일 때, b는 10에서 15까지 6가지

$a=6$일 때, b는 10에서 18까지 9가지

$a=7$일 때, b는 10에서 20까지 11가지

$a=8$일 때, b는 10에서 20까지 11가지

$a=9$일 때, b는 10에서 20까지 11가지

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 51이다.

그러므로 총 71개

A형 30번-1 정답 ②

해설

(가)에서 3은 한 자리의 양의 정수이므로 $f(3)=0$, 2011은 네 자리의 양의 정수이므로 $f(2011)=3$

$f(n)=1$ 또는 $f(n)=2$이다.

(나)에서 주어진 식의 좌변을 인수분해하면

$\{g(n)-\log 2\}\{g(n)-\log 5\}<0$

$\therefore \quad \log 2<g(n)<\log 5$

이때 $\log n = f(n)+g(n)$이므로

ⅰ) $f(n)=1$일 때 $1+\log 2 < f(n)+g(n) < 1+\log 5$

$\therefore \log 20 < \log n < \log 50$

따라서 양의 정수 n 은 $21, 22, \cdots, 49$ 로 29 개다.

ii) $f(n) = 2$ 일 때 $2 + \log 2 < f(n) + g(n) < 2 + \log 5$

$\therefore \log 200 < \log n < \log 500$

따라서 양의 정수 n 은 $201, 202, \cdots, 499$ 로 299 개다.

i), ii)에 의하여 양의 정수 n 의 개수는 $29 + 299 = 328$ 이다.

A형 30번-2 정답 12

해설

$0 \le \log m < \log n < 2$

$[\log m], [\log n] = 0, 1$

0	0
0	1
1	1

i) $1 \le m < n < 10,\ \dfrac{m}{n} < 1$

$P_m = (0, \log m), P_n = (0, \log n)$

$\overline{P_m P_n}^2 = (\log \dfrac{m}{n})^2 = 1 + (\log 2)^2$

$\log \dfrac{m}{n} = -1 \pm \log 2 = \log \dfrac{1}{5}$ or $\log \dfrac{1}{20}$

$\therefore n = 20m$ 또는 $n = 5m$

ㄱ) $n = 5m$ 일 때, $(m, n) = (2, 10), (3, 15), (4, 20), (5, 25),$
$(6, 30), (7, 35), (8, 40), (9, 45)$

ㄴ) $n = 20m$ 일 때, $(m, n) = (1, 20), (2, 40), (3, 60), (4, 80)$

iii) $10 \le m < n < 100$

$P_m(1, -1 + \log m),\ P_n(1, -1 + \log n)$

$\overline{P_m P_n}^2 = (\log \dfrac{m}{n})^2 - 1 + (\log 2)^2 = 1 + (\log 2)^2$

은 성립할 수 없다.

따라서 총 12개

A형 30번-3 정답 540

해설

$f(m)$ 은 $\log m$의 지표이므로 정수이고

$1 \le m \le 1000$ 에서 $0 \le f(m) \le 3$,

$2 \le 2m \le 2000$ 에서 $0 \le f(2m) \le 3$ 이다.

따라서 주어진 조건 $2f(m) - f(2m) = 1$ 을 만족시키는 순서쌍 $(f(m), f(2m))$ 은 $(1, 1)$, $(2, 3)$ 이다.

i) $(f(m), f(2m)) = (1, 1)$ 일 때

$f(m) = 1$ 에서 $10 \le m < 100$

$f(2m) = 1$ 에서 $10 \le 2m < 100$

따라서 $10 \le m < 50$ 이므로 m 은 40 개다.

ii) $(f(m),\ f(2m)) = (2,\ 3)$ 일 때

$f(m) = 2$ 에서 $100 \le m < 1000$

$f(2m) = 3$ 에서 $1000 \le 2m < 10000$

따라서 $500 \le m < 1000$ 이므로 m 은 500 개다.

i), ii)에서 구하는 m 의 개수는 540 이다.

A형 30번-4 정답 ④

해설

$\sqrt{10} = 3.162$에서 $\log 3.162 = \log\sqrt{10} = \dfrac{1}{2} = 0.5$이다.

