제 2 교시

2015학년도 대학수학능력시험 모의평가 문제지

# 수학 영역
# (B형)

| 성명 | | 수험 번호 | | | | | — | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

○ 자신이 선택한 유형(A형/B형)의 문제지인지 확인하시오.
○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
○ 답안지의 필적확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

뿌리 깊은 나무는 난이도에 흔들리지 않는다.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.
○ 단답형의 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참조하시오.
○ 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

제 2 교시

# 수학 영역

**1.** $\log 3 + \log\sqrt{12} - \log\sqrt{27}$ 의 값은? [2점]

① $\log 2$ ② $\log 3$ ③ $2\log 2$
④ $\log 6$ ⑤ $2\log 3$

**2.** 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 $AX+BX=2A+B$를 만족시키는 행렬 $X$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

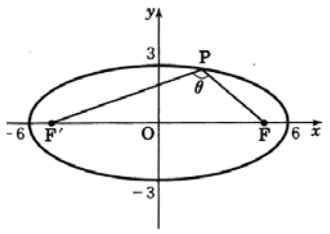
**3.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+\sin n\pi}{1-n}$ 의 값은? [2점]

① $-2$ ② $-1$ ③ 0
④ 1 ⑤ 2

**4.** 평면 위에서 일차변환 $f$에 의하여 점 $(2, 0)$은 점 $(0, -2)$으로 옮겨지고, 또 합성변환 $f \circ f$ 에 의하여 임의의 점 $(x, y)$는 점 $(y, x)$로 옮겨진다.
이때, 일차변환 $f$에 의하여 점 $(0, -2)$은 어떤 점으로 옮겨지는가? [3점]

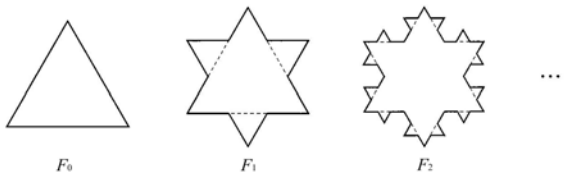
① $(2, 0)$ ② $(-2, 0)$ ③ $(0, 2)$
④ $(2, -2)$ ⑤ $(-2, 2)$

**5.** 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점 $F$, $F'$과 제 1사분면의 타원 위의 점 $P$가 이루는 각 $\angle FPF'$의 크기를 $\theta$라 할 때, $\cos\theta=-\frac{1}{3}$이다. $\overline{PF}\times\overline{PF'}$의 값은? [3점]




① 20 ② 27 ③ 32
④ 35 ⑤ 36

**6.** 다음 그림과 같이 넓이가 1인 정삼각형 $F_0$이 있다. 정삼각형 $F_0$의 각 변의 삼등분점을 잡아 가운데 부분에 다음과 같이 ∧모양을 그려서 정삼각형이 되도록 한 후 내부의 선분을 지워 $F_1$를 만든다. 같은 방법으로 $F_1$으로부터 $F_2$을 만들고, $F_2$로부터 $F_3$을 만든다. 이와 같은 과정을 한없이 되풀이 하여 얻은 도형을 코흐(Koch)곡선이라고 한다.
도형 $F_n$의 넓이를 $S_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값을 구하면? [4점]




① $\frac{8}{3}$ ② 2 ③ $\frac{8}{5}$
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

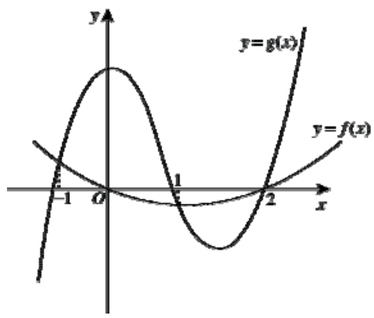
**7.** $x=1$에서 연속인 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$를 만족할 때 다음 <보기> 중 항상 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

〈보기〉

ㄱ. $\lim_{x\to1}f(x)=0$ ㄴ. $f(1)=0$
ㄷ. $f'(1)=2$

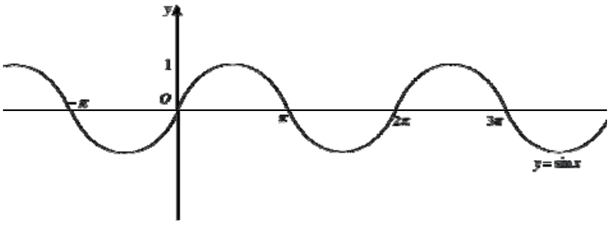
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**8.** 이차함수 $y=f(x)$와 삼차함수 $y=g(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $\frac{g(x)}{f(x)}-\frac{f(x)}{g(x)}=0$의 실근의 개수는? [3점]




① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[9~10] 함수 $f(x)=\sin x$는 최댓값과 최솟값이 각각 1이고 주기가 $2\pi$인 주기함수이다.




