8. 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

9. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

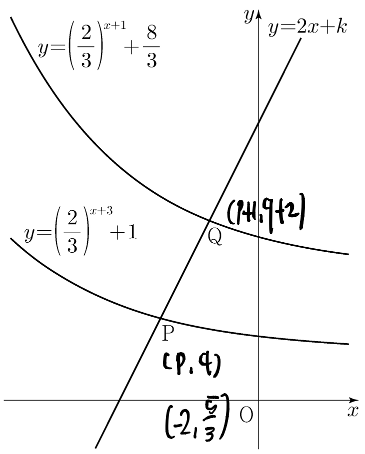
$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1, \quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

4

$\Delta x=1.$
$\Delta y=2,$

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$



$\frac{5}{3}=k-4 \quad k=\frac{17}{3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}=q+2$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+1=q$

$\frac{2}{3}\left(q-\frac{2}{3}\right)=q-1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}=q-\frac{2}{3}.$

$1-\frac{4}{9}=\frac{1}{3}q=\frac{5}{9}.$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}=q-1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}=1$

$q=\frac{5}{3}$

$\therefore p=-2.$

10. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? [4점]

5

① -18 ② -17 ③ -16 ④ -15 ⑤ -14

① $f'(0)=f(1)+f'(1)=g'(1)$

$l_1:\ y=f'(0)x.$

$l_2:\ y=g'(1)(x-1)+g(1).$

② $g(1)-g'(1)=0.$

$g(1)=f(1)=2.=g'(1)=f'(0).$

$f'(0)=2, \quad f(1)=2. \quad f(0)=0. \quad f'(1)=0$

$f(1)=2. \quad f(0)=0.$
$f'(1)=0. \quad f'(0)=2.$

$2a \quad 2b \quad 2$

$f(x)=ax^3+bx^2+2x.$

$f(1)=2=a+b+2 \quad a+b=0.$

$f'(1)=a+2=0. \quad a=-2, b=2.$

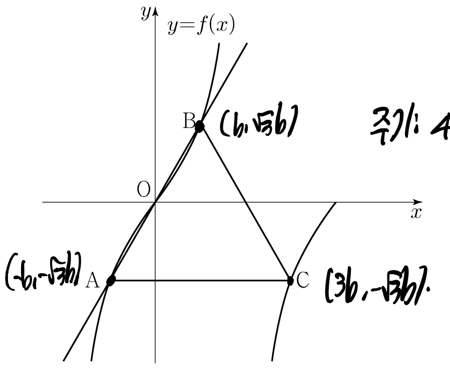
$f'(2)=12a+4b+2=8a+2=-14$

11. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{a}{2} < x \le a,\ x \ne \frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수 $a>0$

$$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$$

3

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



주기: $4b$.

① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

$(b, \sqrt{3}b)$

$\sqrt{3}b = \tan\frac{b}{a}\pi = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

주기: $\frac{\pi}{\left|\frac{\pi}{a}\right|} = |a| = 4b$.

$b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$a^b + b^a = 40$

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3 - \{f(x)\}^2 - x^2 f(x) + x^2 = 0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

1 0 $\frac{1}{2}$

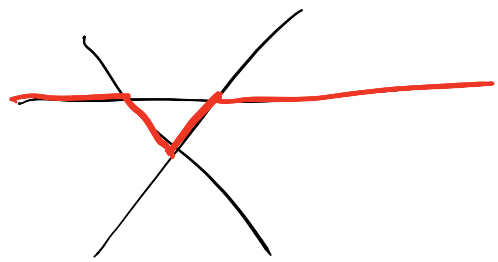
3

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$f^2(f-1) - x^2(f-1)$

$= (f^2 - x^2)(f-1) = 0.$

$f(x) = \pm x, 1$



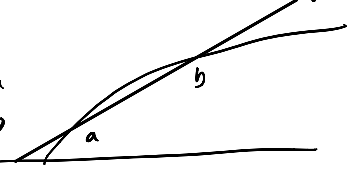
$y = mx$

$a^b+b^a=40$

$a^{2b}+b^{2a}=1600-2\cdot a^b\cdot b^a$

20 20

$a^b=b^a=20$



$a^b\cdot b^a=k$

$b\log_2 a + a\log_2 b = \log_2 k$

abm abm

$\frac{\log_2 a}{a}=\frac{\log_2 b}{b}=m$

13. 두 상수 a, $b\,(1<a<b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$에 대하여 $f(1)=40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

2

① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920

$f(1)=a^b+b^a=40.$ $a^{2b}+b^{2a}=?$

m_1 $\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}$ $m_2.$ $\frac{\frac{1}{2}(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}$

