최신 기출문제 분석 - 2013.9, 11

수학2

CP 01	분수방정식은 최소공배수를 곱하여 무연근을 제외하라.
CP 02	무리방정식은 적절히 이항, 치환하여 제곱한 후 무연근을 제외하라.
CP 03	고차부등식은 인수분해 후 부호변화를 주시하며 그래프를 그려라.
CP 04	분수부등식은 통분한 후, 분모의 제곱을 곱하는 등 동치변형을 하라.

CP 05	삼각함수의 공식을 적절히 활용하라. (주로 각, 함수의 통일)
CP 06	사인법칙, 코사인법칙 등 고등학교 1학년 공식을 활용하라.

CP 07	도형의 성질, 사인정리를 활용하여 식을 세워 극한값을 계산하라.
CP 08	정의를 활용하거나, 그래프를 그려서 극한값, 연속성을 확인하라.
CP 09	모두 수렴하는 형태로 표현하여 극한의 성질을 적용하라.

CP 10	다항함수의 그래프의 개형은 미분과 개형을 활용하라.
CP 11	초월함수의 그래프의 개형은 기본연산과 미분을 활용하라.
CP 12	접선 문제는 모든 점에서의 접선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$을 도입하라.
CP 13	미분가능의 정의에 따라 미분가능성을 확인하라.

기하와 벡터

CP 01	이차곡선의 정의를 확인할 수 있도록 그림을 그려라.
CP 02	이차곡선의 접선문제는 세 가지 유형에 대한 공식을 활용하라.
CP 03	이차곡선의 방정식과 평면기하를 활용하라.

CP 04	공간도형을 평면도형으로 옮겨서 생각하라.
CP 05	직선, 평면이 이루는 각의 정의대로 작도하라.
CP 06	좌표평면의 성질과 공식을 그대로 좌표공간에 적용하라.

CP 07	벡터의 합을 세 가지 방법으로 분석하라.
CP 08	벡터의 내적을 세 가지 방법으로 분석하라.

CP 09	일차변환 행렬과 기하적 의미를 상호적으로 해석하라.
CP 10	일차변환의 기본적인 계산 방법을 숙지하라.
CP 11	일차변환 기본성질을 적용하라.

적분과 통계

CP 01	정적분의 정의, 무한급수와 정적분의 관계를 정확히 이해하라.
CP 02	넓이, 부피(회전체), 길이의 정적분을 논리적으로 써내라.
CP 03	적분의 계산방법을 정확하게 적용하라.
CP 04	도형의 이동, 성질을 활용하여 정적분을 계산하라.
CP 05	정적분으로 정의된 함수, 적분과 미분의 관계를 파악하라.

CP 06	수형도를 빨리 세는 도구인 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하라.
CP 07	몇 개를 몇 개로 볼 것인지 생각해서 나누고, 곱하여라.
CP 08	이항정리의 공식 $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^r b^{b-r}$을 활용하라.

CP 09	경우의 수와 확률을 동일선상에서 생각하라.
CP 10	조건부확률은 "~일 때" 의 확률을 먼저 구하라.
CP 11	독립시행의 확률은 (경우의 수)$\times$(확률)로 구하라.

CP 12	평균과 분산, 표준편차의 공식을 이해하고 적용하라.
CP 13	이항분포와 정규분포를 명확하게 이해하라.
CP 14	표본평균의 분포와 표본비율의 분포를 활용한 통계적 추정

1. 6월의 출제 범위 : [수학1 전체], [수학2 전체], [기하와 벡터 1,4단원], [적분과 통계 1 ~ 2 단원]
(한완수 기하와 벡터 4단원인 일차변환은 대부분의 책에서는 1단원)

2. 9월, 11월의 출제 범위 : [수학1 전체], [수학2 전체], [기하와 벡터 전체], [적분과 통계 전체] - 전범위

3. 반드시 스스로 100분의 시간을 재고 문제를 푼 후 스스로 CP와 심화특강으로 문제를 모두 분석한 후에 아래의 분석 및 해제를 보도록 하자.

