2015학년도 수능대비

6월 모의평가 분석

A형

유사 및 심화 문제

2015년 대학수학능력시험 대비 6월 평가원_17번

17. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 3$이고,

$$2a_{n+1} = 3a_n - \frac{6n+2}{(n+1)!} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여

$$2a_{n+1} = 3a_n - \frac{6(n+1)-4}{(n+1)!}$$

이다.

$$2a_{n+1} - \frac{4}{(n+1)!} = 3a_n - 3 \times \boxed{(가)}$$

이므로, $b_n = a_n - \boxed{(가)}$라 하면

$$2b_{n+1} = 3b_n$$

이다. $b_{n+!} = \frac{3}{2}b_n$ 이고 $b_1 = 1$이므로

$$b_n = \boxed{(나)}$$

이다. 그러므로 $a_n = \boxed{(가)} + \boxed{(나)}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(3) \times g(3)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

1. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{6S_k}{a_k+3}=S_n\ (n\geq 1)$$

이 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

[과 정]

주어진 식에 $n=1$을 대입하면

$S_1>0$이므로 $a_1=$ $\boxed{\text{(가)}}$이다.

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{6S_k}{a_k+3}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{6S_k}{a_k+3}=\frac{6S_n}{a_n+3}\ (n\geq 2)$이고

$a_1=\frac{6S_1}{a_1+3}$이므로

$\boxed{\text{(나)}}\cdot S_n=a_n^2+\boxed{\text{(가)}}\cdot a_n\ (n\geq 1)$이다.

한편, $6(S_{n+1}-S_n)=a_{n+1}^2+3a_{n+1}-(a_n^2+3a_n)$이므로

$$6a_{n+1}=a_{n+1}^2-a_n^2+3a_{n+1}-3a_n$$

$\vdots$

따라서 $a_n=$ $\boxed{\text{(다)}}$

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (다)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+q+f(10)$의 값은?

① 36 ② 39 ③ 42 ④ 45 ⑤ 48

2. 다음은 $a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_n+a_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$인 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

[과 정]

$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$에서 $a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0 \cdots$㉠

$(a_{n+2}-\alpha a_{n+1})=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$이라 하면,

$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0 \cdots$㉡

㉠과 ㉡에서 $\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$을 얻을 수 있다.

$\alpha,\ \beta$는 이차방정식 $\boxed{\quad(가)\quad}$의 두 근이다.

$\therefore \alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 또는 $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$(a_{n+2}-\alpha a_{n+1})=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$에서

수열 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$은 첫째항이 $a_2-\alpha a_1$, 공비가 β인 등비수열이다.

$\therefore a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$

(1) $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\therefore a_{n+1}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a_n=\boxed{(나)}\cdots$㉢

(2) $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore a_{n+1}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}a_n=\boxed{(다)}\cdots$㉣

㉣ − ㉢을 하면,

$\therefore a_n=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\left\{\boxed{(다)}-\boxed{(나)}\right\}$이 된다.

위의 풀이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$x^2-x-1=0$	$\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$	$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$
②	$x^2+x-1=0$	$\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$	$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$
③	$x^2-x-1=0$	$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$	$\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
④	$x^2+x-1=0$	$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$	$\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$
⑤	$x^2-x-1=0$	$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$	$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

3. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=4$이고,

$$a_{n+1}=n \cdot 2^n+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\ (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

[과 정]

주어진 식에 의하여

$a_n=(n-1) \cdot 2^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k}\ (n \geq 2)$이다.

따라서 2 이상의 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}-a_n=\boxed{(가)}+\frac{a_n}{n}$이므로

$a_{n+1}=\frac{(n+1)a_n}{n}+\boxed{(가)}$이다.

$b_n=\frac{a_n}{n}$이라 하면

$b_{n+1}=b_n+\frac{\boxed{(가)}}{n+1}\ (n \geq 2)$이고

$b_2=3$이므로 $b_n=\boxed{(나)}\ (n \geq 2)$이다.

그러므로 $a_n=\begin{cases} 4 & (n=1) \\ n \times \{\boxed{(나)}\} & (n \geq 2) \end{cases}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(4)+g(7)$의 값은?

① 90 ② 95 ③ 100 ④ 105 ⑤ 110

4. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 10$이고

$$(a_{n+1})^n = 10(a_n)^{n+1} \ (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

[과 정]

주어진 식의 양변에 상용로그를 취하면

$n\log a_{n+1} = (n+1)\log a_n + 1$이다.

양변을 $n(n+1)$로 나누면

$\dfrac{\log a_{n+1}}{n+1} = \dfrac{\log a_n}{n} + \boxed{\text{(가)}}$이다.

$b_n = \dfrac{\log a_n}{n}$이라 하면 $b_1 = 1$이고

$b_{n+1} = b_n + \boxed{\text{(가)}}$이다.

수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$b_n = \boxed{\text{(나)}}$이므로 $\log a_n = n \times \boxed{\text{(나)}}$이다.

그러므로 $a_n = 10^{n \times \boxed{\text{(나)}}}$이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$과 $g(n)$이라 할 때, $\dfrac{g(10)}{f(4)}$의 값은?

① 38 ② 40 ③ 42 ④ 44 ⑤ 46

5. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고,

$$a_{n+1}=n+1+\frac{(n-1)!}{a_1a_2\cdots a_n}\quad(n\geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

[과 정]

모든 자연수 n에 대하여

$a_1a_2\cdots a_na_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n\times(n+1)+(n-1)!$

이다. $b_n=\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}$ 이라 하면, $b_1=1$이고

$$b_{n+1}=b_n+\boxed{(\text{가})}$$

이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$b_n=\boxed{(\text{나})}$ 이므로 $\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}=\boxed{(\text{나})}$ 이다.

⋮

따라서 $a_1=1$이고, $a_n=\dfrac{(n-1)(2n-1)}{2n-3}\ (n\geq 2)$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$이라 할 때, $f(13)\times g(7)$의 값은?

① $\frac{1}{70}$ ② $\frac{1}{77}$ ③ $\frac{1}{84}$ ④ $\frac{1}{91}$ ⑤ $\frac{1}{98}$

6. 첫째항이 -8인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{n+1}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=2^{n+1}(n^2+n+2)\ (n\geq 1)$$

이 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

[과 정]

주어진 식에 의하여

$$a_n-2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k}=2^n(n^2-n+2)\ (n\geq 2)$$

이다. 따라서 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n-\frac{2}{n}a_n=\boxed{(가)}$$

이므로

$$a_{n+1}-\frac{n+2}{n}a_n=\boxed{(가)}$$

이다. $b_n=\dfrac{a_n}{n(n+1)}$이라 하면

$$b_{n+1}-b_n=\boxed{(나)}\ (n\geq 2)$$

이고, $b_2=0$이므로

$$b_n=\boxed{(다)}\ (n\geq 2)$$

이다.

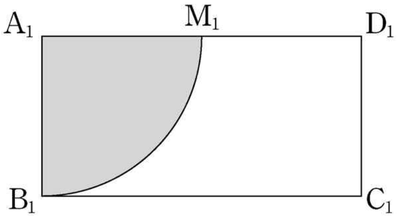
⋮

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\dfrac{f(4)}{g(5)}+h(6)$의 값은? [4점]

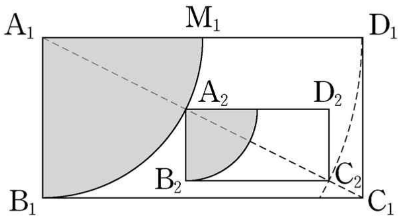
① 65 ② 70 ③ 75 ④ 80 ⑤ 85

2015년 대학수학능력시험 대비 6월 평가원_18번

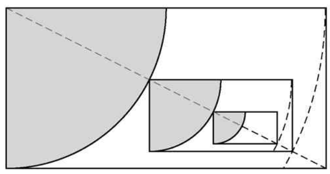
18. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{A_1D_1}}=2$, $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=1$인 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$에서 선분 $\mathrm{A_1D_1}$의 중점을 $\mathrm{M_1}$이라 하자. 중심이 $\mathrm{A_1}$, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $\mathrm{A_1B_1M_1}$을 그리고, 부채꼴 $\mathrm{A_1B_1M_1}$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 부채꼴 $\mathrm{A_1B_1M_1}$의 호 $\mathrm{B_1M_1}$이 선분 $\mathrm{A_1C_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{A_2}$라 하고, 중심이 $\mathrm{A_1}$, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{A_1D_1}}$인 원이 선분 $\mathrm{A_1C_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{C_2}$라 하자. 가로와 세로의 길이의 비가 $2:1$이고 가로가 선분 $\mathrm{A_1D_1}$과 평행한 직사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$를 그리고, 직사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$에서 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 부채꼴에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[4점]



R_1



R_2



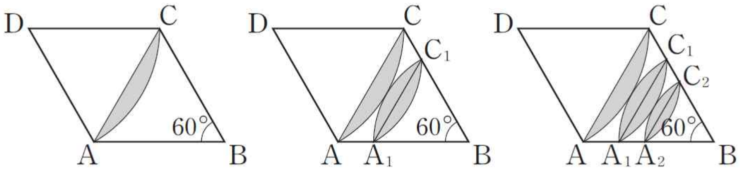
R_3

$\cdots$

$\cdots$

① $\frac{5}{16}\pi$　　② $\frac{11}{32}\pi$　　③ $\frac{3}{8}\pi$
④ $\frac{13}{32}\pi$　　⑤ $\frac{7}{16}\pi$

1. 한 변의 길이가 1 이고, $\angle ABC = 60°$ 인 마름모 ABCD 가 있다. [그림 1]과 같이 점 D 를 중심으로 하고 선분 DC 를 반지름으로 하는 부채꼴 DAC 의 호 $\overset{\frown}{AC}$ 와 선분 AC 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라. 하자. [그림 2]와 같이 점 B 를 중심으로 하고 호 $\overset{\frown}{AC}$ 와 접하는 부채꼴 BA_1C_1 의 호 $\overset{\frown}{A_1C_1}$ 과 호 $\overset{\frown}{A_1C_1}$ 을 직선 A_1C_1 에 대칭이동한 호로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하자. [그림 3]과 같이 점 B 를 중심으로 하고 호 $\overset{\frown}{A_1C_1}$ 과 접하는 부채꼴 BA_2C_2 의 호 $\overset{\frown}{A_2C_2}$ 와 호 $\overset{\frown}{A_2C_2}$ 를 직선 A_2C_2 에 대칭이동한 호로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_3 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 도형의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값을 S_1 을 이용하여 나타낸 것은?