위의 그래프에 대하여 9번과 10번의 두 물음에 답하시오.

**9.** 자연수 $n$에 대하여 $y=\dfrac{1}{n\pi}x$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수를 $a_n$이라 할 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [3점]

① 100 ② 105 ③ 110
④ 115 ⑤ 120

**10.** 자연수 $k$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ k\pi]$에서 곡선 $y=f(x)$와 $x$축으로 둘러싸인 부분을 $x$축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 $V_k$라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V_k$의 값은? [3점]

① $\dfrac{\pi^2}{8}$ ② $\dfrac{\pi^2}{7}$ ③ $\dfrac{\pi^2}{6}$
④ $\dfrac{\pi^2}{5}$ ⑤ $\dfrac{\pi^2}{4}$

**11.** 폐구간 $\left[0,\ \dfrac{3}{2}\pi\right]$에서 함수

$f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x$의 그래프가 직선 $y=a$와 네 점에서 만나는 $a$의 범위는 $\alpha \le a < \beta$이다. $\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① $1+\sqrt{2}$ ② $1+\sqrt{3}$ ③ 3
④ $2+\sqrt{3}$ ⑤ 4

**12.** 다음은 5개의 꼭짓점이 A, B, C, D, E인 그래프를 행렬로 나타낸 것이다.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

이 그래프에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는대로 고른 것은? [3점]

<보기>

ㄱ. 변의 개수는 7이다.
ㄴ. 꼭짓점 C에 연결된 변의 개수는 3이다.
ㄷ. 꼭짓점 A에서 꼭짓점 C로 가는 두 개의 변으로 구성된 경로의 수는 2이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**13.** $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$이고 함수 $f(x)=\tan x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g\left(\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{3}\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}\pi$

**14.** 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & (x \ge 1) \\ x^3-x & (x<1) \end{cases}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보기>

ㄱ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}=2$

ㄴ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}=0$

ㄷ. 함수 $g(x)=(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**15.** 다음은 $2 \le r < n$인 두 자연수 $n$, $r$에 대하여

$${}_nP_r = r \cdot {}_{n-1}P_{r-1} + {}_{n-1}P_r$$

임을 이용하여 ${}_nP_r=$ (다) 임을 증명한 것이다.

[증명]

${}_nP_r = r \cdot {}_{n-1}P_{r-1} + {}_{n-1}P_r$

$= r \cdot {}_{n-1}P_{r-1} + r \cdot {}_{n-2}P_{r-1} +$ (가)

$\vdots$

$= r \cdot {}_{n-1}P_{r-1} + r \cdot {}_{n-2}P_{r-1}$

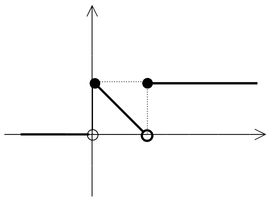
$+ r \cdot {}_{n-3}P_{r-1} + \cdots +$ (나) $+ {}_rP_r$

그런데 ${}_rP_r = r \cdot {}_{r-1}P_{r-1}$이므로 ${}_nP_r =$ (다)

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

| | (가) | (나) | (다) |
|---|---|---|---|
| ① | ${}_{n-2}P_{r-1}$ | $r \cdot {}_rP_{r-1}$ | $r \cdot \sum_{k=r-1}^{n-1} {}_kP_{r-1}$ |
| ② | ${}_{n-2}P_{r-1}$ | $r \cdot {}_{r+1}P_{r-1}$ | $r \cdot \sum_{k=r-1}^{n-1} {}_kP_{r-1}$ |
| ③ | ${}_{n-2}P_r$ | $r \cdot {}_rP_{r-1}$ | $r \cdot \sum_{k=r-1}^{n-1} {}_kP_{r-1}$ |
| ④ | ${}_{n-2}P_r$ | $r \cdot {}_rP_{r-1}$ | $r \cdot \sum_{k=r-1}^{n} {}_kP_{r-1}$ |
| ⑤ | ${}_{n-2}P_r$ | $r \cdot {}_{r+1}P_{r-1}$ | $r \cdot \sum_{k=r-1}^{n} {}_kP_{r-1}$ |