분류

2014 9월 모의고사 분류					
번호	분석		번호	분석	
1	수학1 (행렬그래프)	●	16	수학1 (수열)	●
2	수학1 (수열의극한)	●	17	수학1 (행렬그래프)	●
3	수학2 (삼각함수)	수학2 - CP05 수학2 - 심화특강11	18	수학1 (수열의극한)	●
4	수학2 (방부등식)	수학2 - CP04 수학2 - 심화특강01, 07	19	기하와 벡터 (공도공좌)	기하와 벡터 - CP04 기하와 벡터 - 심화특강08
5	수학2 (삼각함수)	수학2 - CP05 수학2 - 심화특강12	20	적분과 통계 (통계)	적분과 통계 - CP13 적분과 통계 - 심화특강15
6	적분과 통계 (확률)	적분과 통계 - CP09, 11	21	수학2 (미분법)	수학2 - CP11 수학2 - 심화특강30
7	수학2 (방부등식)	수학2 - CP02 수학2 - 심화특강01	22	수학2 (함수의극한)	수학2 - CP09 수학2 - 심화특강15, 16
8	적분과 통계 (경우의 수)	적분과 통계 - CP06, 07 적분과 통계 - 심화특강12	23	기하와 벡터 (일차변환)	기하와 벡터 - CP09
9	기하와 벡터 (이차곡선)	기하와 벡터 - CP01, 03 기하와 벡터 - 심화특강04	24	수학1 (수열)	●
10	수학1 (지로함수)	●	25	적분과 통계 (확률)	적분과 통계 - CP09, 10
11	기하와 벡터 (벡터)	기하와 벡터 - CP07 기하와 벡터 - 심화특강12	26	기하와 벡터 (이차곡선)	기하와 벡터 - CP02, 03 기하와 벡터 - 심화특강04
12	적분과 통계 (통계)	적분과 통계 - CP14 적분과 통계 - 심화특강15	27	수학2 (미분법)	수학2 - CP11, 13 수학2 - 심화특강33
13	수학1 (지로함수)	●	28	기하와 벡터 (벡터)	기하와 벡터 - CP06 기하와 벡터 - 심화특강11
14	적분과 통계 (적분법)	적분과 통계 - CP02, 03 적분과 통계 - 심화특강02	29	수학2 (함수의극한)	수학2 - CP07, 09 수학2 - 심화특강15, 16
15	기하와 벡터 (벡터)	기하와 벡터 - CP04, 06 기하와 벡터 - 심화특강11	30	적분과 통계 (적분법)	적분과 통계 - CP03 적분과 통계 - 심화특강08

3

수학2 - CP05

CP 05 삼각함수의 공식을 적절히 활용하라. (주로 각, 함수의 통일)

[수능적 해법]

$f(x)=\sqrt{7}\sin x-3\cos x=4\sin(x+\alpha)$ (단, $\tan\alpha=-\dfrac{3}{\sqrt{7}}$)

따라서 최댓값은 4

[정답] ④

4

수학2 - CP04
수학2 - 심화특강07

CP 04 분수부등식은 통분한 후, 분모의 제곱을 곱하는 등 동치변형을 하라.

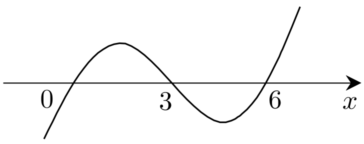
심특01 무연근과 동치전개
심특07 분수함수와 합성 자기장

[수능적 해법]

주어진 부등식을 통분하고 동치변형하자

$\dfrac{2(x-3)}{x(x-6)}\le 0$ ⋯ 1) $\Leftrightarrow$ $x(x-3)(x-6)\le 0$ (단, $x\ne 0,\ 6$)

이므로 $x=0,\ 3,\ 6$에서의 부호변화를 생각하며 그래프를 그려보면 다음과 같다.



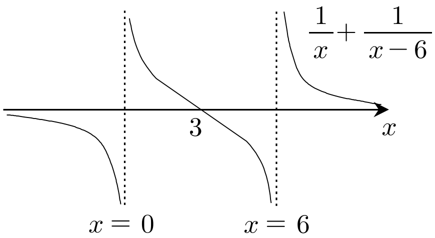
따라서 만족하는 양의 정수 x는 $3,\ 4,\ 5$이므로 3개다.