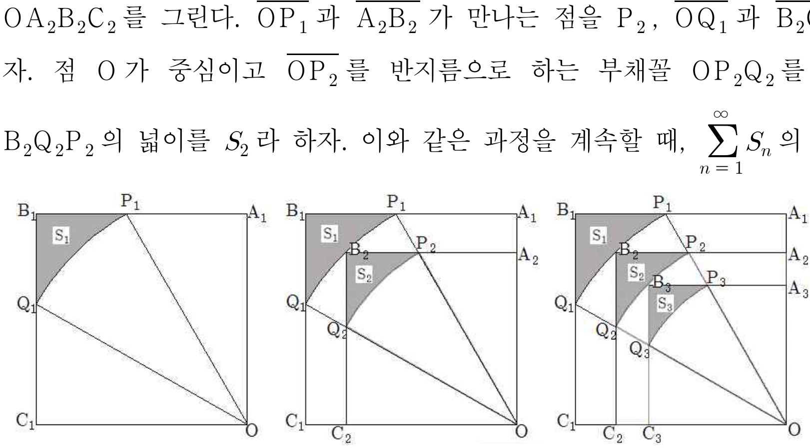


[그림 1]　　[그림 2]　　[그림 3]

① $\left(-1+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)S_1$　　② $\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)S_1$　　③ $\left(1+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)S_1$

④ $\left(2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)S_1$　　⑤ $\left(2+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)S_1$

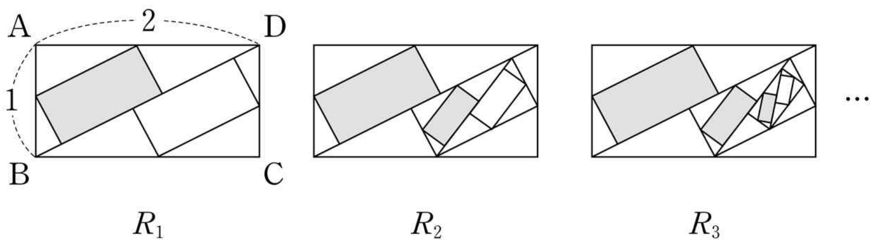
2. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $OA_1B_1C_1$ 에서 $\angle O$ 의 3등분선이 $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$ 과 만나는 점을 각각 P_1, Q_1 이라 하자. 점 O 가 중심이고 $\overline{OP_1}$ 을 반지름으로 하는 부채꼴 OP_1Q_1 을 그린다. [그림1]에서 도형 $B_1Q_1P_1$ 의 넓이를 S_1 이라 하자. 호 P_1Q_1 의 중점 B_2, $\overline{OA_1} /\!/ \overline{C_2B_2}$ 인 $\overline{OC_1}$ 위의 점 C_2, $\overline{OC_1} /\!/ \overline{A_2B_2}$ 인 $\overline{OA_1}$ 위의 점 A_2, 점 O를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $OA_2B_2C_2$ 를 그린다. $\overline{OP_1}$ 과 $\overline{A_2B_2}$ 가 만나는 점을 P_2, $\overline{OQ_1}$ 과 $\overline{B_2C_2}$ 가 만나는 점을 Q_2 라 하자. 점 O 가 중심이고 $\overline{OP_2}$ 를 반지름으로 하는 부채꼴 OP_2Q_2 를 그린다. [그림2]에서 도형 $B_2Q_2P_2$ 의 넓이를 S_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 합은?



[그림1]　　[그림2]　　[그림3]　…

① $-3+\pi$　　② $4-\pi$　　③ $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$　　④ $3-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$　　⑤ $4-\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

3. 직사각형 ABCD에서 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{AD}}=2$이다. 그림과 같이 직사각형 ABCD의 한 대각선에 의하여 만들어지는 두 직각삼각형의 내부에 두 변의 길이의 비가 $1:2$인 두 직사각형을 긴 변이 대각선 위에 놓이면서 두 직각삼각형에 각각 내접하도록 그리고, 새로 그려진 두 직사각형 중 하나에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 새로 그려진 두 직사각형 중 색칠되어 있지 않은 직사각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 직사각형 중 하나에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



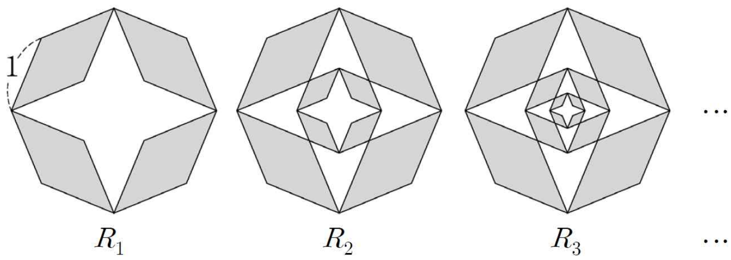
① $\frac{37}{61}$　② $\frac{38}{61}$　③ $\frac{39}{61}$　④ $\frac{40}{61}$　⑤ $\frac{41}{61}$

4. 그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정팔각형의 이웃한 두 변을 변으로 하는 4 개의 평행사변형을 서로 겹치지 않게 그리고, 이 평행사변형 4 개를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1 에 정팔각형의 내부에 있는 평행사변형의 꼭짓점 4 개를 꼭짓점으로 포함하는 정팔각형을 그린 후, 새로 그려진 정팔각형에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 4 개의 평행사변형을 그리고 색칠하여 얻는 그림을 R_2 라 하자.

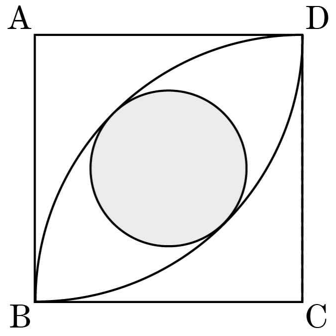
그림 R_2 에 가장 작은 정팔각형의 내부에 있는 평행사변형의 꼭짓점 4 개를 꼭짓점으로 포함하는 정팔각형을 그린 후, 새로 그려진 정팔각형에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 4 개의 평행사변형을 그리고 색칠하여 얻는 그림을 R_3 이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?

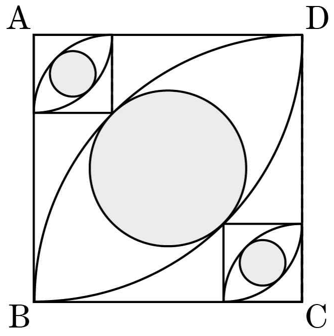


① $2+\sqrt{2}$　② $1+2\sqrt{2}$　③ $3+\sqrt{2}$　④ $1+3\sqrt{2}$　⑤ $4+\sqrt{2}$

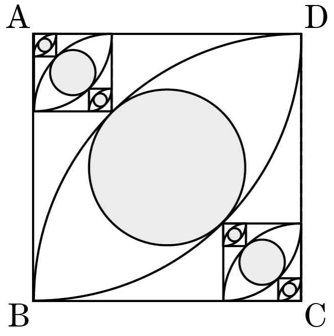
5. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD 안에 꼭짓점 A, C를 중심으로 하고 선분 AB, CD를 반지름으로 하는 사분원을 각각 그린다. 두 사분원의 호로 둘러싸인 부분에 내접 하는 가장 큰 원을 그리고, 그 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 두 꼭짓점 A, C로부터 두 사분원의 호와 원이 접하는 두 점 중 가까운 점까지의 선분을 대각선으로 하는 정사각형을 각각 그린다. 이 2개의 정사각형 안에 그림 R_1에서 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 2개의 원의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 있는 작은 두 정사각형에서 두 꼭짓점으로부터 사분원과 원의 접점 중 가까운 점까지의 선분을 대각선으로 하는 정사각형을 각각 그린다. 이 4개의 정사각형 안에 그림 R_1에서 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 4개의 원의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



R_2



R_3

…

① $(3-2\sqrt{2})\pi$ ② $(2-\sqrt{3})\pi$ ③ $(\sqrt{2}-1)\pi$ ④ $(4-2\sqrt{3})\pi$ ⑤ $(2-\sqrt{2})\pi$

6. 그림과 같이 두 대각선의 길이가 각각 8, 4 인 마름모 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고 짧은 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$ 을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

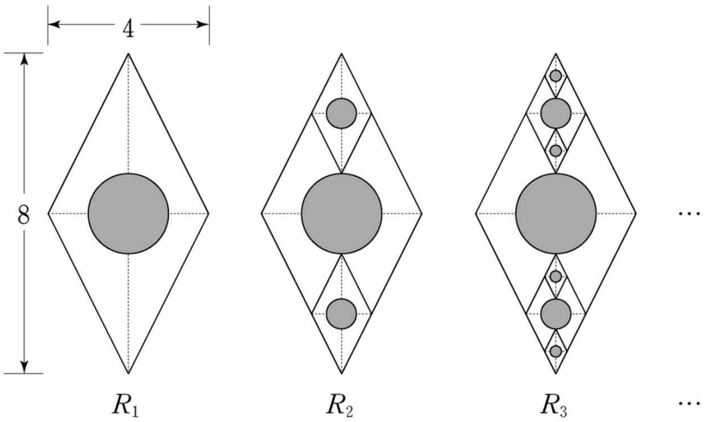
그림 R_1 에 있는 마름모에 긴 대각선의 양 끝점으로부터 그 대각선과 원의 두 교점 중 가까운 점까지의 선분을 각각 긴 대각선으로 하고, 마름모의 이웃하는 두 변 위에 짧은 대각선의 양 끝점이 놓이도록 마름모를 2 개 그린다.

새로 그려진 각 마름모에서, 두 대각선의 교점을 중심으로 하고 짧은 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$ 을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_2 라 하자.