**16.** 함수 $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때 함수 $f(x)$를



$$f(x)=\int_0^x (t-1)g(t)dt$$라

하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ. $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄴ. $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
ㄷ. $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 갖는다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**17.** $n$ 이 자연수일 때, <보기>의 부등식 중 항상 성립하는 것을 모두 고르면? [4점]

〈보기〉

ㄱ. $\log_2(n+2) > \log_3(n+2)$
ㄴ. $\log_{(n+2)}2 < \log_{(n+3)}3$
ㄷ. $\log_{\frac{1}{3}}(n+3) > \log_{\frac{1}{5}}(n+5)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**18.** 자연수 $n$에 대하여

$$f(n)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(k)$의 값은? (단, $e$는 자연로그의 밑이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $1$ ③ $2$
④ $4$ ⑤ $6$

**19.** 좌표평면에서 함수 $x^2-y^2=2$의 그래프를 도형 C라 하자. 실수 $m$에 대하여 $f(m)$을 정점 $(0, 2)$를 지나고 기울기가 $m$인 직선과 도형 C의 서로 다른 교점의 개수라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ. $f(1)=1$ ㄴ. $\lim_{m\to 1}f(m)=2$이다.
ㄷ. 함수 $f(m)$의 불연속점의 개수는 2개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**20.** 모든 실수 $x$ 에 대하여 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

$f(2-x)=4-f(x)$

다음 중 항상 성립한다고 할 수 없는 것은? [4점]

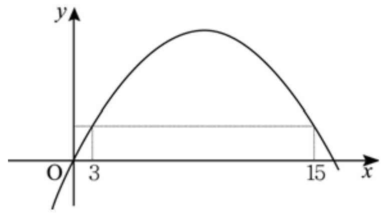
① $f(0)+f(2)=4$
② $f'(0)=f'(2)$
③ $\int_0^2\{f(x)-2\}dx=0$
④ $\int_0^2\{f(x)-x-1\}dx=0$
⑤ 함수 $f(x)$는 점 $(2,\ 4)$에 대칭이다.

**21.** $y=x+\sin x\ (0\le x\le\pi)$와 $y=x$로 둘러싸인 도형을 $x$축 둘레로 회전한 입체의 부피를 구하면? [4점]

① $\frac{\pi^2}{2}$ ② $\frac{2}{3}\pi^2$ ③ $\frac{3}{2}\pi^2$
④ $\pi^2$ ⑤ $\frac{5}{2}\pi^2$

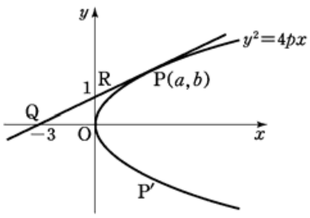
단답형(22 ~ 30)

**22.** 함수 $y=f(x)$는 $f(3)=f(15)$를 만족하는 이차함수이고 그 그래프는 그림과 같다. 모든 자연수 $n$에 대하여 $f(n)=a_1+a_2+a_3+\ \cdots\ +a_n$인 수열 $\{a_n\}$이 있다. $a_n$이 처음으로 음의 값을 갖는 $n$의 값을 구하시오.
(단, $f(0)=0$이다.) [3점]




**23.** 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=3$이고, $n\ge1$일 때, $a_{n+1}$은 $x+y=a_n$과 $x$축, $y$축으로 만들어 지는 삼각형의 세 변 위의 점 중 $x$좌표와 $y$좌표가 모두 정수인 점의 개수이다. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{a_n}$의 값을 구하시오. [4점]

**24.** 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 $P(a,\ b)$에서의 포물선의 접선이 $x$축, $y$축과 만나는 점을 각각 $Q(-3,\ 0)$, $R(0,\ 1)$이라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, 점 $P$는 제1사분면 위의 점이다.) [3점]




**25.** 이차 정사각행렬 $A$가 $A^2 = E$를 만족할 때, 행렬 $(A-E)^{60} + (A+E)^{60}$의 모든 성분의 합을 $p$라 할 때, $\log_2 p$의 값을 구하시오. (단, $A \neq E$이고 $A \neq -E$이다.) [4점]

**26.** 행렬 $\begin{pmatrix} k+1 & 2 \\ 2 & k+1 \end{pmatrix}$가 나타내는 일차변환 $f$ 에 의하여 움직여지지 않는 점들이 원점 이외에도 존재할 때 그러한 점 $P(x,\ y)$ 중에서 $x$, $y$가 정수이고 $x^2 + y^2 \leq 50$를 만족하는 점 $P$의 개수를 구하시오. [4점]