$(a^b+b^a)^2 = a^{2b}+b^{2a}+2\cdot a^b\cdot b^a$

$k-m = \frac{1}{2}(k-m)$

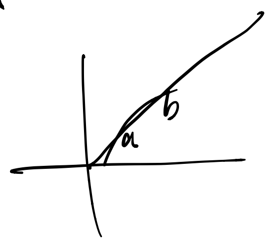
$\therefore k=n.$

$ka\cdot a^a \times k\cdot a^a = k^2\, 2a\cdot a^{2a}$

$a\cdot m_1 = \log_2 a.$

$a\cdot(\log_2 b-\log_2 a)=(b-a)\log_2 a$

$a\cdot\log_2 b = b\cdot\log_2 a.$



$\frac{a}{b}=\frac{\log_2 a}{\log_2 b}$ $\overline{b}$

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b)\ \ (a\neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|\,dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

$\int_0^1 v(t)dt = x(1)-x(0)=0.$

<보 기>

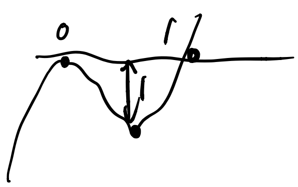
ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt=0$

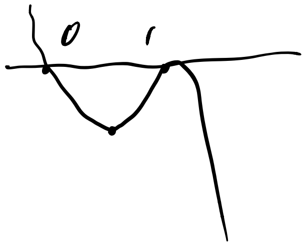
ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

3

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ





18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{2} = 56, \quad \sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{8} a_k = 100$$

일 때, a_8의 값을 구하시오. [3점]

$f(x+1) = xf(x) + ax+b$

$0 \le x \le 1$ 에서

$f(x+1) = x^2+ax+b$.

미분가능

19. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - (a^2 - 8a)x + 3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오. [3점]

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x) = x$이다.
(나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 $f(x+1) - xf(x) = ax+b$이다.

$60 \times \int_1^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

110

$$f(x) = \begin{cases} x. \\ (x-1)^2 + a(x-1) + b. \end{cases}$$

$\therefore b=1.\ a=1.$

$x^2-2x+1 + x-1+1$

$= x^2-x+1$

$\int_1^2 x^2-x+1\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^2$

$= \frac{7}{3} - \frac{3}{2} + 1$

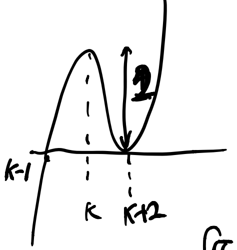
$= \frac{11}{6}$

$f(1)=f(4)=k$. $4-1=3$. $\therefore k=1$ or 2.

$[k, k+2]$

$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x\right)^2=2$

(i) $k=1$일때, $f(0)=k-2$.



$\therefore f(1)=f(4)=1$.

$f(x)-1=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)$

$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)+1$

$g(k-2)=1$. $f(5)=9$

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|a_1|=2$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_{n+1}|=2|a_n|$이다.
>
> (다) $\sum_{n=1}^{10} a_n=-14$

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값을 구하시오. [4점]

$\therefore 678$

2 4 8 16 32 64 ...

2^n의 S_n은 $2^{n+1}-2$ 임 즉.

$a_{10}-S_9=2$ 이다.

여기서 16차이가 나면 됨. 안됨.

$S_9-a_{10}=-2$ 이다.

여기서 12를 내리자. 2랑 4.

양변에 $-2(2+4)$ 하면 됨.

-2 -4 8 16 32 64 128 256 512 -1024

a_1 a_3 a_5 a_7 a_9

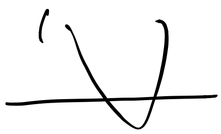
$6+92+640=678$

22. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t, t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t\to a+} g(t)+\lim_{t\to a-} g(t)\le 2$이다.
>
> (나) $g(f(1))=g(f(4))=2$, $g(f(0))=1$

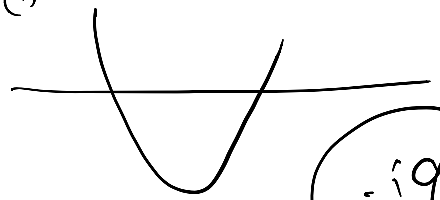
$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(ii)



~~3~~ 불가능.

(i) 3



$\therefore 9$

0~2

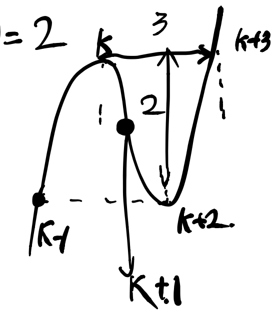
(가) $\beta-\alpha\ge 2$

(나) $g(\ )=2$ 에서.