그림 R_2 에 있는 작은 두 마름모에 긴 대각선의 양 끝점으로부터 그 대각선과 원의 두 교점 중 가까운 점까지의 선분을 각각 긴 대각선으로 하고, 마름모의 이웃하는 두 변 위에 짧은 대각선의 양 끝점이 놓이도록 마름모를 4 개 그린다.

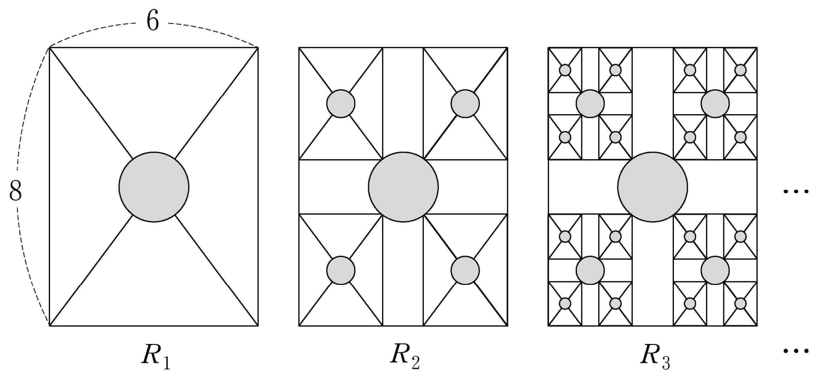
새로 그려진 각 마름모에서, 두 대각선의 교점을 중심으로 하고 짧은 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$ 을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_3 이라 하자.

이와 같은 방법으로 n 번째 얻은 그림 R_n 에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?



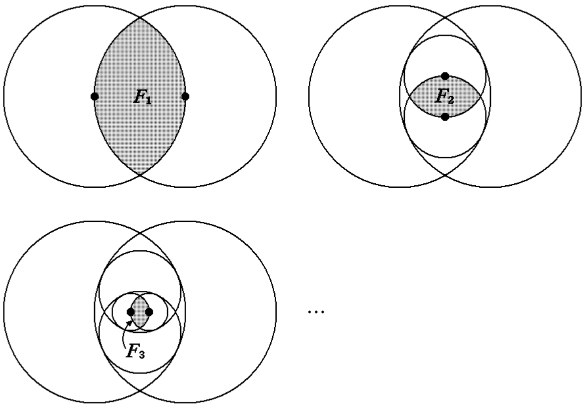
① $\frac{16}{13}\pi$ ② $\frac{32}{25}\pi$ ③ $\frac{4}{3}\pi$ ④ $\frac{32}{23}\pi$ ⑤ $\frac{16}{11}\pi$

7. 아래와 같이 가로의 길이가 6이고 세로의 길이가 8인 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 직사각형의 각 꼭짓점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 있는 합동인 4개의 직사각형 각각에서 각 꼭짓점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?(단, 모든 직사각형의 가로와 세로는 각각 서로 평행하다.)



① $\frac{37}{9}\pi$　② $\frac{34}{9}\pi$　③ $\frac{31}{9}\pi$　④ $\frac{28}{9}\pi$　⑤ $\frac{25}{9}\pi$

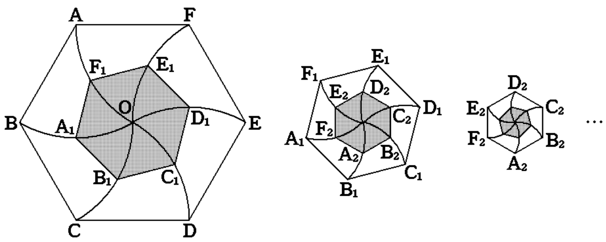
8. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 두 원을 서로의 중심을 지나도록 그렸을 때, 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_1이라 하자.
F_1의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_1과 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_2라 하자.
F_2의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_2와 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_3이라 하자.



이와 같은 방법으로 계속하여 도형 F_n을 그려 나갈 때, F_n의 둘레의 길이를 l_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?

① $2\pi(1+\sqrt{7})$　② $\frac{8\pi}{3}(1+\sqrt{7})$　③ $\frac{4\pi}{3}(2+\sqrt{7})$
④ $2\pi(2+\sqrt{7})$　⑤ $\frac{5\pi}{3}(2+\sqrt{7})$

9. 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 길이가 2인 대각선의 교점을 O라 하자. 그림과 같이 꼭짓점 A, B, C, D, E, F를 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 60°만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1이라 하자.
정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$에서 꼭짓점 A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1을 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 60°만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2라 하자.
정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$에서 꼭짓점 A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2를 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 60°만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 A_3, B_3, C_3, D_3, E_3, F_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정육각형 $A_nB_nC_nD_nE_nF_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $\dfrac{7-3\sqrt{3}}{4}$ ② $\dfrac{7-2\sqrt{3}}{4}$ ③ $\dfrac{9-4\sqrt{3}}{4}$

④ $\dfrac{9-3\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\dfrac{9-2\sqrt{3}}{4}$

2015년 대학수학능력시험 대비 6월 평가원_19번

19. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2 = -A,\quad A^2 + B^2 = A + E$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A^3 = A$

ㄴ. $AB^2 = B^2A$

ㄷ. B의 역행렬이 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A^2 = A$이고 $B = -A$ 일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $A^3 = A$

ㄴ. $B^2 = -B$

ㄷ. $A + 3E$는 역행렬을 갖는다. (단, E는 단위행렬이다.)

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ ④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

2. 두 이차정사각행렬 A, B가 $A + BA = 2E$, $AB + BA = -A + B$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?(단, E는 단위행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. A^{-1}이 존재한다.

ㄴ. $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

ㄷ. $A + B = 4E$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 두 이차정사각행렬 A, B는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $BA+B=E$
(나) $A^2B=A+E$

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. 행렬 B의 역행렬이 존재한다.
ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. 행렬 AB의 모든 성분의 합은 -2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 세 이차정사각행렬 A, B, C가 $(AB)^2=A^2B^2$, $BA=AC$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $B^2A=AC^2$
ㄴ. B의 역행렬이 존재하면 $A^2B=A^2C$이다.
ㄷ. AC의 역행렬이 존재하면 $B=C$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2-A=O,\ A-B=E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?
(단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. $AB=O$
ㄴ. $A\neq E$이면 A의 역행렬은 존재하지 않는다.
ㄷ. $A+B$의 역행렬이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2015년 대학수학능력시험 대비 6월 평가원_21번

21. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1)=0$

(나) $\lim_{x \to n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-1)(n-2)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$g(5)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

1. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(3)=0$

(나) $\lim_{x \to n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-1)(n-2)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$g(5)$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

2. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$\lim_{x \to n} \frac{f(x)}{(x-1)g(x)} = n(n-1)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

이때, $g(7)$의 값은?

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

2015년 대학수학능력시험 대비 6월 평가원_28번

28. 자연수 n에 대하여 순서쌍 $(x_n,\ y_n)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) $(x_1,\ y_1) = (1,\ 1)$

(나) n이 홀수이면 $(x_{n+1},\ y_{n+1}) = \left(x_n,\ (y_n-3)^2\right)$이고,

n이 짝수이면 $(x_{n+1},\ y_{n+1}) = \left((x_n-3)^2,\ y_n\right)$이다.

순서쌍 $(x_{2015},\ y_{2015})$에서 $x_{2015}+y_{2015}$의 값을 구하시오. [4점]

1. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$, $a_2=1$이고 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n+2}-a_{2n}=1$

(나) $a_{2n+1}-a_{2n-1}=0$

$a_{100}+a_{101}$ 의 값을 구하시오.

2. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{2}a_n & (a_n \geq 2) \\ \sqrt[3]{2}\,a_n & (a_n < 2) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, a_{112} 의 값은?

① 1 ② $\sqrt[3]{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt[3]{4}$ ⑤ 2

3. 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{P_n}$이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점일 때, 점 $\mathrm{P_{n+1}}$을 다음 규칙에 따라 정한다. (단, 점 $\mathrm{P_n}$은 좌표축 위의 점이 아니다.)

(가) 점 $\mathrm{P_n}$이 제1사분면 위의 점이면, 점 $\mathrm{P_{n+1}}$은 점 $\mathrm{P_n}$을 원 위의 호를 따라 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 이동시킨 점이다.
(나) 점 $\mathrm{P_n}$이 제2사분면 또는 제4사분면 위의 점이면, 점 $\mathrm{P_{n+1}}$은 점 $\mathrm{P_n}$을 x축에 대하여 대칭이동시킨 점이다.
(다) 점 $\mathrm{P_n}$이 제3사분면 위의 점이면, 점 $\mathrm{P_{n+1}}$은 점 $\mathrm{P_n}$을 y축에 대하여 대칭이동시킨 점이다.

점 $\mathrm{P_1}$의 좌표가 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$일 때, 점 $\mathrm{P_{2007}}$의 좌표는?

① $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　② $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$　③ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
④ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$　⑤ $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4. 자연수 n에 대하여 다음 시행을 한다.

n이 홀수이면 n에서 1을 빼고,
n이 짝수이면 n을 2로 나눈다.

자연수 n이 1이 될 때까지 반복한 시행의 횟수를 a_n이라 정의하자. 예를 들어 $a_7=4$, $a_8=3$이다. $S_n=\sum_{k=2^n}^{2^n+3} a_k$라 할 때, S_{50}의 값은? (단, $a_1=0$이다.)

① 200　② 201　③ 202　④ 203　⑤ 204

5. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 점 P_n, Q_n을 다음 규칙대로 잡는다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $(0, 0)$이다.
(나) 점 P_n을 x축의 방향으로 n만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 점은 Q_n이다.
(다) 점 Q_n을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1 만큼 평행이동시킨 점은 P_{n+1}이다.

점 Q_n의 좌표를 (a_n, b_n)이라 할 때, $a_{21}+b_{21}$의 값을 구하시오.

6. 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

$$a_1 = 1, \quad a_{2n} = a_n + 1, \quad a_{2n+1} = a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]
ㄱ. $a_6 = 1$
ㄴ. $n = 2^k$ (k는 자연수)이면 $a_n = k+1$이다.
ㄷ. $n = 2^k + 1$ (k는 자연수)이면 $a_n = k-1$이다.