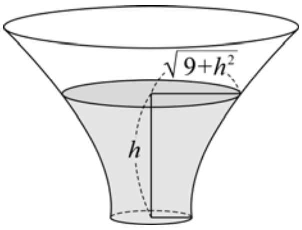
**27.** 좌표평면에서 두 함수

$$f(x) = x^3 - 3x,\quad g(x) = \begin{cases} a & (x < 0) \\ 9x + a & (x \geq 0) \end{cases}$$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 $a$는 두 개가 있다. 두 값의 차를 구하시오. [4점]

**28.** 좌표평면에서 연립부등식 $y \geq (x-4)^2$, $y < 16$를 만족하는 영역을 D라 하자. 점 $A(0,\ 16)$와 영역 D 위의 점 B에 대하여 직선 AB와 $x$축, $y$축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S라 하면 $S > \alpha$이다. $\alpha$의 최댓값을 구하시오. [4점]

**29.** 어떤 그릇에 깊이가 $h$ cm 가 되도록 물을 넣을 때 수면은 반지름의 길이가 $\sqrt{9+h^2}$ cm 인 원이 된다. 이 그릇에 높이가 $h$인 순간의 수면의 상승속도가 $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ $cm/$초가 되도록 물을 넣을 때 높이가 9인 순간의 부피의 증가속도는 $a\pi$ $cm^3/$초이다. 이때, $a$의 값을 구하시오. [4점]




**30.** 좌표평면 위의 두 점 $F(1,\ 0)$, $F'(9,\ 0)$에서 거리의 합이 10인 점 P의 자취가 나타내는 도형을 $C$라 하자. 도형 $C$ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$에 대하여 $x^2-10x+y^2+20$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. [4점]

## 실전모의고사 (B형) 4회- 정답 및 해설

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| ① | ④ | ① | ③ | ② |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ③ | ⑤ | ④ | ③ | ⑤ |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| ③ | ③ | ② | ③ | ③ |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| ④ | ② | ③ | ③ | ⑤ |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| ⑤ | 10 | 5 | 5 | 61 |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 21 | 18 | 16 | 30 | 24 |

1) **정답** ①

**풀이**

(주어진 식) $=\log\dfrac{3\cdot 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\log 2$

2) **정답** ④

**풀이**

$AX+BX=2A+B$에서

$(A+B)X=2A+B$

$A+B=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$이고 $A+B$의 역행렬이 존재하므로

$X=(A+B)^{-1}(2A+B)$

한편, $2A+B=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}$이므로

$X=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\-1&1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $X$의 모든 성분의 합은 4이다.

3) **정답** ①

**풀이**

모든 자연수 $n$에 대하여 $-1\le\sin n\pi\le 1$이므로

$2n-1\le 2n+\sin n\pi\le 2n+1$

$1-n<0$이므로

$\dfrac{2n+1}{1-n}\le\dfrac{2n+\sin n\pi}{1-n}\le\dfrac{2n-1}{1-n}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{1-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{1-n}=-2$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+\sin n\pi}{1-n}=-2$

4) **정답** ③

**풀이**

일차변환 $f$를 나타내는 행렬을 $A$라 하면

$A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}\cdots①$

또, 합성변환 $f\circ f$를 나타내는 행렬은 $A^2$이고, 임의의 점 $(x,\ y)$가 $f\circ f$에 의하여 점 $(y,\ x)$로 옮겨지므로

$A^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdots②$

①, ② 에서

$A\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

따라서 점 $(0,-2)$은 일차변환 $f$에 의하여 점 $(0,\ 2)$로 옮겨진다.

5) **정답** ②

**풀이**

$\overline{PF}=a,\ \overline{PF'}=b$라 하면, 타원의 정의에 의하여

$a+b=12\cdots①$

$\overline{FF'}=12$이므로 $\triangle PFF'$에서 제이코싸인법칙에 의하여

$a^2+b^2+\dfrac{2}{3}ab=108\cdots②$

①에서 $a^2+b^2+2ab=144\cdots③$이므로

③−②에서

$\dfrac{4}{3}ab=36$

$\therefore\ ab=27$

6) **정답** ③

**풀이**

도형 $F_{n+1}$은 도형 $F_n$에 넓이가 $\left(\dfrac{1}{9}\right)^n$인 삼각형 $3\times 4^{n-1}$개를 붙인 것과 같다.