[스피드 해법 1]

심화특강01이 숙달되어 있다면 1)에서 동치변형을 하지 않고 부호변화를 생각하며 바로 그래프를 그릴 수 있다.

[스피드 해법 2]

함수 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-6}$의 그래프를 그리면 다음과 같다.[1] 따라서 $x=3,\ 4,\ 5$



[정답] ③

1) 심화특강07에 따르면 1:1 내분점이 곧 실근이다.

5

수학2 - CP05
수학2 - 심화특강12

CP 05	삼각함수의 공식을 적절히 활용하라. (주로 각, 함수의 통일)

심특12	삼각함수의 좌표해석

[수능적 해법 1]

사인배각 공식으로 각을 통일하자.

$2\sin x\cos x - \sin x = 4\cos x - 2$, $(2\cos x - 1)(\sin x - 2) = 0$,

$2\cos x - 1 = 0$ $(\because \sin x - 2 \neq 0)$, $\cos x = \frac{1}{2}$에서 그래프를 그려보면 두 실근은 $x = \pi$에 대하여 대칭이므로 실근의 합은 2π이다.

[수능적 해법 2]

$\cos x = \frac{1}{2}$에서 단위원 $x^2 + y^2 = 1$과 $x = \frac{1}{2}$의 교점을 찾아도 $x = \pi$에 대하여 대칭임을 쉽게 알 수 있다. 즉, 실근의 합은 2π

[정답] ③

6

적분과 통계 - CP09, 11

CP 09	경우의 수와 확률을 동일선상에서 생각하라.
CP 11	독립시행의 확률은 (경우의 수)×(확률)로 구하라.

[수능적 해법]

3의 배수가 총 6번 나오는 경우의 수를 다 나열해보면 다음과 같다.

A	A	A	A	B	B	B
×	○	○	○	○	○	○
○	×	○	○	○	○	○
○	○	×	○	○	○	○
○	○	○	×	○	○	○
○	○	○	○	×	○	○
○	○	○	○	○	×	○
○	○	○	○	○	○	×

그런데, 각각의 경우에 대한 확률은 모두 $\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)$이므로

(구하는 확률)$=\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)\times 7 = \frac{14}{3^7}$

[정답] ⑤

7

수학2 - CP02
수학2 - 심화특강01

CP 02 무리방정식은 적절히 이항, 치환하여 제곱한 후 무연근을 제외하라.

심특01 무연근과 동치전개

[수능적 해법]

$f(x)-9=\sqrt{f(x)-3} \Leftrightarrow \{f(x)\}^2-18f(x)+81=f(x)-3 \ (f(x)\geq 9) \cdots$[1]

$\Leftrightarrow \{f(x)\}^2-19f(x)+84=0 \ (f(x)\geq 9)$

$\Leftrightarrow (f(x)-12)(f(x)-7)=0 \ (f(x)\geq 9) \Leftrightarrow f(x)=12 \ \cdots$[2]

주어진 그래프에서 직선 $y=12$과의 교점을 찾아보면 3개임을 알 수 있다.

[정답] ①

8

적분과 통계 - CP06, 07
적분과 통계 - 심화특강12

CP 06 수형도를 빨리 세는 도구인 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하라.
CP 07 몇 개를 몇 개로 볼 것인지 생각해서 나누고, 곱하여라.

심특12 이항계수와 중복조합

[수능적 해법 1]

0이상의 정수로 만들기 위해 양변에 3을 더하자.

$(x+1)+(y+1)+(z+1)=7$에서 ${}_3\mathrm{H}_7={}_9\mathrm{C}_7=\dfrac{9\times 8}{2}=36$

[수능적 해법 2][3]

자연수 해로 만들기 위해 양변에 6을 더하자.

$(x+2)+(y+2)+(z+2)=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$

10개의 1을 가르고 있는 칸막이(덧셈) 9개 중에서 2개를 골라 3그룹으로 나누면 된다. 따라서 ${}_9\mathrm{C}_2=36$

[정답] ③

9

기하와 벡터 - CP01, 03
기하와 벡터 - 심화특강04

CP 01 이차곡선의 정의를 확인할 수 있도록 그림을 그려라.
CP 03 이차곡선의 방정식과 평면기하를 활용하라.