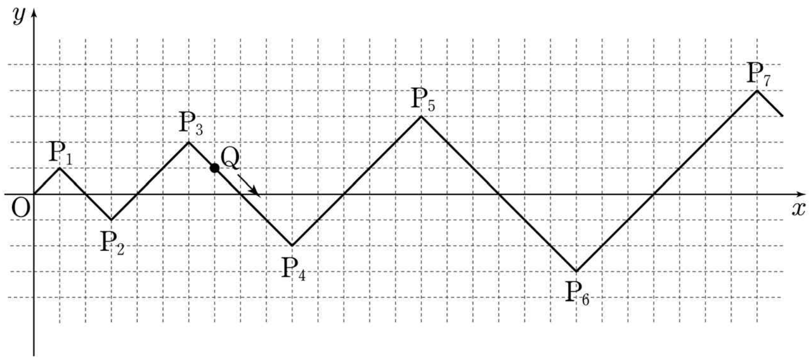
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) $x_1 = y_1 = 1$

(나) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + (n+1) \\ y_{n+1} = y_n + (-1)^n \times (n+1) \end{cases} \quad (n \geq 1)$

점 Q는 원점 O를 출발하여 $\overline{\mathrm{OP}_1}$을 따라 점 P_1에 도착한다. 자연수 n에 대하여 점 P_n에 도착한 점 Q는 점 P_{n+1}을 향하여 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$을 따라 이동한다. 점 Q는 한 번에 $\sqrt{2}$만큼 이동한다. 예를 들어, 원점에서 출발하여 7번 이동한 점 Q의 좌표는 (7, 1)이다. 원점에서 출발하여 55번 이동한 점 Q의 y좌표는?



① -5　　② -6　　③ -7　　④ -8　　⑤ -9

8. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

(가) $a_1 = 0,\ b_1 = 2$

(나) n이 짝수이면 $a_n = a_{n-1} + \dfrac{b_{n-1}}{n},\ b_n = b_{n-1} - \dfrac{b_{n-1}}{n}$이다.

(다) n이 1보다 큰 홀수이면 $a_n = a_{n-1} - \dfrac{a_{n-1}}{n},\ b_n = b_{n-1} + \dfrac{a_{n-1}}{n}$이다.

$a_{41} = \dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

① 79　　② 80　　③ 81　　④ 82　　⑤ 83

2015년 대학수학능력시험 대비 6월 평가원_29번

29. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-x^3}{x^2} = -11, \quad \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = -9$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x \to \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

1. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 0$, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 5$를 만족시킨다. 방정식 $f(x) = x$의 한 근이 -2일 때, $f(1)$의 값은?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

2. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to +0} \frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{x^3 + x} = 5, \quad \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3}$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

2015년 대학수학능력시험 대비 6월 평가원_30번

30. 양수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 하자. 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a \le b \le 20$
(나) $\log b - \log a \le f(a) - f(b)$

1. 양의 정수 n 에 대하여 $\log n$ 의 지표를 $f(n)$, 가수를 $g(n)$ 이라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 양의 정수 n 의 개수는?

(가) $f(3) < f(n) < f(2011)$
(나) $\{g(n)\}^2 - g(n) + \log 2 \cdot \log 5 < 0$

① 326 ② 328 ③ 330 ④ 332 ⑤ 334

2. 자연수 k에 대하여 $\log k$의 지표와 가수를 각각 x좌표와 y좌표로 갖는 점을 P_k라 하자. 다음 조건을 만족시키는 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오.

(가) $1 \le m < n < 100$
(나) $\overline{\mathrm{P}_m \mathrm{P}_n} = \sqrt{1 + (\log 2)^2}$

3. 양수 x에 대하여 $\log x$의 지표를 $f(x)$라 하자. 등식

$$2f(m) - f(2m) = 1$$

을 만족시키는 1000 이하의 자연수 m의 개수를 구하시오.

4. 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을

$a_n =$ ($\log n$에 가장 가까운 정수) $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

라 하자. 예를 들어 $a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ a_4 = 1,\ \cdots$이다. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\sqrt{10} \fallingdotseq 3.162$로 계산한다.)

[보 기]

ㄱ. $a_{14} = 2$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{20} a_n = 17$

ㄷ. $a_n = 2$를 만족시키는 자연수 n의 개수는 285이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 자연수 n에 대하여 $\log n$의 지표를 $f(n)$, 가수를 $g(n)$ $(0 \le g(n) < 1)$이라 하자. $g(n+1) < g(n)$을 만족하는 n의 값 중 작은 것부터 차례대로 $n_1, n_2, n_3, \cdots$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} f(n_k)$의 값은?

① 35　② 36　③ 45　④ 46　⑤ 55

6. 자연수 n에 대하여 $\log n$의 지표와 가수를 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하자. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}_n(f(n),\ g(n))$이 연립부등식

$$\begin{cases} y \ge \dfrac{1}{3}x \\ 0 \le y \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

의 영역에 속하도록 하는 자연수 n의 개수를 오른쪽 상용로그표를 이용하여 구하여라.

x	$\log x$
2.1	0.3222
2.2	0.3424
3.1	0.4914
3.2	0.5051

6월 모의평가시험 유사 및 심화문제_정답

17번	1	2	3	4	5	6
④	②	①	④	①	⑤	③

18번	1	2	3	4	5	6	7	8	9
①	③	④	④	①	③	④	⑤	①	④

19번	1	2	3	4	5
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤

21번	1	2
⑤	②	⑤

28번	1	2	3	4	5	6	7	8
8	51	⑤	①	⑤	462	⑤	①	③

29번	1	2
10	②	10

30번	1	2	3	4	5	6
71	②	12	540	④	③	13

A형 17번 정답 ④

해설

$-\dfrac{6(n+1)-4}{(n+1)!}=\dfrac{4}{(n+1)!}-3\cdot\boxed{(가)}$

$\boxed{(가)}=\dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{4}{(n+1)!}+\dfrac{6(n+1)-4}{(n+1)!}\right\}=\dfrac{2(n+1)}{(n+1)!}=\dfrac{2}{n!}$

$\boxed{(나)}=b_1\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

$f(3)=\dfrac{2}{3!}$, $g(3)=\dfrac{9}{4}$

따라서 구하는 정답은 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9}{4}=\dfrac{3}{4}$

A형 17번-1 정답 ②

해설

$p=3$, $q=6$, $f(n)=3n$이므로 $p+q+f(10)=39$

A형 17번-2 정답 ①

해설

(가) : $x^2-x-1=0$

(나) : $(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

(다) : $(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n$

A형 17번-3 정답 ④

해설

$a_{n+1}=n\cdot 2^n+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}$ ······ ㉠

$a_n=(n-1)\cdot 2^{n-1}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k}$ ······ ㉡

㉠ − ㉡ 하면 $a_{n+1}-a_n=\boxed{(n+1)\cdot 2^{n-1}}+\dfrac{a_n}{n}$

$a_{n+1}=\dfrac{(n+1)a_n}{n}+\boxed{(n+1)\cdot 2^{n-1}}$

$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+2^{n-1}$

$b_n=\dfrac{a_n}{n}$이라 하면

$b_{n+1}=b_n+\dfrac{\boxed{(n+1)\cdot 2^{n-1}}}{n+1}\ (n\geq 2)$

$b_2=3$이므로

$b_n=3+\sum_{k=1}^{n-2}2^k=3+\dfrac{2(2^{n-2}-1)}{2-1}=\boxed{2^{n-1}+1}\ (n\geq 2)$

$\therefore\ a_n=\begin{cases}4 & (n=1)\\ n(2^{n-1}+1) & (n\geq 2)\end{cases}$

$\therefore\ f(n)=(n+1)\cdot 2^{n-1},\quad g(n)=2^{n-1}+1$

따라서 $f(4)+g(7)=5\cdot 2^3+2^6+1=40+64+1=105$

A형 17번-4 정답 ①

해설

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은

$a_1=10,\ (a_{n+1})^n=10(a_n)^{n+1}\ (n\geq 1)$ …… ㉠

식 ㉠의 양변에 상용로그를 취하면

$n\log a_{n+1}=(n+1)\log a_n+1$이다.

양변을 $n(n+1)$로 나누면

$\dfrac{\log a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{\log a_n}{n}+\boxed{\dfrac{1}{n(n+1)}}$이다.

$b_n=\dfrac{\log a_n}{n}$이라 하면

$b_1=1$이고, $b_{n+1}=b_n+\boxed{\dfrac{1}{n(n+1)}}$이다.

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=1+1-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}$$

수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면 $b_n=\boxed{2-\dfrac{1}{n}}$이므로

$\log a_n=n\times\boxed{2-\dfrac{1}{n}}\ \left(\because\ b_n=\dfrac{\log a_n}{n}\right)$이므로

$a_n=10^{n\times\boxed{2-\frac{1}{n}}}$이다.

따라서 $f(n)=\dfrac{1}{n(n+1)},\ g(n)=2-\dfrac{1}{n}$이다.

$$\therefore\ \frac{g(10)}{f(4)}=\frac{2-\frac{1}{10}}{\frac{1}{4\times 5}}=38$$

A형 17번-5 정답 ⑤

해설

$$b_{n+1} = \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{a_1 a_2 \cdots a_n \times (n+1) + (n-1)!}{(n+1)!}$$

$$= \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n!} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\therefore (가) = f(n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

b_n을 구하면

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \frac{a_1}{1!} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{2n-1}{n}$$

$$\therefore (나) = g(n) = \frac{2n-1}{n}$$

따라서

$$f(13) \times g(7) = \frac{1}{13 \cdot 14} \times \frac{13}{7} = \frac{1}{98}$$

A형 17번-6 정답 ③

해설

$$a_{n+1} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = 2^{n+1}(n^2+n+2) \ (n \ge 1) \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 n대신 $n-1$을 대입하면

$$a_n - 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{k} = 2^n(n^2-n+2) \cdots\cdots ㉡$$

이다.