따라서 $S_{n+1}=S_n+3\times 4^{n-1}\times\left(\dfrac{1}{9}\right)^n$에서

$S_n=1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{8}{5}$

7) **정답** ⑤

**풀이**

ㄱ. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}(x-1)=2\times 0=0$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$ (참)

ㄷ. $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$ (참)

8) **정답** ④

**풀이**

$\dfrac{g(x)}{f(x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ , $\dfrac{\{g(x)\}^2 - \{f(x)\}^2}{f(x)\cdot g(x)} = 0$

양변에 $f(x)g(x)$를 곱하여 정리하면

$\{g(x)+f(x)\}\{g(x)-f(x)\}=0$

$g(x)+f(x)=0$일 때와 $g(x)-f(x)=0$일 때를 조사하면 된다. 하지만, $f(x)=0, g(x)=0$일 때는 무연근이다.

$g(x)=f(x)$일 때는 교점이 3개지만 $x=2$는 무연근이다. 따라서 2개이다.

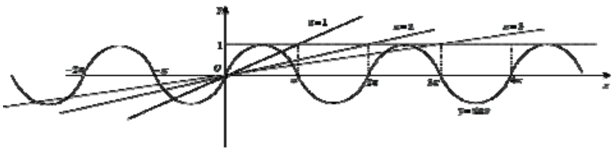
$g(x)=-f(x)$일 때는 $y=-f(x)$가 $y=f(x)$의 $x$축 대칭함수이므로, 새로 그려보면 교점이 3개지만, $x=2$일 때 무연근이므로 2개뿐이다.

총 실근의 개수는 4개다.

9) **정답** ③

**풀이**

$y=\sin x$의 그래프는 주기가 $2\pi$인 함수이고, 그 그래프는 다음과 같다.



$y=\dfrac{1}{n\pi}x$의 그래프는 점 $(n\pi,\ 1)$을 지나므로

$a_1=3=a_2$

$a_3=7=a_4$

$a_5=11=a_6$

$a_7=15=a_8$

$a_9=19=a_{10}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = 2(3+7+11+15+19)$$
$$=110$$

[참고] $a_n = \begin{cases} 2n+1\ (n\text{이 홀수}) \\ 2n-1\ (n\text{이 짝수}) \end{cases}$

10) **정답** ⑤

**풀이**

$$V_1 = \pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx$$
$$=\pi\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi$$
$$=\pi\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi^2}{2}$$

이때, $V_k = kV_1 = \dfrac{\pi^2}{2}k$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{2}k$$
$$=\frac{\pi^2}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{\pi^2}{4}$$

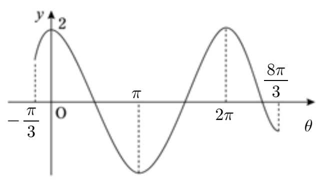
11) **정답** ③

**풀이**

$$f(x) = \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$$
$$= 2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\theta\text{라 하자.}$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi$에서 $-\dfrac{\pi}{3} \leqq 2x-\dfrac{\pi}{3} \leqq 3\pi-\dfrac{\pi}{3}$ 이므로

$g(\theta)=2\cos\theta$ , $-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq 3\pi-\dfrac{\pi}{3}$ 의 그래프는 그림과 같다.




$y=a$가 $g(\theta)=2\cos\theta$의 그래프와 네 점에서 만나려면

$g\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \leqq a < g(0)$ 이다.

$\therefore 1 \leqq a < 2$

12) **정답** ③

**풀이**

ㄱ. 행렬의 모든 성분의 합이 14이므로 변의 개수는 $\dfrac{14}{2}=7$이다. (참)

ㄴ. C행의 성분의 합은 4이다. (거짓)

ㄷ. 그래프를 나타내는 행렬을 $M$이라고 할 때, 경로의 수는 $M^2$의 $(1, 3)$성분과 같으므로 2이다. (참)

13) **정답** ②

**풀이**

$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\alpha$로 두면 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$

$g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\beta$로 두면 $\tan\beta=\dfrac{1}{3}$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$$

$\tan\alpha>0$, $\tan\beta>0$이므로

$0<\alpha,\ \beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\alpha+\beta<\pi$

$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

14) **정답** ③

**풀이**

$f'(x)=\begin{cases}2x-3 & (x>1)\\ 3x^2-1 & (x<1)\end{cases}$이므로

ㄱ. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim\limits_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$

$=2f'(2)=2$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{h\to+0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to+0}\left\{\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}+\frac{f(1)-f(1-h)}{h}\right\}$