ㄱ. $\log 10 < \log 14 < \log 31.62$에서 $1 < \log 14 < 1.5$이므로 $a_{14} = 1$

ㄴ. $\log 3 < \log\sqrt{10} < \log 4$이므로

$\log 3 < 0.5$, $\log 4 > 0.5$

또, $\log 10 < \log 20 < \log 31.62$이므로

$1 < \log 20 < 1.5$

즉, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = a_5 = a_6 = \cdots = a_{20} = 1$이므로

$$\sum_{n=1}^{20} a_n = 0+0+0+1+1+\cdots+1 = 17$$

ㄷ. $a_n = 2$이려면 $1.5 < \log n < 2.5$이어야 한다.

그런데 $\log 10\sqrt{10} = \log 31.62 = 1.5$,

$\log 100\sqrt{10} = \log 316.2 = 2.5$이므로

$31.62 \le n < 316.2$ $\qquad \therefore 32 \le n \le 316$

즉, $a_n = 2$를 만족시키는 자연수 n의 개수는 285이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

A형 30번-5 정답 ③

해설

$\log(n+1) - \log n = \log\dfrac{n+1}{n} \ne$(정수)이고

$0 < \log(n+1) - \log n < 1$이므로

$g(n+1) < g(n)$이 성립하기 위해서는

$\log(n+1) =$(정수)일 때이고, 이때 $g(n+1) = 0$

즉, $n+1 = 10^l$ (l은 자연수) 꼴이어야 한다.

$\therefore n = 10-1,\ 10^2-1,\ 10^3-1, \cdots$

즉, $n_k = 10^k - 1$

이때 $f(n_k)$는 $\log(10^k - 1)$의 지표이므로

$f(n_k) = k-1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} f(n_k) = \sum_{k=1}^{10} (k-1) = 45$$

A형 30번-6 정답 13

해설

$\begin{cases} g(n) \geq \frac{1}{3}f(n) \cdots (1) \\ 0 \leq g(n) \leq \frac{1}{2} \cdots (2) \end{cases}$ 에서 n이 자연수이므로 $f(n)=0, 1, 2, 3, \cdots$이다. 그런데 조건(1)에서

$f(n)$은 0 또는 1이다.

i) $f(n)=0$일 때,

$0 \leq g(n) \leq \frac{1}{2}$이므로 $n=1, 2, 3$

($\because$ $\log 3.1=0.4914$, $\log 3.2=0.5051$)

ii) $f(n)=1$일 때,

$\frac{1}{3} \leq g(n) \leq \frac{1}{2}$에서

$0.3222=\log 2.1<\frac{1}{3}<\log 2.2=0.3424$이고 $0.4914=\log 3.1<\frac{1}{2}<\log 3.2=0.5051$이므로

$\log 2.1<g(n)<\log 3.2$

그러므로 $n=22, 23, \cdots, 31$

i)과 ii)에서 13개

B형 20번 정답 ⑤

해설

$a+b+c=6$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (a, b, c)의

개수는 ${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6=28$개이다.

(나) 조건에서 $(1, a)$, $(2, b)$, $(3, c)$는 한 직선 위에 있지 않으므로

$b-a \neq c-b$

즉, $2b \neq a+c$이다.

$2b=a+c$를 만족하는 다음 5가지를 제외한다.

따라서 순서쌍 (a, b, c)를 구하면

(1, 2, 3), (3, 2, 1), (0, 2 ,4), (4, 2, 0), (2, 2, 2) 이다.

따라서 만족하는 개수는 $28-5=23$(개)

B형 20번-1 정답 15

해설

$a+b+c=6$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6=28$개다.

(나)조건에서 $2a \neq b+c$이고 $2b \neq a+c$이고 $2c \neq a+b$

$2a=b+c$인 경우는 $a+b+c=3a=6$에서 $a=2$이고 $b+c=4$인 경우이므로 ${}_2H_4={}_5C_4=5$이다.

$2b=a+c$인 경우와 $2c=a+b$인 경우도 마찬가지로 5가지이다. 그런데 2, 2, 2는 세 가지 경우에 모두 포함되므로 구하는 경우의 수는 $28-3\times5+2=15$이다.

B형 20번-2 정답 45

해설

$x+3y+3z=3\times10+2$이므로 x는 3으로 나누어 나머지 2인 수이다.