㉠−㉡에 의하여

$$a_{n+1} - a_n - \frac{2}{n}a_n = \boxed{2^n(n^2+3n+2)} \ (\ n \ge 2)$$

이므로 $a_{n+1} - \frac{n+2}{n}a_n = 2^n(n+1)(n+2)$

즉, $\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)} - \frac{a_n}{n(n+1)} = 2^n$

이다. $b_n = \dfrac{a_n}{n(n+1)}$ 이라 하면

$b_{n+1} - b_n = \boxed{2^n}$ $(n \geq 2)$

이고 $b_2 = 0$ 이므로

$$b_n = b_2 + \sum_{k=2}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)$$

$$= \sum_{k=2}^{n-1} 2^k$$

$$= \frac{4(2^{n-2}-1)}{2-1}$$

$$= \boxed{2^n - 4}$$

이다.

$\therefore$ $f(n) = 2^n(n^2+3n+2)$

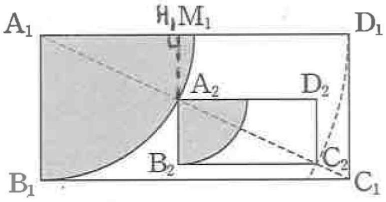
$g(n) = 2^n$

$h(n) = 2^n - 4$

$\therefore$ $\dfrac{f(4)}{g(5)} + h(6) = \dfrac{2^4 \cdot 30}{2^5} + (2^6 - 4) = 75$

A형 18번 정답 ①

해설



R_2

두 도형의 닮음비를 구하기 위해서 A_2에서 $\overline{A_1D_1}$에 수선을 긋고 이를 H_1이라 놓자. 이때 두 부채꼴의 반지름의 비는 사각형의 변의 길이의 비와 같으므로

$\overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_3} = \overline{A_1D_1} : \overline{A_2D_2} = \overline{A_1D_1} : \overline{A_1H_1} = 2\overline{A_1A_2} : \overline{A_1H_1}$ 이다.

따라서 두 도형의 닮음비는 $\dfrac{\overline{A_1H_1}}{2\overline{A_1A_2}} = \dfrac{\overline{A_1D_1}}{2\overline{A_1C_1}} = \dfrac{2}{2\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 이고 넓이의 비는 $\dfrac{1}{5}$ 이다.

부채꼴 $A_1M_1B_1$의 넓이는 $\dfrac{\pi}{4}$ 이므로 $\lim\limits_{N\to\infty} S_n = \dfrac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{5}} = \dfrac{5\pi}{16}$ 이다.

A형 18번-1 정답 ③

해설

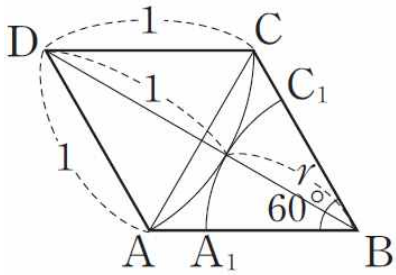
부채꼴 BA_1C_1 의 반지름의 길이를 r 라 하면 마름모의 대각선 BD 의 길이는 $(r+1)$ 이다.

또, 마름모는 두 대각선이 서로 수직이등분하므로

$\overline{BD}=2\times\overline{AB}\cos30^\circ=\sqrt{3}$

$\therefore r=\overline{BD}-1=\sqrt{3}-1$

즉, 부채꼴 DAC 와 부채꼴 BA_1C_1 의 닮음비가 $1:(\sqrt{3}-1)$ 이므로



$\frac{S_2}{2}=(\sqrt{3}-1)^2S_1$

$\therefore S_2=2(\sqrt{3}-1)^2S_1$

같은 방법으로 $S_3=(\sqrt{3}-1)^2S_2$ 이므로

$S_n=(\sqrt{3}-1)^2S_{n-1}\,(n\geq 3)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=S_1+2(\sqrt{3}-1)^2S_1+2(\sqrt{3}-1)^4S_1+\cdots$$

$$=S_1+\frac{2(\sqrt{3}-1)^2S_1}{1-(\sqrt{3}-1)^2}$$

$$=S_1+\frac{4\sqrt{3}}{3}S_1$$

$$=\left(1+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)S_1$$

A형 18번-2 정답 ④

해설

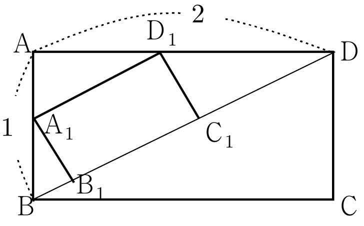
$$S_1=1-\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times2-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\times\frac{\pi}{6}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{9}$$

$$r=\frac{(\text{정사각형 }OA_2B_2C_2\text{대각선})^2}{(\text{정사각형 }OA_1B_1C_1\text{대각선})^2}=\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{(\sqrt{2})^2}=\frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}s_n=\frac{S_1}{1-r}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{9}}{1-\frac{2}{3}}=3-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

A형 18번-3 정답 ④

해설



$\square A_1B_1C_1D_1$의 가로와 세로의 비가 $2:1$이므로 $\overline{A_1D_1}=2a$, $\overline{D_1C_1}=a$라 하면

$\triangle \mathrm{ABD} \backsim \triangle \mathrm{AA_1D_1}$ 에서 $\overline{\mathrm{AD}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}a$ 이고

$\triangle \mathrm{ABD} \backsim \triangle \mathrm{C_1DD_1}$ 에서 $\overline{\mathrm{D_1D}} = \sqrt{5}\,a$ 이 된다.

$\overline{\mathrm{AD}} = 2$ 에서 $\frac{4\sqrt{5}}{5}a + \sqrt{5}\,a = 2 \quad \therefore \ a = \frac{2\sqrt{5}}{9}$

$\therefore \ \square \mathrm{A_1B_1C_1D_1} = \mathrm{S_1} = 2a^2 = 2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{5}}{9}\right)^2 = \frac{40}{81}$

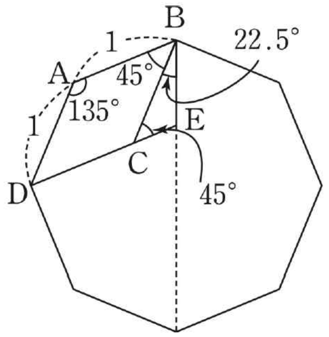
$\square \mathrm{ABCD}$ 와 $\square \mathrm{A_1B_1C_1D_1}$는 닮음이고 닮음비는 $1 : \frac{2\sqrt{5}}{9}$ 이므로 넓이비는 $1 : \frac{20}{81}$ 이 되어

수열 $\{S_n\}$ 의 공비는 $\frac{20}{81}$ 이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{40}{81}}{1 - \frac{20}{81}} = \frac{40}{61}$$

A형 18번-4 정답 ①

해설



$\square \mathrm{ABCD} = 1 \times 1 \times \sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서

$S_1 = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$\triangle \mathrm{BCE}$ 에서

$$\frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin 22.5^\circ} = \frac{1}{\sin 112.5^\circ}$$

$$\overline{\mathrm{CE}} = \frac{\sin 22.5^\circ}{\sin 112.5^\circ} = \frac{\sin 22.5^\circ}{\cos 22.5^\circ} = \tan 22.5^\circ$$

한편 $\tan 22.5^\circ = x$ 라 하면 $\tan 45^\circ = \frac{2x}{1-x^2} = 1$ 에서

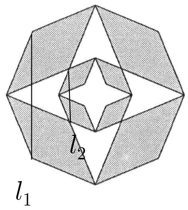
$x = \sqrt{2} - 1 \ (\because x > 0)$

따라서 처음 정팔각형과 R_2에 새로 생긴 정팔각형의 닮음비는 $1 : \sqrt{2} - 1$이다.

S_n은 첫째항이 $2\sqrt{2}$ 이고 공비가 $(\sqrt{2}-1)^2$인 등비수열의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 2 + \sqrt{2}$$

[다른 풀이]



$\frac{l_2}{l_1} = \sqrt{\frac{1+1-\sqrt{2}}{1+1+\sqrt{2}}}$ 이므로 넓이의 비는 $\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ 이다.

R_1에서 마름모 한 개의 넓이는 $1 \times 1 \times \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$S_1 = 2\sqrt{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2\sqrt{2}}{1-\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = 2+\sqrt{2}$

A형 18번-5 정답 ③

해설

R_1 에 있는 원의 반지름의 길이는 $2-\sqrt{2}$ 이므로

$S_1 = (2-\sqrt{2})^2\pi$

R_2 에 있는 작은 정사각형의 한 변의 길이를 x 라 하면

$\overline{\mathrm{AC}} = 2\sqrt{2}x + 2(2-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$

$x = 2-\sqrt{2}$

R_1 에 있는 원과 R_2 에 있는 작은 원의 넓이의 비는 $2^2 : (2-\sqrt{2})^2 = 1 : \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

따라서 R_n 과 R_{n+1} 에서 각각 새로 그려지는 두 원의 넓이의 비는 $1 : \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ 이고 원의 개수의 비는 $1:2$ 이다.

그러므로 구하는 무한급수의 합은 첫째항이 $S_1 = (2-\sqrt{2})^2\pi$ 이고,

공비가 $2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3-2\sqrt{2}$ 인 무한등비급수의 합과 같다.

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{(2-\sqrt{2})^2\pi}{1-(3-2\sqrt{2})} = (\sqrt{2}-1)\pi$

A형 18번-6 정답 ④

해설

R_1에서 주어진 원의 반지름의 길이가 1이므로 넓이는 π 이고 긴 대각선의 길이는 8이다.

이 때 R_2에서 새로 생긴 마름모의 긴 대각선의 길이가 3이므로 짧은 대각선의 길이는 $\frac{3}{2}$

이다. 따라서 이 마름모 안에 새로 생긴 원의 반지름의 길이는 $\frac{3}{8}$이므로 R_2에 들어 있는 원의 넓이의 합은 $\pi+2\times\left(\frac{3}{8}\right)^2\pi$ 이다.