$=2\times(-1)+2=0$

$\lim\limits_{h\to-0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to-0}\left\{\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}+\frac{f(1)-f(1-h)}{h}\right\}$

$=2\times2+(-1)=3$ (거짓)

ㄷ. $g'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$ (참)

15) **정답** ③

**풀이**

(가) ${}_{n-2}P_r$

(나) $r\cdot{}_rP_{r-1}$

(다) $r\cdot\sum\limits_{k=r-1}^{n-1}{}_kP_{r-1}$

16) **정답** ④

**풀이**

$g(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ -x+1 & (0\le x<1)\\ 1 & (x\ge1)\end{cases}$이므로

ⅰ) $x<0$일 때

$f(x)=\int_0^x(t-1)0dt=0$

ⅱ) $0\le x<1$일 때

$f(x)=\int_0^x(t-1)(-t+1)dt=-\frac{1}{3}x^3+x^2-x$

ⅲ) $x\ge1$일 때

$f(x)=\int_0^1(t-1)g(t)dt+\int_1^x(t-1)g(t)dt$

$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 $f(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ -\frac{1}{3}x^3+x^2-x & (0\le x<1)\\ \frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{6} & (x\ge1)\end{cases}$

이므로

$f'(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ -x^2+2x-1 & (0<x<1)\\ x-1 & (x>1)\end{cases}$이다.

ㄱ. $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고 우미분계수와 좌미분계수가 같으므로 미분가능하다. (참)

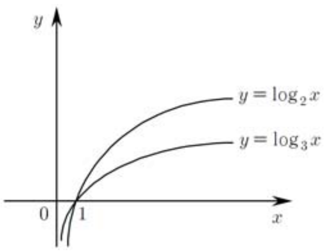
ㄴ. $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 우미분계수와 좌미분계수가 다르므로 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄷ. $f(x)$는 $x<0$일 때 상수함수이고 $0<x\le1$일 때 $x=1$에서 최솟값을 가지며 $x\ge1$일 때 $x=1$에서 최솟값을 갖는다. 그리고 $x>1$일 때 $f(x)$는 증가하므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 갖는다고 할 수 있다. (참)

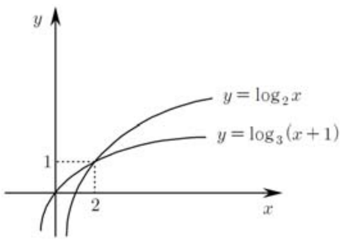
17) **정답** ②

**풀이**

ㄱ. 그림에서와 같이 $x>1$일 때, $\log_2 x>\log_3 x$ (참)




ㄴ. $n+2=x$ $(x\ge3)$로 놓으면 $n+3=x+1$이고 $x>2$이면 $\log_2 x>\log_3(x+1)$이다.

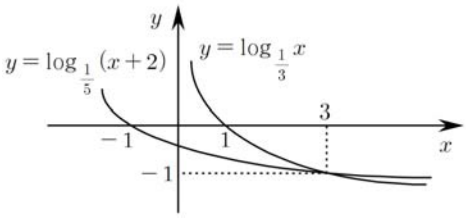


즉, $\log_2(n+2) > \log_3(n+3) > 0$

따라서 $\log_{(n+2)}2 < \log_{(n+3)}3$ (참)

ㄷ. $n+3=x$ $(x \geq 4)$로 놓으면 $n+5=x+2$이고

$x>3$이면 $\log_{\frac{1}{5}}(x+2) > \log_{\frac{1}{3}}x$이다. (거짓)




18) **정답** ③

**풀이**

$$f(n) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+\cdots+(e^{nx}-1)}{x}}$$

$$= \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$= 2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

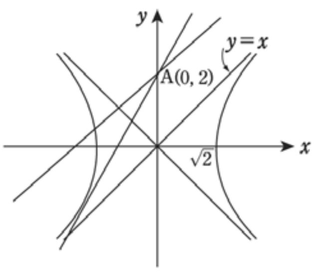
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(k) = \lim_{n\to\infty}2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=2$$

19) **정답** ③

**풀이**

쌍곡선 $x^2-y^2=2$의 점근선의 방정식은 $y=\pm x$이다. 쌍곡선의 그래프가 $y$축에 대칭이고, 점 $A(0, 2)$가 $y$축 위의 점이므로 기울기가 $m$일 때와 기울기가 $-m$일 때, 직선과 쌍곡선의 교점의 개수는 같다. $f(m)=f(-m)$이므로




$y=f(m)$의 그래프는 $y$축 대칭이다.