심특04 평면기하와 이차곡선의 활용

[수능적 해법]

타원의 정의에 의하여 $b^2+c^2=a^2$, 직각삼각형 BOF에서 $a=2c$

따라서 대입하면 $b^2=3c^2$, $b=\sqrt{3}\,c$이다.

(삼각형 AFB의 넓이)$=\dfrac{1}{2}(c+2c)\sqrt{3}\,c=6\sqrt{3}$이므로

$c=2$, $a=4$, $b=2\sqrt{3}$임을 알 수 있다. 즉, $a^2+b^2=16+12=28$

[정답] ④

1) 심화특강01에서 배운 동치전개를 하는 방법이다. 평소에 동치전개를 하면서 동시에 무연근 제거 까지 해준다면 실수할 확률을 극도로 낮출 수 있다.

2) $f(x)\geq 9$에서 $f(x)=7$이 무연근임을 알 수 있다. 또한 $f(x)=7$을 주어진 무리방정식에 대입해서 확인해도 마찬가지이다. 무연근을 확인하는 두 가지 필터링을 준비해두면 시험장에서 실수하지 않을 것이다.

3) 중복조합을 유도하는 과정에 해당한다.

11

기하와 벡터 - CP07
기하와 벡터 - 심화특강12

CP 07 벡터의 합을 세 가지 방법으로 분석하라.

심특12 다양한 좌표계와 그 활용

[수능적 해법 1]

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AF}$

따라서 $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}$이므로 $2\overline{BD}=2$, $\overline{BC}=3$을 각 변으로 하는 평행사변형의 대각선의 길이가 곧 $|\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}|$임을 알 수 있다.

코사인 법칙을 활용하면 $x^2=3^2+2^2-2(2)(3)\cos\frac{2}{3}\pi=9+4+6=19$

[수능적 해법 2]

선분 DE의 중점을 M, 선분 EF의 중점을 N이라 하면

$|\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}|=2|\overrightarrow{MN}|$이므로 $4|\overrightarrow{MN}|^2$을 구하면 된다.

코사인 법칙을 활용하면 $|\overrightarrow{MN}|^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-(2)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cos\frac{\pi}{3}=\frac{19}{4}$

에서 $4|\overrightarrow{MN}|^2=19$

[수능적 해법 3]

주어진 정삼각형을 좌표평면에 올린 후, 각 점의 좌표를 모두 찾아서 대입해도 된다. 이 풀이는 각자 해보길 바란다.[1)]

[정답] ③

12

적분과 통계 - CP14
적분과 통계 - 심화특강15

CP 14 표본평균의 분포와 표본비율의 분포를 활용한 통계적 추정

심특15 정규분포와 통계적 추정

[수능적 해법]

모비율의 추정 공식 $\left[\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\ ,\ \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$에 대입하면

$1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=1.96\sqrt{\frac{\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)}{100}}=1.96\left(\frac{3}{100}\right)=0.0588$임을 알 수 있다.

[정답] ②

1) 수능 시험장에서 좌표를 올리면 시간이 오래 걸린다고 생각할 수 있지만 일단은 어떻게든 풀어내서 맞추는 것을 목표로 해야 한다. 좌표는 수학적으로 논리적인 훌륭한 풀이임을 명심하자.

분석 및 해제

14

적분과 통계 - CP02, 03
적분과 통계 - 심화특강02

CP 02	넓이, 부피(회전체), 길이의 정적분을 논리적으로 써내라.
CP 03	적분의 계산방법을 정확하게 적용하라.

심특02	부분적분

[수능적 해법]
정사각형 넓이에서 정사각형과 $y=\log_2 x$로 둘러싸인 영역의 넓이의 2배를 빼면 된다.

$$(2^3)^2-2\int_1^{2^3}\log_2 x\,dx=64-\frac{2}{\ln 2}\int_1^8 \ln x\,dx=64-\frac{2}{\ln 2}\Big[x\ln x-x\Big]_1^8$$

$$=64-\frac{2}{\ln 2}(24\ln 2-7)=16+\frac{14}{\ln 2}$$

[정답] ②

15

기하와 벡터 - CP04, 06
기하와 벡터 - 심화특강11

CP 04	공간도형을 평면도형으로 옮겨서 생각하라.
CP 06	좌표평면의 성질과 공식을 그대로 좌표공간에 적용하라.