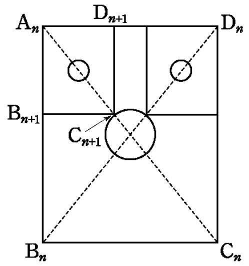
같은 방법으로 R_n에 들어 있는 모든 원의 넓이의 합S_n을 구하면

$$S_n=\pi+2\times\frac{9}{64}\pi+4\times\left(\frac{9}{64}\right)^2\pi+\ \cdots\ +2^{n-1}\times\left(\frac{9}{64}\right)^n\pi\quad=\frac{\pi(1-\left(\frac{9}{32}\right)^n)}{1-\frac{9}{32}}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{1-\frac{9}{32}}=\frac{32}{23}\pi$$

A형 18번-7 정답 ⑤

해설



□$AB_nC_nD_n$과

□$AB_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$에서

두 사각형은 닮은 도형이고 대각선의 길이의 비가 10 : 4이므로 넓이의 비는 5^2 : 2^2이다.

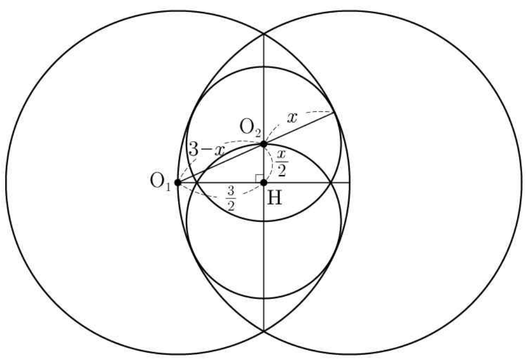
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\pi+4\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\pi+4^2\left(\frac{2}{5}\right)^4\pi+\cdots$$

$$=\frac{\pi}{1-\frac{16}{25}}=\frac{25}{9}\pi$$

A형 18번-8 정답 ①

해설

도형 F_1의 두 원의 중심을 연결하는 선분과 도형 F_2의 두 원의 중심을 연결하는 선분은 서로 다른 것을 수직이등분한다.



도형 F_2의 반지름의 길이를 x라 하면 위 그림의 직각삼각형 O_1O_2H에서

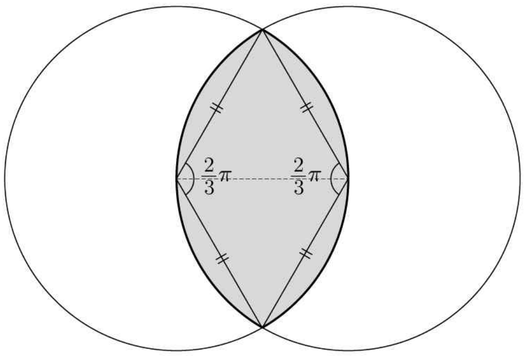
$$(3-x)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$3x^2-24x+27=0$

$x^2-8x+9=0$

$\therefore\ x=4-\sqrt{7}$ ($\because\ x<3$)

따라서 서로 닮음인 도형 F_1과 F_2의 닮음비는 $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$이다.



위 그림에서 $l_1=2\times\left(3\times\frac{2}{3}\pi\right)=4\pi$이므로

수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 4π이고 공비가 $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$인 등비수열이다.

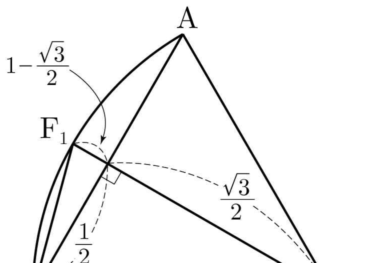
$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{4\pi}{1-\frac{4-\sqrt{7}}{3}}=2\pi(1+\sqrt{7})$

A형 18번-9 정답 ④

해설

F_1이 호 OA를 이등분하므로

$\overline{\mathrm{OF}_1}$은 반지름의 길이가 1이고 중심각이 30°인 부채꼴의 현의 길이이다.



위 그림에서

$\overline{\mathrm{OF}_1}^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=2-\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{E}_1}=\overline{\mathrm{OF}_1}$이므로

$S_1=6\times\frac{3}{4}\times(2-\sqrt{3})=\frac{9}{2}(2-\sqrt{3})$이다.

정육각형 ABCDEF에서 정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$를 만드는 과정을 반복하고
정육각형 ABCDEF와 정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$의 넓이의 비가
$\overline{AF}^2 : \overline{A_1F_1}^2 = 1 : 2-\sqrt{3}$ 이므로
수열 $\{S_n\}$은 공비가 $2-\sqrt{3}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{9}{2}(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})} = \frac{9-3\sqrt{3}}{4}$$

A형 19번 정답 ⑤

해설

ㄱ. 주어진 식 $A^2 = -A$의 양변에 A를 곱하여 정리하면
$A^3 = -A^2 = -(-A) = A$이다.
따라서 $A^3 = A$이다. (참)

ㄴ. 주어진 식을 정리해보면
$B^2 = 2A+E$의 양변에 A를 곱하면
$AB^2 = A(2A+E) = (2A+E)A = B^2A$이다.
따라서 $AB^2 = B^2A$가 성립한다. (참)

ㄷ. 주어진 식을 정리해보면
$A^2 + A = O$
$\Leftrightarrow A^2 + A + \frac{1}{4}E = \frac{1}{4}E$
$\Leftrightarrow \left(A - \frac{1}{2}E\right)^2 = \frac{1}{4}E$이므로 $A - \frac{1}{2}E$는 역행렬이 존재한다.
이때 B에 관한 식을 정리해보면
$B^2 = 2A + E = 2\left(A + \frac{1}{2}E\right)$이므로 B^2의 역행렬이 존재하므로
B는 역행렬이 존재한다. (참)

A형 19번-1 정답 ⑤

해설

ㄱ. $A^2 = A$이므로 $A^3 = A^2 = A$
$\therefore A^3 = A \quad \therefore$ 참

ㄴ. $B = -A$에서 $B^2 = A^2$
$A^2 = A$이므로 $B^2 = A \quad \therefore B^2 = -B \quad \therefore$ 참

ㄷ. $A^2 - A = O$를 변형하면
$(A+3E)(A-4E) = -12E$
$\therefore (A+3E)^{-1} = -\frac{1}{12}A + \frac{1}{3}E \quad \therefore$ 참

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

A형 19번-2 정답 ⑤

해설

ㄱ. $(E+B)=A=2E$이므로 $A^{-1}=\frac{1}{2}(E+B)$이다. (참)

ㄴ. $(E+B)A=A(E+B)=2E$이므로 $AB=BA$이다.

따라서, $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$이다. (참)

ㄷ. $AB=BA$이므로 $2AB=2(2E-A)=-A+B$이다.

따라서, $A+B=4E$이다. (참)

A형 19번-3 정답 ⑤

해설

ㄱ. 조건 (가)에서 $B(A+E)=E$이므로 B의 역행렬은 $A+E$이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 $B^{-1}=A+E$이므로

$$\begin{aligned} AB &= (B^{-1}-E)B \\ &= E-B \\ &= B(B^{-1}-E) \\ &= BA \end{aligned}$$ (참)

ㄷ. $AB=BA$이므로 (나)에서

$$\begin{aligned} A^2B &= A(AB)=A(BA) \\ &= A(E-B)=A-AB=A+E \end{aligned}$$

$\therefore\ AB=-E$

따라서 행렬 AB의 모든 성분의 합은 -2이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[참고]

$B(A+E)=E$에서 역행렬의 정의에 의해

$(A+E)B=E$가 성립한다.

$\therefore\ AB=BA$

A형 19번-4 정답 ⑤

해설

ㄱ. $B^2A=B(BA)=B(AC)$ ($\because\ BA=AC$)

$=(BA)C=(AC)C$ ($\because\ BA=AC$)

$=AC^2$ (참)

ㄴ. B^{-1}이 존재하면

$(AB)^2=A^2B^2$에서

$(AB)^2B^{-1}=A^2B^2B^{-1}$

$ABA=A^2B$

$BA=AC$이므로

$ABA=A^2C$

$\therefore\ A^2B = A^2C$ (참)

[다른 풀이]

$A^2B = (A^2B^2)B^{-1}$

$= (AB)^2B^{-1}$ ($\because\ (AB)^2 = A^2B^2$)

$= ABA$

$= A(AC)$ ($\because\ BA = AC$)

$= A^2C$ (참)

ㄷ. 행렬 AC의 역행렬이 존재하고

$BA = AC$이므로 행렬 BA의 역행렬이 존재한다.

따라서 행렬 A, B 각각의 역행렬이 존재한다.

$(AB)^2 = A^2B^2$에서

$A^{-1}(AB)^2B^{-1} = A^{-1}(A^2B^2)B^{-1}$

$\therefore\ AB = BA$

그런데 $BA = AC$이므로

$AB = AC$이다.

따라서 $A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$에서

$B = C$이다. (참)

A형 19번-5 정답 ⑤

해설

ㄱ. $A^2 - A = O$에서 $A(A-E) = O$ …… ㉠

$A - B = E$에서 $A - E = B$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $AB = O$ (참)

ㄴ. A의 역행렬이 존재한다고 가정하면

$A^2 - A = O$에서

$A^{-1}(A^2 - A) = A - E = O$이다.

이는 $A \neq E$라는 것에 모순된다.

따라서 A의 역행렬이 존재하지 않는다. (참)

ㄷ. $A - B = E$에서 $A = E - B$

$AB = B - B^2$, $BA = B - B^2$이므로

$AB = BA = O$ ($\because$ ㄱ)

$\therefore\ (A+B)^2 = (A-B)^2 = E$

$\therefore\ (A+B)^{-1} = A + B$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

[다른 풀이]

ㄷ. $A - B = E$에서 $A + B = 2A - E$

$A^2 - A = O$에서

$A^2-A+\frac{1}{4}E=\frac{1}{4}E$

$\left(A-\frac{1}{2}E\right)^2=\frac{1}{4}E$

$(2A-E)^2=E$

$\therefore\ (2A-E)^{-1}=2A-E$

따라서 $A+B$의 역행렬이 존재한다. (참)

A형 21번 정답 ⑤

해설

$n=1$일 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ ……㉠

$n=2$일 때, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ ……㉡

$n=3$일 때, $\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=2$ ……㉢

$n=4$일 때, $\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=6$ ……㉣

조건 ㈎에서 $g(1)=0$이므로 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$는

$g(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$로 놓을 수있다.