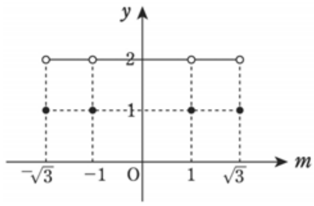
따라서 $m \geq 0$일 때만 조사해보면 된다.

점 $A(0, 2)$를 지나는 직선이 점근선과 평행할 때 $m=1$이고, 쌍곡선과 접할 때 $m=\sqrt{3}$이다.

$m$의 값에 따라 교점의 개수를 조사해보면 다음과 같다.

$$f(m)=\begin{cases} 0 & (\,|m|>\sqrt{3}\,) \\ 1 & (\,|m|=\sqrt{3}\,) \\ 2 & (1<|m|<\sqrt{3}) \\ 1 & (\,|m|=1) \\ 2 & (\,|m|<1) \end{cases}$$

따라서 $y=f(m)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




ㄱ. $f(1)=1$ (참)

ㄴ. $\lim_{m\to 1}f(m) = 2$ (참)

ㄷ. $y=f(m)$의 불연속점의 개수는 4개이다. (거짓)

20) **정답** ⑤

**풀이**

주어진 함수는 점 $(1, 2)$에 대하여 대칭인 연속함수이다.

① $x=0$을 대입하면 $f(2)=4-f(0)$

$\therefore f(2)+f(0)=4$ (참)

② $-f'(2-x)=-f'(x)$ $\therefore f'(2)=f'(0)$ (참)

③ $h(x)=f(x)-2$라고 하면

$h(2-x)=f(2-x)-2=2-f(x)$이므로

$h(x)+h(2-x)=0$이다. 함수 $h(x)$는 $(1, 0)$에 대칭이므로 $\int_0^2 h(x)dx=0$ (참)

④ $g(x)=f(x)-x-1$라고 하면

$g(2-x)=f(2-x)-(2-x)-1=-f(x)+x+1$이므로

$g(x)+g(2-x)=0$이다. 함수 $g(x)$는 $(1, 0)$에 대칭이므로 $\int_0^2 g(x)dx=0$ (참)

⑤ 함수 $f(x)$는 점 $(1, 2)$에 대칭이다. (거짓)

21) **정답** ⑤

**풀이**

$y=x+\sin x$로 만들어지는 회전체의 부피를 $V_1$이라 하고, $y=x$로 만들어지는 회전체의 부피를 $V_2$라고 하면 구하고자 하는 부피는 $V=V_1-V_2$이다.

$$V=\pi\int_0^{\pi}(x+\sin x)^2dx-\pi\int_0^{\pi}x^2dx$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}x\sin x dx+\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x dx$$

$$=2\pi\left\{[-x\cos x]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx\right\}+\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=2\pi^2+\frac{\pi^2}{2}=\frac{5\pi^2}{2}$$

22) **정답** 10

**풀이**

함수 $f(x)$는 상수항이 0인 이차함수이므로 $f(n)$은 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 $n$항까지의 합을 나타낸다. 이차함수의 대칭축이 $x=9$이므로 $f(9)$가 최대이다. 또한 $n<9$일 때 $f(n)$의 값이 증가하므로 $a_1$부터 $a_9$까지의 값은 양수이고 $a_{10}$부터 음수이다.

23) **정답** 5

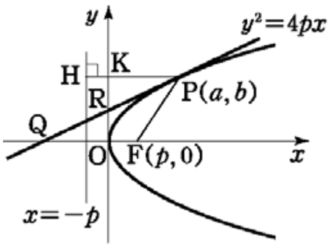
**풀이**

$a_{n+1}=3a_n$, $a_1=3$이므로 $a_n=3^n$이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{3^n}=\frac{\frac{10}{3}}{1-\frac{1}{3}}=5$$

24) **정답** 5

**풀이**




오른쪽 그림과 같이 점 $P(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은 $by=2p(x+a)$이므로

$\overline{QF}=\overline{PF}=\overline{PH}=a+p$

즉, $\overline{OQ}=\overline{PK}=3$, $\overline{OR}=\overline{KR}=1$

$\therefore P(3,\ 2)$

$\therefore a+b=3+2=5$

25) **정답** 61

**풀이**

$(A-E)^2=-2(A-E)$ , $(A+E)^2=2(A+E)$에서

$(A-E)^{60}=(-2)^{59}(A-E)$

$(A+E)^{60}=2^{59}(A+E)$이므로

$(A-E)^{60}+(A+E)^{60}$

$=-2^{59}(A-E)+2^{59}(A+E)=2^{60}E$

$=\begin{pmatrix}2^{60} & 0\\ 0 & 2^{60}\end{pmatrix}$

$\therefore\ p=2^{60}+2^{60}=2^{61}$

$\therefore\ \log_2 p=61$

26) **정답** 21

**풀이**

$\begin{pmatrix}k+1 & 2\\ 2 & k+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$가 $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$인 해를 가지면 되므로