심특11	직선, 평면과 공간기하

[수능적 해법]
$(1,\,2,\,1)$과 $(-3,\,-a,\,-b)$그리고 접점인 원점 $(0,\,0,\,0)$이 동일직선 상에 있어야 한다. 따라서 $(t,\,2t,\,t)=(-3,\,-a,\,-b)$에서 $t=-3$이므로 $a=6$, $b=3$임을 알 수 있다. $6+3=9$

[정답] ④

19

기하와 벡터 - CP04
기하와 벡터 - 심화특강08

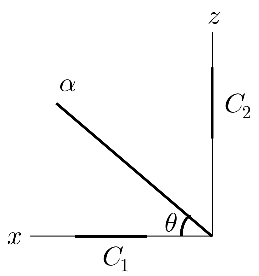
CP 04	공간도형을 평면도형으로 옮겨서 생각하라.

심특08	그림자의 본질과 해석기하

[수능적 해법]
주어진 상황을 xz평면으로 자른 단면을 보면 오른쪽 그림과 같다.
평면 α와 xy평면이 이루는 각을 θ라 하면 그림에서
원 C_1을 정사영시킨 넓이는 $3\pi\cos\theta$ 원 C_2를 정사영시킨 넓이는 $\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$임을 알 수 있다. 따라서

$3\pi\cos\theta=\pi\sin\theta$에서 $\tan\theta=3$이므로 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$

즉, 구하는 넓이는 $3\pi\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\frac{3\sqrt{10}}{10}\pi$



[정답] ⑤

20

적분과 통계 - CP13
적분과 통계 - 심화특강15

CP 13 이항분포와 정규분포를 명확하게 이해하라.

심특15 정규분포와 통계적 추정

[수능적 해법]

$$G(t)=\mathrm{P}\left(X \le \frac{3}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z \le \frac{\frac{3}{2}-t}{\frac{1}{t^2}}\right)=\mathrm{P}\left(Z \le t^2\left(\frac{3}{2}-t\right)\right)$$

이므로 $f(t)=t^2\left(\frac{3}{2}-t\right)$이 최대를 가질 때, $G(t)$또한 최대가 된다.

$f'(t)=2t\left(\frac{3}{2}-t\right)-t^2=0$ 이므로 $t=1$에서 최댓값을 가지는 것을 알 수 있다.

$G(1)=\mathrm{P}\left(t \le \frac{1}{2}\right)=0.5+0.1915=0.6915$

[정답] ③

21

수학2 - CP11
수학2 - 심화특강30

CP 11 초월함수의 그래프의 개형은 기본연산과 미분을 활용하라.

심특30 최대, 최소 문제의 해법

[수능적 해법]

최솟값인 순간을 체크하기 위해서는 도함수를 구해야 한다. 주어진 함수의 도함수를 찾기 위해 매개변수의 미분법을 활용하자.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{(4t+n)e^t+\left(2t^2+nt+n\right)e^t}{e^t}=2t^2+(n+4)t+2n$$

$=(2t+n)(t+2)$ … [1]

따라서 도함수의 그래프는 이차함수이므로 두 가지 경우로 나누어 풀어야 한다.

(a) $-\frac{n}{2} \geqq -2$일 때에는 $t=-\frac{n}{2}$에서 최솟값을 가진다.

즉 정리하면 $n \leqq 4$일 때에는 $x=e^{-\frac{n}{2}}$에서 최솟값

$y=\left\{2\left(-\frac{n}{2}\right)^2+n\left(-\frac{n}{2}\right)+n\right\}e^{-\frac{n}{2}}=ne^{-\frac{n}{2}}$을 가진다.

1) $y=\left(2t^2+nt+n\right)e^t$이고 $x=e^t$에서 e^t는 증가함수 이므로 단순히 판단해도 논리적으로 하자가 없다.

(b) $-\frac{n}{2}<-2$일 때에는 $t=-2$에서 최솟값을 가진다. 정리하면

$n>4$일 때에는 $x=e^{-2}$에서 최솟값 $y=(8-n)e^{-2}$을 가진다.