따라서 ㉠, ㉡에서 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$이고

㉢에서 $\frac{f(3)}{g(3)}=\frac{2}{9+3a+b}=2$이므로 $3a+b+8=0$ ……㉤

㉣에서 $\frac{f(4)}{g(4)}=\frac{6}{16+4a+b}=6$이므로 $4a+b+15=0$ ……㉥

㉤, ㉥을 연립하여 풀면 $a=-7$, $b=13$

$\therefore\ g(x)=(x-1)(x^2-7x+13)$

따라서 구하는 $g(5)$의 값은 $4\times3=12$

A형 21번-1 정답 ②

해설

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=0$에서 $f(x)$는 $(x-1)(x-2)$를 인수를 갖는다.

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=2$에서 $g(3)=0$이므로 $f(3)=0$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$, $g(x)=(x-3)g_1(x)$

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2}{g_1(3)}=2$에서 $g_1(3)=1$

$\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{6}{g_1(4)}=6$에서 $g_1(4)=1$

$\therefore g_1(x)=(x-3)(x-4)+1$

$\therefore g(5)=2\times(2+1)=6$

A형 21번-2 정답 ⑤

해설

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(x-1)g(x)}=0$, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)g(x)}=0$에서 $f(x)=x(x-1)^2$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-1)g(x)}=\frac{2}{g(2)}=2$에서 $g(2)=1$

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{(x-1)g(x)}=\frac{12}{2g(3)}=6$에서 $g(3)=1$

$\therefore g(x)=(x-2)(x-3)+1$

$\therefore g(7)=21$

A형 28번 정답 8

해설

주어진 조건을 만족하는 점들을 하나씩 구해보면

$(1,1)\Rightarrow(1,4)\Rightarrow(4,4)\Rightarrow(4,1)\Rightarrow(1,1)$이 나타나므로 이 규칙을 만족하는 수열은 주기가 4인 수열이다. 따라서 2015번째 항은 3번째항에 해당하므로 $(4,4)$이다.

A형 28번-1 정답 51

해설

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 구하면 다음과 같다.

$a_3=a_1=1$, $a_5=a_3=1$, $a_7=a_5=1$, $\cdots$

$\therefore\ a_{2n-1}=1$

$a_4=a_2+1=2$, $a_6=a_4+1=3$, $a_8=a_6+1=4$, $\cdots$

$\therefore\ a_{2n}=n$

따라서 $a_{100}+a_{101}=50+1=51$이다.

A형 28번-2 정답 ⑤

해설

$a_2=\sqrt[3]{2}\ (\because\ a_1=1)$

$a_3=\sqrt[3]{2}\cdot a_2=\sqrt[3]{2^2}\ (\because\ a_2<2)$

$a_4=\sqrt[3]{2}\,a_3=\sqrt[3]{2^3}=2\ (\because\ a_3<2)$

$a_5=\frac{1}{2}a_4=1\ (\because\ a_4\geqq 2)$

$\vdots$

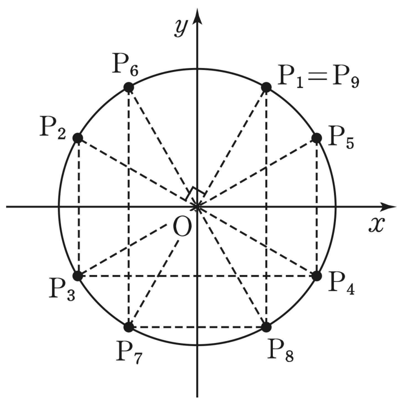
따라서, 수열 $\{a_n\}$은 1, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2^2}$, 2이 계속적으로 반복된다.

$112=4\times 28$이므로 $a_{112}=2$

A형 28번-3 정답 ①

해설

점 P_n 의 이동규칙에 따라 아래그림과 같이 나타내면



따라서 P_n 은 주기가 8이다.

$\therefore \mathrm{P}_{2007}=\mathrm{P}_7$ 이고 P_7은 P_1의 원점 대칭이다.

$\therefore \mathrm{P}_{2007}=\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

A형 28번-4 정답 ⑤

해설

2^n이 1이 될 때까지 시행이 n번 반복된다.

$\therefore\ a_{2^n}=n$

따라서 다음이 성립한다.

k	2^n	2^n+1	2^n+2	2^n+3
시행	2^{n-1}	2^n	$2^{n-1}+1$	2^n+2
	2^{n-2}	$\vdots$	2^{n-1}	$\vdots$
	$\vdots$		$\vdots$	
	1	1	1	1
a_k	n	$n+1$	$n+1$	$n+2$

따라서 $S_n=\displaystyle\sum_{k=2^n}^{2^n+3} a_k=4n+4$이다.

$\therefore\ S_{50}=204$

A형 28번-5 정답 462

해설

점 P_n, Q_n의 좌표는 다음과 같다.

$\mathrm{P}_1(0,0)$, $\mathrm{Q}_1(1,1)$

$\mathrm{P}_2(0,2)$, $\mathrm{Q}_2(2,4)$

$\mathrm{P}_3(1,5)$, $\mathrm{Q}_3(4,8)$

$\mathrm{P}_4(3,\ 9)$, $\mathrm{Q}_4(7,\ 13)$
$\mathrm{P}_5(6,\ 14)$, $\mathrm{Q}_5(11,\ 19)$
$\mathrm{P}_6(10,\ 20)$, $\mathrm{Q}_6(16,\ 26)$
$\vdots$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 계차수열이 $\{n\}$인

수열이므로 $a_{21}=1+\sum_{k=1}^{20}k=1+\frac{20\cdot 21}{2}=211$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1, 계차수열이 $\{n+2\}$인 수열이므로

$b_{21}=1+\sum_{k=1}^{20}(k+2)=1+\frac{20\cdot 21}{2}+2\cdot 20=251$

$\therefore\ a_{21}+b_{21}=211+251=462$

[다른 풀이]

$\mathrm{P}_1(0,\ 0)$으로부터 $\mathrm{Q}_1(1,\ 1)$이므로 $a_1=1,\ \ b_1=1$

Q_n의 좌표 $(a_n,\ b_n)$으로부터

P_{n+1}의 좌표는 $(a_n-1,\ b_n+1)$

Q_{n+1}의 좌표는 $(a_n-1+(n+1),\ b_n+1+(n+1))$

$\therefore\ a_{n+1}=a_n+n,\ b_{n+1}=b_n+n+2$

$a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n+2n+2$

수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 $a_1+b_1=2$,

계차수열이 $\{2n+2\}$인 수열이므로

$$a_{21}+b_{21}=2+\sum_{k=1}^{20}(2k+2)$$
$$=2+2\cdot\frac{20\cdot 21}{2}+2\cdot 20=462$$

A형 28번-6 정답 ⑤

해설

ㄱ. $a_6=a_3+1=(a_1-1)+1=1$ (참)

ㄴ. $n=2^k$이면

$a_n=a_{2^k}=a_{2^{k-1}}+1=a_{2^{k-2}}+2=\cdots$

$\quad=a_{2^0}+k=k+1$ (참)

ㄷ. $a_{2n}=a_n+1,\ a_{2n+1}=a_n-1$이므로

$a_{2n}-a_{2n+1}=2$가 성립한다.

$\therefore\ a_{2^k}-a_{2^k+1}=2$

따라서 $n=2^k+1$일 때, ㄴ을 이용하면

$a_n=a_{2^k+1}=a_{2^k}-2=(k+1)-2=k-1$ (참)

A형 28번-7 정답 ①

해설

O 에서 시작하여 다음 점으로의 이동횟수를 알아보면 다음과 같다.

$\mathrm{O} \to \mathrm{P}_1$: 1번 이동

$\mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_2$: 2번 이동

$\mathrm{P}_2 \to \mathrm{P}_3$: 3번 이동

⋮

$\mathrm{P}_9 \to \mathrm{P}_{10}$: 10번 이동

그러므로 O 에서 P_{10}까지의 총 이동횟수는

$1+2+3+\cdots+10=\dfrac{10(10+1)}{2}=55$이다.

그러므로 점 P_2, P_4, P_6, P_8, P_{10}의 각각의 y좌표는 -1, -2, -3, -4, -5가 되어 점 P_{10}의 y좌표는 -5이다.

A형 28번-8 정답 ③

해설

조건 (나)의 두 식을 더하면 $a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}$

조건 (다)의 두 식을 더하면 $a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}$

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n$

그런데 $a_1+b_1=0+2=2$이므로

$a_n+b_n=2$ …… ㉠

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} a_{2n} &= a_{2n-1}+\frac{b_{2n-1}}{2n} \\ &= a_{2n-1}+\frac{2-a_{2n-1}}{2n} \quad (\because ㉠) \\ &= \frac{2n-1}{2n}\cdot a_{2n-1}+\frac{1}{n} \quad \cdots\cdots ㉡ \end{aligned}$$

조건 (다)에서

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= a_{2n}-\frac{a_{2n}}{2n+1} \\ &= \frac{2n}{2n+1}\cdot a_{2n} \\ &= \frac{2n}{2n+1}\cdot\left(\frac{2n-1}{2n}\cdot a_{2n-1}+\frac{1}{n}\right) \quad (\because ㉡) \\ &= \frac{2n-1}{2n+1}\cdot a_{2n-1}+\frac{2}{2n+1} \end{aligned}$$

$\therefore\ (2n+1)a_{2n+1}=(2n-1)a_{2n-1}+2$

$\therefore\ c_n=(2n-1)a_{2n-1}$이라 하면 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 $a_1=0$이고 공차가 2인 등차수열을

이룬다.

$\therefore\ c_n = (2n-1)a_{2n-1} = 2(n-1)$

$\therefore\ a_{2n-1} = \dfrac{2n-2}{2n-1}$

$\therefore\ a_{41} = \dfrac{40}{41}$

A형 29번 정답 10

해설

$f(x)$가 다항함수이고 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{x^2}=-11$에서 $\dfrac{\infty}{\infty}$꼴이어야 하므로 $f(x)=x^3-11x^2+ax+b$ 이고 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=-9$에서 $\dfrac{0}{0}$꼴이어야 하므로 $f(1)=0$, $f'(1)=-9$이다.

