2011학년도 3월 고3 전국연합학력평가 문제지

제 2 교시 수리 영역

'나'형 | 성명 | 수험 번호 | 3 |

◦ 자신이 선택한 유형('가'형/'나'형)의 문제지인지 확인하시오.
◦ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
◦ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.
◦ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면, 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
◦ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
◦ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\log_3 12 - \log_3 \dfrac{4}{27}$ 의 값은? [2점]

① $\log_3 16$ ② $\log_3 21$ ③ 3
④ 4 ⑤ $\log_3 90$

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $X+AB=B$ 를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

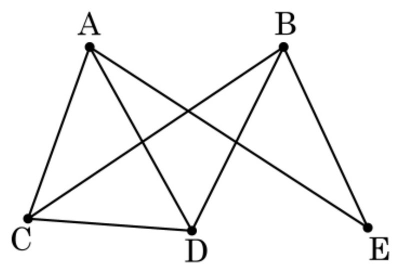
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+\cos n\pi)}{n^2+1}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. $3^x + 3^{1-x} = 10$ 일 때, $9^x + 9^{1-x}$ 의 값은? [3점]

① 91 ② 92 ③ 93 ④ 94 ⑤ 95

5. 그래프의 꼭짓점 사이의 연결 관계를 행렬로 나타낼 때, 그 행렬의 모든 성분의 합은? [3점]



① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

6. 1 보다 큰 세 실수 a, b, c 에 대하여

$$\log_a 2 = \log_b 5 = \log_c 10 = \log_{abc} x$$

가 성립할 때, 실수 x 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\sqrt{10}$ ③ 10
④ $10\sqrt{10}$ ⑤ 100

7. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 모든 상수 k 의 값의 합은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

8. 모든 양의 실수 x 에 대하여 부등식

$$\log_a(x+1) - \log_a x > \log_b(x+1) - \log_b x > 0$$

을 만족시키는 세 양의 실수 a, b, 1 사이의 대소관계로 옳은 것은? (단, $a \neq 1$, $b \neq 1$) [3점]

① $1 < a < b$ ② $a < 1 < b$ ③ $a < b < 1$
④ $1 < b < a$ ⑤ $b < 1 < a$

9. 양의 정수 n 에 대하여 $\log n$ 의 지표를 $f(n)$, 가수를 $g(n)$ 이라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 양의 정수 n 의 개수는? [3점]

(가) $f(3) < f(n) < f(2011)$
(나) $\{g(n)\}^2 - g(n) + \log 2 \cdot \log 5 < 0$

① 326 ② 328 ③ 330 ④ 332 ⑤ 334

10. 두 행렬

$$A = \begin{pmatrix} \log_2(x+1) & \log_2(y-3) \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1+\log_3 x & 1 \\ \log_3 y & 1 \end{pmatrix}$$

에 대하여 A 의 역행렬이 존재하지 않고, B 의 역행렬도 존재하지 않을 때, 두 실수 x, y 의 곱 xy 의 값은? [3점]

① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

11. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A+B=E$, $AB=-E$가 성립할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A^2+B^2=3E$

ㄴ. $A^{n+2}+B^{n+2}=A^{n+1}+B^{n+1}+A^n+B^n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

ㄷ. $A^9+B^9=76E$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 첫째항이 1인 무한등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-2}-a_{3n-1})$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{19}$ ② $\frac{8}{19}$ ③ $\frac{9}{19}$ ④ $\frac{10}{19}$ ⑤ $\frac{11}{19}$

13. 액체의 끓는 온도 T(°C)와 증기압력 P(mmHg) 사이에

$$\log P = a + \frac{b}{c+T} \quad (a, b, c\text{는 상수이고 } T > -c)$$

인 관계가 성립한다. 표는 어떤 액체의 끓는 온도에 대한 증기압력을 나타낸 것이다.

끓는 온도(°C)	0	5	10
증기압력(mmHg)	4.8	6.6	8.8

이 표를 이용하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\log 2 = 0.301$로 계산한다.) [4점]

<보 기>

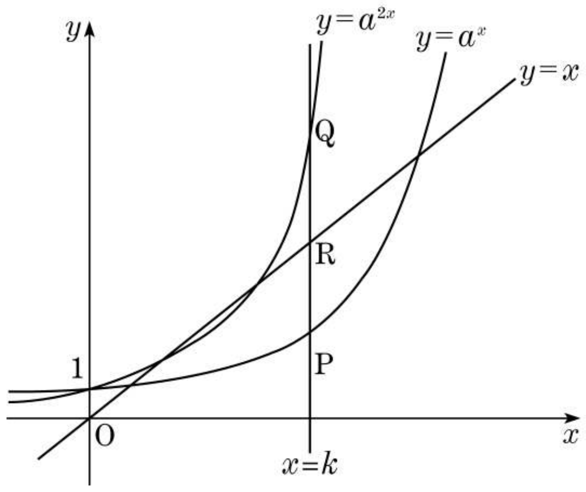
ㄱ. $0.602 < a + \frac{b}{c} < 0.699$

ㄴ. $b < 0$

ㄷ. $P < 10^a$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 그림과 같이 지수함수 $y=a^x$ 와 $y=a^{2x}$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 와 각각 서로 다른 두 점에서 만난다. $y=a^x$ 의 그래프, $y=a^{2x}$ 의 그래프와 직선 $x=k$의 교점을 각각 P, Q라 하고 직선 $y=x$와 직선 $x=k$의 교점을 R라 하자.