(a), (b)에서

$\frac{b_n}{a_n}=\begin{cases}(n \leqq 4) & n \\ (n \geqq 5) & 8-n\end{cases}$ 임을 알 수 있다.

따라서 $\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}+\frac{b_5}{a_5}+\frac{b_6}{a_6}=3+4+(8-5)+(8-6)=12$

[정답] ②

22

수학2 - CP09
수학2 - 심화특강15, 16

CP 09	모두 수렴하는 형태로 표현하여 극한의 성질을 적용하라.

심특15	0으로 가는 속도와 근사
심특16	0/0꼴의 극한

[수능적 해법]

$$\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\ln(1+3x)}{3x}\right)\left(\frac{3x}{2x}\right)+\left(\frac{9}{2}\right)\right\}=(1)\left(\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{9}{2}\right)=6$$

[정답] 6

23

기하와 벡터 - CP09

CP 09	일차변환 행렬과 기하적 의미를 상호적으로 해석하라.

[수능적 해법]

f를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} a & b \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$이고 g를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이다. 따라서

$\begin{pmatrix} a & b \\ 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b & -a \\ -5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ a & b \end{pmatrix}$

이므로 $a=-5$, $b=-4$, $\quad ab=(-5)(-4)=20$

[정답] 20

25

적분과 통계 - CP09, 10

CP 09	경우의 수와 확률을 동일선상에서 생각하라.
CP 10	조건부확률은 “~일 때” 의 확률을 먼저 구하라.

[수능적 해법]

$a+b=60$이고 주어진 조건에서 $\frac{50}{50+b}=\frac{2}{3}$에서 $b=25$ 즉, $a=35$

[정답] 10

26

기하와 벡터 - CP02, 03
기하와 벡터 - 심화특강04

CP 02	이차곡선의 접선문제는 세 가지 유형에 대한 공식을 활용하라.
CP 03	이차곡선의 방정식과 평면기하를 활용하라.

심특04	평면기하와 이차곡선의 활용

[수능적 해법]

$(4,\ k)$에서의 접선은 $\frac{4x}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1$이다. $y=0$을 대입하면 x절편은 $\frac{a^2}{4}$임을 알 수 있다. 그런데 x절편은 곧 선분$\mathrm{F'F}$의 $2:1$내분점이므로 1임을 알 수 있다.

따라서 $\frac{a^2}{4}=1$에서 $a^2=4$, 그런데 쌍곡선의 정의에서 $a^2+b^2=3^2=9$이므로

$b^2=5$이다. 즉, 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$, $\mathrm{P}(4,\ k)$를 대입하면

$k^2=15$임을 알 수 있다.

[정답] 15

27

수학2 - CP11, 13
수학2 - 심화특강33

CP 11	초월함수의 그래프의 개형은 기본연산과 미분을 활용하라.
CP 13	미분가능의 정의에 따라 미분가능성을 확인하라.

심특33	역함수와 미분법

[수능적 해법]

$\lim_{h\to0}\frac{4g(8h)-\pi}{h}=\lim_{h\to0}\frac{4g(8h)-4g(0)}{h-0}=32g'(0)$ 이다. $\cdots$ 1)

$f(g(x))=x$의 양변을 미분하면 $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$이므로

$g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}$, 따라서 $32\left(\frac{1}{2}\right)=16$

[스피드 해법]

1)에서 로피탈의 정리를 활용하면 $\lim_{h\to0}\frac{4g(8h)-\pi}{h}=\lim_{h\to0}\frac{32g'(8h)}{1}=32g'(0)$

나머지 풀이는 위와 같다.

[정답] 16

분석 및 해제

28

기하와 벡터 - CP06
기하와 벡터 - 심화특강11

CP 06 좌표평면의 성질과 공식을 그대로 좌표공간에 적용하라.

심특11 직선, 평면과 공간기하

[수능적 해법]

직선의 방향벡터 $(1,\ 2,\ -1)$과 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ -a,\ 1-a)$는 서로 수직이다.[1)]

따라서 내적이 0이 된다. 즉, $2-2a+a-1=0$에서 $a=1$

즉, 점 B는 $(-1,\ 1,\ 1)$이다. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}=\overline{\mathrm{AC}}$가 되어야 한다.