따라서 $f(1)=1-11+a+b=0$에서 $a+b=10$이고 $f'(x)=3x^2-22x+a$이므로 $f'(1)=3-22+a=-9$이다. 따라서 $a=10$, $b=0$이고 $f(x)=x^3-11x^2+10x$이다.

$t=\dfrac{1}{x}$이라 하면 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이고 다항함수이므로 모든 실수에서 미분가능하기 때문에

$\lim\limits_{x\to\infty}xf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t)}{t}=f'(0)=10$

A형 29번-1 정답 ②

해설

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=0$ 이므로

$f(x)$ 의 차수를 n 이라 하면 $n \leqq 2$ 이다.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=5$ 이고, $x\to0$ 일 때 (분자)$\to0$ 이므로 (분모)$\to0$ 이어야 한다.

따라서, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$ 이므로

$f(x)=ax^2+bx$ 로 놓을 수 있다.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax^2+bx}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}(ax+b)=b$

이므로 $b=5$

방정식 $ax^2+5x=x$ 의 한 근이 $x=-2$ 이므로

$4a-10=-2$ 에서 $4a=8$

$\therefore\ a=2$

따라서, $f(x)=2x^2+5x$ 이므로

$f(1)=7$

A형 29번-2 정답 10

해설

$$\lim_{x\to+0}\frac{x^3f(\frac{1}{x})-1}{x^3+x}\quad (\frac{1}{x}=t \text{ 라 놓으면})$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^3}f(t)-1}{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{t^2+1}=5$$

$\therefore\ f(x)=x^3+5x^2+ax+b$

또 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$ 에서 $f(1)=0$

$\therefore\ f(1)=6+a+b=0\ \ \therefore\ b=-a-6$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+6x+a+6)}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}$ 에서

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+6x+a+6}{x+2}=\frac{13+a}{3}=\frac{1}{3}\quad\therefore\ a=-12,\ b=6$

$\therefore\ f(x)=x^3+5x^2-12x+6$

$\therefore\ f(2)=10$

A형 30번 정답 71

해설

$\log x$의 지표를 $g(x)$라 하면 $\log x=g(x)+f(x)$이고 조건 (나)에서

$\{g(b)+f(b)\}-\{g(a)+f(a)\}\le f(a)-f(b)$

$g(b)+2f(b)\le g(a)+2f(a)$

(1) $g(a)=g(b)=0$인 경우 또는 $g(a)=g(b)=1$인 경우

$g(b)+2f(b)\le g(a)+2f(a)$에서 $f(b)\le f(a)$인데 $\log x$의 가수 $f(x)=\log x-[\log x]$가 증가함수이므로 주어진 조건을 만족하는 a와 b는 같은 경우이다. 따라서 순서쌍 (a,b)의 개수는 20이다.

(2) $g(a)=0$, $g(b)=1$인 경우

$g(b)+2f(b)\le g(a)+2f(a)$에서 $1+2f(b)\le 2f(a)$

$2+2f(b)\le 1+2f(a)$

$2\log b\le 1+2\log a=\log 10a^2$, $\quad b^2\le 10a^2$

부등식을 만족하는 순서쌍은

$a=4$일 때, b는 10에서 12까지 3가지

$a=5$일 때, b는 10에서 15까지 6가지

$a=6$일 때, b는 10에서 18까지 9가지

$a=7$일 때, b는 10에서 20까지 11가지

$a=8$일 때, b는 10에서 20까지 11가지

$a=9$일 때, b는 10에서 20까지 11가지

따라서 순서쌍 (a,b)의 개수는 51이다.

그러므로 총 71개

A형 30번-1 정답 ②

해설

(가)에서 3은 한 자리의 양의 정수이므로 $f(3)=0$, 2011은 네 자리의 양의 정수이므로 $f(2011)=3$

$f(n)=1$ 또는 $f(n)=2$ 이다.

(나)에서 주어진 식의 좌변을 인수분해하면

$\{g(n)-\log 2\}\{g(n)-\log 5\}<0$

$\therefore\ \log 2<g(n)<\log 5$

이때 $\log n=f(n)+g(n)$ 이므로

ⅰ) $f(n)=1$ 일 때 $1+\log 2<f(n)+g(n)<1+\log 5$

$\therefore\ \log 20<\log n<\log 50$

따라서 양의 정수 n 은 $21,\ 22,\ \cdots,\ 49$ 로 29 개다.

ⅱ) $f(n)=2$ 일 때 $2+\log 2<f(n)+g(n)<2+\log 5$

$\therefore\ \log 200<\log n<\log 500$

따라서 양의 정수 n 은 $201,\ 202,\ \cdots,\ 499$ 로 299 개다.

ⅰ), ⅱ)에 의하여 양의 정수 n 의 개수는 $29+299=328$ 이다.

A형 30번-2 정답 12

해설

$0\le\log m<\log n<2$

$[\log m],\ [\log n]=0,1$

0	0
0	1
1	1

ⅰ) $1\le m<n<10,\ \dfrac{m}{n}<1$

$P_m=(0,\log m),\ P_n=(0,\log n)$

$\overline{P_mP_n}^{\,2}=(\log\dfrac{m}{n})^2=1+(\log 2)^2$

$\log\dfrac{m}{n}=-1\pm\log 2=\log\dfrac{1}{5}\ \text{or}\ \log\dfrac{1}{20}$

$\therefore n=20m$ 또는 $n=5m$

ㄱ) $n=5m$ 일 때, $(m,n)=(2,10),\ (3,15),\ (4,20),\ (5,25),$
$(6,30),\ (7,35),\ (8,40),\ (9,45)$

ㄴ) $n=20m$ 일 때, $(m,n)=(1,20),\ (2,40),\ (3,60),\ (4,80)$

ⅲ) $10\le m<n<100$

$P_m(1,\ -1+\log m),\ P_n(1,\ -1+\log n)$

$\overline{P_mP_n}^{\,2}=(\log\dfrac{m}{n})^2-1+(\log 2)^2=1+(\log 2)^2$

은 성립할 수 없다.

따라서 총 12개

A형 30번-3 정답 540

해설

$f(m)$은 $\log m$의 지표이므로 정수이고

$1 \le m \le 1000$에서 $0 \le f(m) \le 3$,

$2 \le 2m \le 2000$에서 $0 \le f(2m) \le 3$이다.

따라서 주어진 조건 $2f(m)-f(2m)=1$을 만족시키는 순서쌍 $(f(m), f(2m))$은 $(1, 1)$, $(2, 3)$이다.

ⅰ) $(f(m), f(2m))=(1, 1)$일 때

$f(m)=1$에서 $10 \le m < 100$

$f(2m)=1$에서 $10 \le 2m < 100$

따라서 $10 \le m < 50$이므로 m은 40개다.

ⅱ) $(f(m), f(2m))=(2, 3)$일 때

$f(m)=2$에서 $100 \le m < 1000$

$f(2m)=3$에서 $1000 \le 2m < 10000$

따라서 $500 \le m < 1000$이므로 m은 500개다.

ⅰ), ⅱ)에서 구하는 m의 개수는 540이다.

A형 30번-4 정답 ④

해설

$\sqrt{10}=3.162$에서 $\log 3.162=\log\sqrt{10}=\frac{1}{2}=0.5$이다.

ㄱ. $\log 10<\log 14<\log 31.62$에서 $1<\log 14<1.5$이므로 $a_{14}=1$

ㄴ. $\log 3<\log\sqrt{10}<\log 4$이므로

$\log 3<0.5$, $\log 4>0.5$

또, $\log 10<\log 20<\log 31.62$이므로

$1<\log 20<1.5$

즉, $a_1=a_2=a_3=0$, $a_4=a_5=a_6=\cdots=a_{20}=1$이므로

$$\sum_{n=1}^{20} a_n=0+0+0+1+1+\cdots+1=17$$

ㄷ. $a_n=2$이려면 $1.5<\log n<2.5$이어야 한다.

그런데 $\log 10\sqrt{10}=\log 31.62=1.5$,

$\log 100\sqrt{10}=\log 316.2=2.5$이므로

$31.62 \le n < 316.2$ $\quad\therefore 32 \le n \le 316$

즉, $a_n=2$를 만족시키는 자연수 n의 개수는 285이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

A형 30번-5 정답 ③

해설

$\log(n+1)-\log n=\log\frac{n+1}{n}\neq$(정수)이고

$0 < \log(n+1) - \log n < 1$이므로
$g(n+1) < g(n)$이 성립하기 위해서는
$\log(n+1) =$(정수)일 때이고, 이때 $g(n+1) = 0$
즉, $n+1 = 10^l$ (l은 자연수) 꼴이어야 한다.
$\therefore n = 10-1,\ 10^2-1,\ 10^3-1, \cdots$
즉, $n_k = 10^k - 1$
이때 $f(n_k)$는 $\log(10^k-1)$의 지표이므로
$f(n_k) = k-1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} f(n_k) = \sum_{k=1}^{10}(k-1) = 45$$

A형 30번-6 정답 13
해설

$\begin{cases} g(n) \geq \dfrac{1}{3} f(n) \cdots (1) \\ 0 \leq g(n) \leq \dfrac{1}{2} \cdots (2) \end{cases}$에서 n이 자연수이므로 $f(n) = 0, 1, 2, 3, \cdots$이다. 그런데 조건(1)에서
$f(n)$은 0 또는 1이다.
i) $f(n) = 0$일 때,
$0 \leq g(n) \leq \dfrac{1}{2}$이므로 $n = 1, 2, 3$
($\because$ $\log 3.1 = 0.4914$, $\log 3.2 = 0.5051$)
ii) $f(n) = 1$일 때,
$\dfrac{1}{3} \leq g(n) \leq \dfrac{1}{2}$에서
$0.3222 = \log 2.1 < \dfrac{1}{3} < \log 2.2 = 0.3424$이고 $0.4914 = \log 3.1 < \dfrac{1}{2} < \log 3.2 = 0.5051$이므로
$\log 2.1 < g(n) < \log 3.2$
그러므로 $n = 22, 23, \cdots, 31$
i)과 ii)에서 13개