$\beta-\alpha=2$, $f(1)=f(4)$

$f(0)+1=f(4)+1=$ ~~X~~ 변경 $=k+1$

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(2^3)=2$



(i) (ii) 에서는 $k=1$. $\therefore f(0)=f(-1)=k-2$

(가)

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

27. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치가 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$ ② $\frac{e^4}{2}-\frac{5}{16}$ ③ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{4}$

④ $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{8}$

$x^2=t^2x-\frac{\ln t}{8}$

$x^2-t^2x+\frac{\ln t}{8}=0.$

$x_1+x_2=t^2.$ $x_1^2+x_2^2=t^4-\frac{\ln t}{4}$

$x_1x_2=\frac{\ln t}{8}$

$\left(\frac{t^2}{2},\ \frac{t^4}{2}-\frac{\ln t}{8}\right)$

$\frac{dx}{dt}=t$ $\frac{dy}{dt}=2t^3-\frac{1}{8t}$

$\int_1^e 2t^3+\frac{1}{8t}\,dt$

$=\left[\frac{t^4}{2}+\frac{1}{8}\ln t\right]_1^e$

$\frac{e^4}{2}+\left(-\frac{3}{8}\right)$

28. 함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를

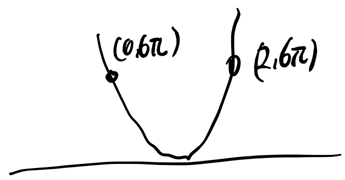
$$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$$

라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2

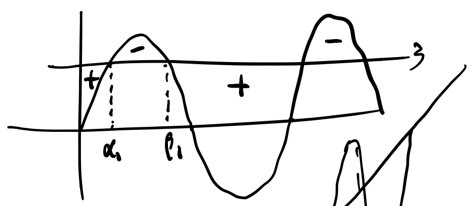
$g=(3x+4\cos x)\cdot f(x)$ (0,2)



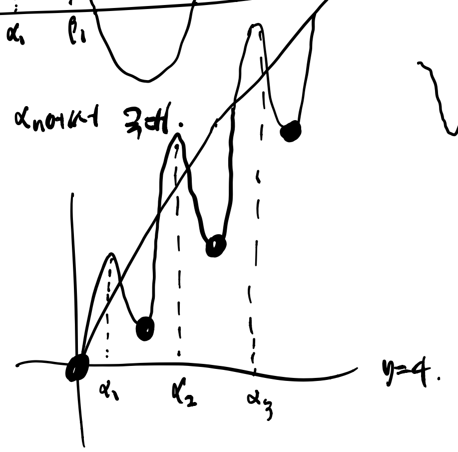
6π->0 → 6π.

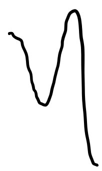
$3x+4\cos x$

$3-4\sin x.$ $\sin x=\frac{3}{4}$ 에서.



α_n에서 극대.





$\frac{3}{2}$

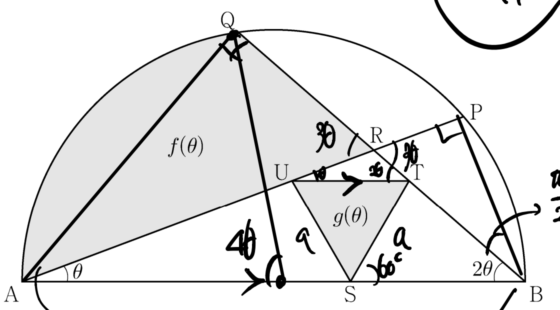
단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB=\theta$, $\angle QBA=2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자. 선분 AB 위의 점 S, 선분 BR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 선분 UT가 선분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,

$\lim_{\theta\to 0+}\dfrac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\dfrac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

∴ 11



$\overline{AQ}=2\sin 2\theta$

$f(\theta)=\frac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)$ | $r=1$, $\theta=4\theta$

$\frac{1}{2}\times(2\sin2\theta)^2\times\frac{\cos3\theta}{\sin3\theta}$

$=\frac{1}{2}\left(4\theta-\sin4\theta+\frac{4\sin^2 2\theta\cos3\theta}{\sin3\theta}\right)$

$\frac{a}{\sin2\theta}=\frac{b(2-a)}{\sqrt3}$

$\sqrt3 a=2b\sin2\theta-ab\sin2\theta$

$a=\frac{2b\sin2\theta}{\sqrt3+b\sin2\theta}$

$\frac{2\sin\theta}{\sin3\theta}=b$

$g(\theta)=\frac{\sqrt3}{4}a^2$

$\theta\to0,\ b\to\frac{2}{3}$

$\theta\to0\ \frac{a}{\theta}\to\frac{\frac{8}{3}}{\sqrt3}=\frac{8}{3\sqrt3}$

$\frac{f(\theta)}{\theta}=\frac{1}{2}\left(0+\frac{16}{3}\right)=\frac{8}{3}$

$=\frac{2}{9}\sqrt3$

30. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=1$, $\int_1^2 f(x)\,dx=\dfrac{5}{4}$
>
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x\ge1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\int_1^8 xf'(x)\,dx=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

∴ 143

$g(2x)=2f(x)$

$x=1$: $g(2)=2f(1)=2$

$x=2$: $g(4)=2f(2)=4$

(1,1) (2,2) (4,4) (8,8)

$g(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)$

$\int_1^8 g(t)\,dt$

$=\int_1^2 g(t)\,dt+\int_2^4 g(t)\,dt+\int_4^8 g(t)\,dt$

$=\frac{33}{4}+\frac{17}{4}$ ... $=28$

$\therefore 33+\frac{17}{4}=\frac{139}{4}$

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.