$x=3k-1$이라 놓고 준식에 대입하면 $3k-1+3y+3z=32$에서 $k+y+z=11$, k, y, z는 자연수이므로 ${}_3H_8={}_{10}C_8=45$

B형 30번 정답 167

해설

함수 $f(x)$가 $(3,\ 7)$, $(4,\ 8)$, $(5,\ 10)$, $(6,\ 13)$을 지나고 $1\le f'(x)\le 3$이므로

(1) 두 점 $(3,\ 7)$, $(4,\ 8)$의 기울기가 1이므로 $3\le x\le 4$에서 $f(x)=x+4$

(2) 두 점 $(5,\ 10)$, $(6,\ 13)$의 기울기가 3이므로 $5\le x\le 6$에서 $f(x)=3x-5$

(3) 주어진 조건에 의해 $(4,\ 8)$과 $(5,\ 10)$을 지나는 함수는 이차함수이고

$f(x)=ax^2+bx+c$

$f'(x)=2ax+b$

실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f'(4)=8a+b=1$

$f'(5)=\ -10a+b=3$

$a=1,\ b=-7$

$f(4)=8$에서 $c=20$

(1), (2), (3)에 의해

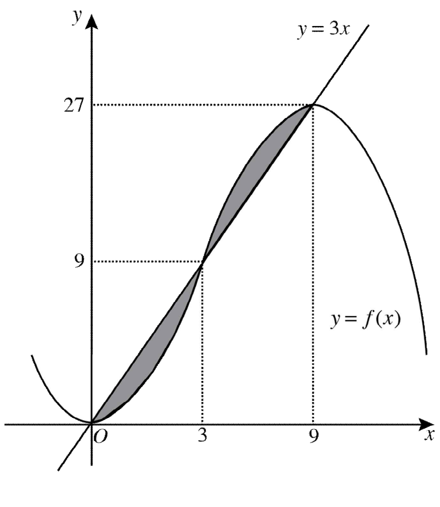
$$\int_3^6 f(x)dx \ =\int_3^4(x+4)dx+\int_4^5(x^2-7x+20)dx+\int_5^6(3x-5)dx=\frac{167}{6}$$

$\therefore\ 6a=167$

B형 30번-1 정답 90

해설

$f(3)=9=-\dfrac{1}{2}(3-a)^2+b$, $f'(3)=6=-(3-a)$에서 $a=9$, $b=27$



$$S=\frac{3^3}{6}+\frac{\frac{1}{2}\cdot 6^3}{6}$$
$$=\frac{9}{2}+\frac{36}{2}=\frac{45}{2}$$
$\therefore\ 4S=90$

B형 30번-2 정답 37

해설

$f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2$,

$f'(x)=-12x\{x^2-(a-1)x-a\}=-12x(x-a)(x+1)=0$에서 $x=-1,\ 0,\ a\ \ (a>0)$이므로

$g(t)$가 실수전체에서 미분가능하려면 극댓값 $f(a)\le$ 극댓값 $f(-1)$이어야 한다

$a^4+2a^3\le 2a+1$에서 $-1\le a\le 1$ 이고 조건에서 $a>0$이므로 $0<a\le 1$

$$\therefore\ g(t)=\begin{cases} f(t) & (t\le -1) \\ f(-1) & (-1<t) \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{3} g(t)dt=\int_{-2}^{-1} f(t)dt+\int_{-1}^{3} f(-1)dt$$
$$=-\frac{18}{5}-a+4(2a+1)$$
$$=7a+\frac{2}{5}\le 7+\frac{2}{5}$$

$$\therefore\ 5M=5\left(7+\frac{2}{5}\right)=37$$

B형 30번-3 정답 172

해설

$f(x)=x^3+3x^2-9x$에서 $f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$x=a$와 $x=b$에서 미분가능하려면

$f(a)=m-f(a),\ f'(a)=-f'(b)$

$m-f(b)=n+f(b),\ -f'(a)=f'(b)$에서

$f'(a)=f'(b)=0$이고 $a<b$이므로 $a=-3,\ b=1$

$\therefore\ m=2f(a)=2f(-3)=54,\ n=m-2f(b)=54-2f(1)=64$

$$\therefore\ \int_{-3}^{1} g(x)dx=\int_{-3}^{1}(m-f(x))dx$$
$$=\int_{-3}^{1}\left(54-x^{3-3x^2}+9x\right)dx$$
$$=172$$