$\begin{pmatrix}k & 2\\ 2 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$에서 $D=k^2-4=0$

i) $k=2$일 때

$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$이므로 $x+y=0$ $\cdots$①

$x^2+y^2\le 50$과 ①을 만족하는 점의 개수는 11개

ii) $k=-2$일 때

$\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$이므로 $-x+y=0$ $\cdots$②

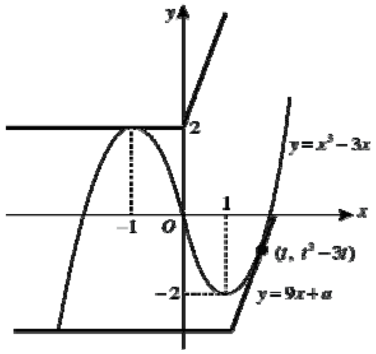
$x^2+y^2\le 50$과 ②를 만족하는 점의 개수는 11개

그런데 원점이 두 번 세어졌으므로 점 $P$의 개수는 $11+11-1=21$개다.

27) **정답** 18

**풀이**

$y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.




i) $a=2$일 때 두 점에서 만난다.

ii) $x>0$에서 $y=9x+a$가 $y=x^3-3x$와 접할 때 접점을 $(t,\ t^3-3t)$라 하면 접선의 방정식은

$$y=(3t^2-3)(x-t)+t^3-3t$$

이고, 기울기가 9이므로

$$3t^2-3=9,\ \therefore\ t=2$$

그러므로 접선의 방정식은 $y=9x-16$

$\therefore\ a=-16$

i)과 ii)에서 $a=2,\ -16$이므로 두 수의 차는 18이다.

28) **정답** 16

**풀이**

직선 $\overline{\mathrm{AB}}$의 $y$절편은 $\mathrm{A}(0,\ 16)$이고,

$x$절편의 크기가 최소일 때, 삼각형의 넓이가 최소이다.

$|\overline{\mathrm{AB}}$의 기울기$|$ $<$ $|$A에서의 접선의 기울기$|$이므로

$f(x)=(x-4)^2$에서 $f'(x)=2(x-4)$이므로

A에서의 접선의 기울기 $=f'(0)=-8$이다.

이때의 $x$절편은 2이고

$$\mathrm{S}>\frac{1}{2}\times16\times2=16,\quad \therefore\ \alpha=16$$

29) **정답** 30

**풀이**

부피를 $V$라고 하면 $\dfrac{dV}{dh}$는 높이가 $h$일 때의 단면인 원의 넓이이다.

$\dfrac{dV}{dh}=\pi\left(\sqrt{9+h^2}\right)^2=\pi(9+h^2)$

수면의 상승속도는 $\dfrac{dh}{dt}$이므로 $\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}$이다.

부피의 증가속도 $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dh}\times\dfrac{dh}{dt}=\pi(9+h^2)\times\dfrac{1}{\sqrt{h}}$

$\dfrac{dV}{dt}\Big|_{h=9}=\pi\times 90\times\dfrac{1}{3}$

$=30\pi\left(cm^3/\sec\right)\quad\therefore a=30$

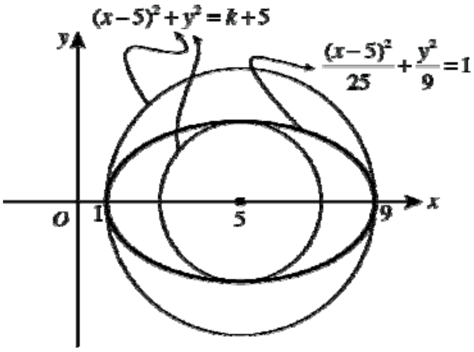
30) **정답** 24

**풀이**

두 점 F$(1,0)$, F$'(9,0)$에서 거리의 합이 10인 점 P의 방정식은 $\dfrac{(x-5)^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$이다.

$x^2-10x+y^2+20=k$라고 하면

$(x-5)^2+y^2=k+5$가 된다.




$\therefore\ 3\le\sqrt{k+5}\le 5$

$\therefore\ 4\le k\le 20$