따라서 점 $\mathrm{C}\,(t+1,\ 2t,\ 1-t)$에서 점 A까지의 거리가 $\sqrt{5}$가 되어야 하므로

$\sqrt{t^2+4t^2+t^2}=\sqrt{5}$에서 $t^2=\dfrac{5}{6}$이다. 원점에서 점 C 까지의 거리는

$\sqrt{(t+1)^2+(2t)^2+(1-t)^2}=\sqrt{6t^2+2}=\sqrt{5+2}=\sqrt{7}$

이므로 $(\sqrt{7})^2=7$

[정답] 7

1) 평면의 방정식을 구해서 $(-1,\ a,\ a)$를 대입하는 풀이도 훌륭하다.

29

수학2 - CP07, 09
수학2 - 심화특강15, 16, 19

CP 07 도형의 성질, 사인정리를 활용하여 식을 세워 극한값을 계산하라.
CP 09 모두 수렴하는 형태로 표현하여 극한의 성질을 적용하라.

심특15 0으로 가는 속도와 근사
심특16 0/0꼴의 극한
심특19 직관적 극한의 논리적 서술법

[수능적 해법]

$\overline{\mathrm{BC}}=\sin\theta$이고 선분 CD는 사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AC}}\times\frac{\sin 2\theta}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2\theta\right)}=\cos\theta\times\frac{\sin 2\theta}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2\theta\right)}$$ 이다.

그런데 $\angle\mathrm{BCD}=\dfrac{5}{6}\pi$이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}(\sin\theta)\left(\frac{\sin 2\theta}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2\theta\right)}\right)\sin\frac{5}{6}\pi=\frac{\sin\theta\sin 2\theta}{4\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2\theta\right)}$$ 이다.

$$\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2\theta\right)}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)(1)(1)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

에서 $300\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=100$

[스피드 해법]

$\theta \to 0$일 때, 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$가 되어가므로 $\overline{BC} = \theta$

또한 삼각형 ACD에서 점 C에서 직선 AD에 내린 수선의 발 H를 생각해보면

$\angle HCD = \dfrac{\pi}{6}$로 가까워져 간다. 따라서 $\overline{CD} = (1)(2\theta)\left(\sec\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{4}{\sqrt{3}}\theta$

즉, 삼각형 BCD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}(\theta)\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}\theta\right)\sin\dfrac{5}{6}\pi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\theta^2$

이므로 극한값은 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다. $300\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 100$

[정답] 100

30

적분과 통계 - CP03
적분과 통계 - 심화특강08

CP 03 **적분의 계산방법을 정확하게 적용하라.**

심특08 **치환적분**

[수능적 해법]

주어진 조건 $\int_1^{e^2} g(x)dx = 6e^2 + 4$를 이용하기 위해 주어진 함수에 $e^x = t$를 대입하자. (편의상 대입한 후 t를 x로 다시 대입하자.)

$$g(x) = \begin{cases} f(\ln x) & (1 \le x < e) \\ g\left(\dfrac{x}{e}\right) + 5 & (e \le x \le e^2) \end{cases}$$

$$\int_1^{e^2} g(x)dx = \int_1^e g(x)dx + \int_e^{e^2} g(x)dx = \int_1^e f(\ln x)dx + \int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right) + 5\right\}dx$$

$$= \int_1^e f(\ln x)dx + \int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right) + 5\right\}dx = \int_1^e f(\ln x)dx + e\int_1^e \{g(x) + 5\}dx$$

$$= \int_1^e f(\ln x)dx + e\int_1^e \{f(\ln x) + 5\}dx = (1+e)\int_1^e f(\ln x)dx + 5e(e-1)$$

$= 6e^2 + 4$에서 $(1+e)\int_1^e f(\ln x)dx = e^2 + 5e + 4$이다.

$\int_1^e f(\ln x)dx = e + 4$, 따라서 $a^2 + b^2 = 1^2 + 4^2 = 17$

[정답] 17

1) 많은 사람들이 치환적분에 대해 가볍게 생각하는데, "구간의 변경"이 일어나면 치환적분을 반드시 고려해봐야 한다.