$k=2$ 이면 두 점 Q와 R가 일치할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a>1$) [4점]

<보 기>

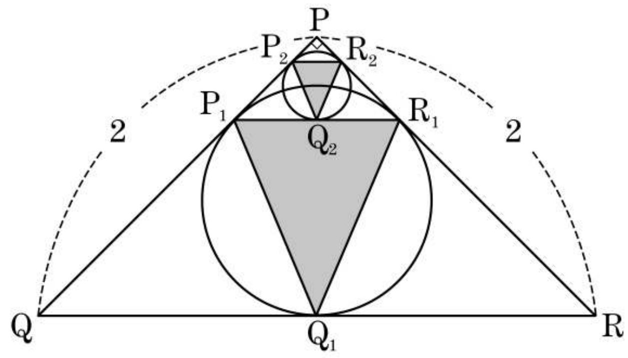
ㄱ. $k=4$ 이면 두 점 Q와 R가 일치한다.

ㄴ. $\overline{PQ}=12$ 이면 $\overline{QR}=8$ 이다.

ㄷ. $\overline{PQ}=\dfrac{1}{8}$ 을 만족시키는 실수 k 의 값의 개수는 2 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 그림과 같이 $\overline{PQ}=\overline{PR}=2$이고 $\angle QPR=90°$인 삼각형 PQR의 내접원과 세 변 PQ, QR, RP의 접점을 각각 P_1, Q_1, R_1이라 하자. 또, 삼각형 PP_1R_1의 내접원과 세 변 PP_1, P_1R_1, R_1P의 접점을 각각 P_2, Q_2, R_2라 하자.



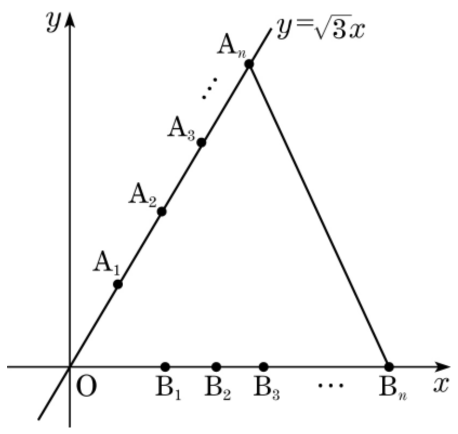
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 세 점 P_n, Q_n, R_n을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $P_nQ_nR_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = p+q\sqrt{2}$를 만족시키는 두 유리수 p, q의 합 $p+q$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{7}$ ② $\dfrac{2}{7}$ ③ $\dfrac{3}{7}$ ④ $\dfrac{4}{7}$ ⑤ $\dfrac{5}{7}$

수리 영역

16. 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}_1(1, \sqrt{3})$과 점 $\mathrm{B}_1(2, 0)$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위의 점 A_n과 x축 위의 점 B_n이 다음 식을 만족시킨다.

$$\overline{\mathrm{OA}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OA}_n}+a\ ,\ \overline{\mathrm{OB}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OB}_n}+b$$



삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=5\sqrt{3}$이 되도록 하는 양의 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

17. 다음은 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{i=1}^{2n-1}\{i+(n-1)^2\}=(n-1)^3+n^3 \ \cdots\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n=1$일 때, $1+0^2=0^3+1^3$ 이므로 $(*)$이 성립한다.

(2) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하고, $n=k+1$일 때 $(*)$이 성립함을 보이자.

$$\sum_{i=1}^{2k+1}(i+k^2)=\sum_{i=1}^{2k-1}\{i+(k-1)^2\}+\sum_{i=1}^{2k-1}(2k-1)+\boxed{(\text{가})}$$

$$=\boxed{(\text{나})}$$

그러므로 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
따라서 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$, (나)에 알맞은 식을 $g(k)$라 할 때, $\frac{g(4)}{f(4)}$의 값은? [3점]

① $\frac{23}{7}$ ② $\frac{24}{7}$ ③ $\frac{25}{7}$ ④ $\frac{26}{7}$ ⑤ $\frac{27}{7}$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 첫째항이 모두 1이고

$$a_{n+1}=3a_n,\ b_{n+1}=(n+1)b_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킨다. 수열 $\{c_n\}$을

$$c_n=\begin{cases} a_n & (a_n<b_n) \\ b_n & (a_n \ge b_n) \end{cases}$$

이라 할 때, $\sum_{n=1}^{50}2c_n$의 값은? [4점]

① $3^{50}-20$ ② $3^{50}-19$ ③ $3^{50}-15$ ④ $3^{50}-11$ ⑤ $3^{50}-7$

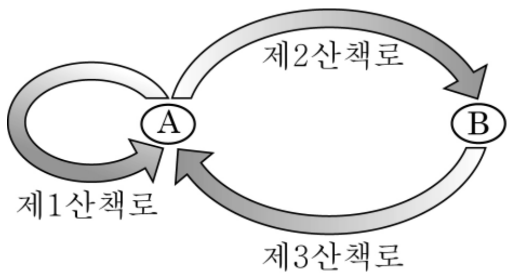
19. 자연수 n에 대하여 다음과 같이 제n행에 0과 1 사이의 유리수 중에서 분모는 2^n이고 분자는 홀수인 모든 수를 작은 것부터 차례로 나열하였다.

제1행	$\frac{1}{2}$
제2행	$\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$
제3행	$\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$
⋮	⋮

제n행의 마지막 수를 a_n, 제n행의 모든 수의 합을 b_n이라 할 때 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{(2^n+1)a_n}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

20. 어느 공원에는 아래 그림과 같이 A 지점에서 출발하여 A 지점으로 돌아오는 제1산책로, A 지점에서 출발하여 B 지점으로 이어지는 제2산책로, B 지점에서 출발하여 A 지점으로 이어지는 제3산책로가 있고, 각 산책로의 거리는 1 km 이다.



이 산책로들을 따라 다음과 같은 규칙으로 산책한 거리가 n km 일 때, A 지점에서 출발하여 A 지점에 도착하는 방법의 수를 a_n, A 지점에서 출발하여 B 지점에 도착하는 방법의 수를 b_n이라 하자.

(가) 각 산책로에서는 화살표 방향으로만 진행해야 한다. (나) 같은 산책로를 반복할 수 있다. (다) 지나지 않는 산책로가 있을 수 있다.

$a_7 + b_7$ 의 값은? (단, n은 자연수이다.) [4점]

① 21 ② 29 ③ 34 ④ 42 ⑤ 55

21. 좌표평면 위의 원점 O 와 점 $P_1(1, 0)$이 있다. 모든 자연수 n 에 대하여 점 $P_n(x_n, y_n)$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 동경 OP_n이 나타내는 각의 크기는 $\frac{n-1}{3}\pi$이다. (나) $\overline{OP_{n+1}} = \begin{cases} \frac{1}{2}\overline{OP_n} & (y_n > 0) \\ \overline{OP_n} & (y_n = 0) \\ \frac{4}{3}\overline{OP_n} & (y_n < 0) \end{cases}$

$\overline{OP_{50}}$의 값은? [4점]

① $\left(\frac{2}{3}\right)^8$ ② $\left(\frac{2}{3}\right)^{16}$ ③ $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^7$
④ $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{14}$ ⑤ $\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^8$

단답형

22. $\sqrt[n]{2} \times \sqrt[n]{8} = \sqrt[8]{2}$ 를 만족시키는 자연수 n 의 값을 구하시오. [3점]

23. 수열 $\{a_n\}$이 첫째항과 공비가 모두 5인 등비수열일 때, $\sum_{n=1}^{20} \log_{25} a_n$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 수열 $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 100,\ b_n = \frac{4}{n^2+2n}$$

일 때, a_1의 값을 구하시오. [3점]

25. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이

$$S_n = {}_{n+2}\mathrm{C}_3 \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

일 때, $\sum_{n=1}^{10}(a_{n+1}-a_n)$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 자연수 n 에 대하여 1 부터 $6n$ 까지의 자연수의 총합을 A_n, 1 부터 $6n$ 까지의 자연수 중에서 3 의 배수를 제외한 자연수의 총합을 B_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=\frac{q}{p}$ 이다. 이때, 서로소인 자연수 p, q 의 합 $p+q$ 의 값을 구하시오. [3점]

27. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

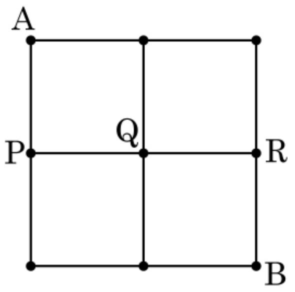
(가) a_n은 자연수이다.

(나) $\left|a_n - \sqrt{n}\right| < \frac{1}{2}$

$\sum_{n=1}^{90} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

28. x 에 대한 방정식 $\cos x = \frac{1}{(2n-1)\pi}x$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$의 양의 실근의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{24}\frac{500}{(a_n+1)(a_n+3)}$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 그림과 같은 그래프가 있다. 이 그래프의 꼭짓점 A 에서 꼭짓점 B 로 가는 경로 중에서 세 꼭짓점 P, Q, R 를 모두 지나는 것의 개수를 구하시오. [4점]



30. n차 정사각행렬 A 의 (i, j) 성분 a_{ij} 를

$$a_{ij} = (i-1)n + j \text{ (단, } 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n)$$

이라 하자. n 이하의 자연수 k 에 대하여 $f(k)$를 행렬 A 의 $(k, n-k+1)$ 성분이라 할 때, $12 \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} f(k)}{n^3}$ 의 값을 구하시오. (단, n 은 자연수이다.) [4점]

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.