논술 지도의 원리와 실제 II

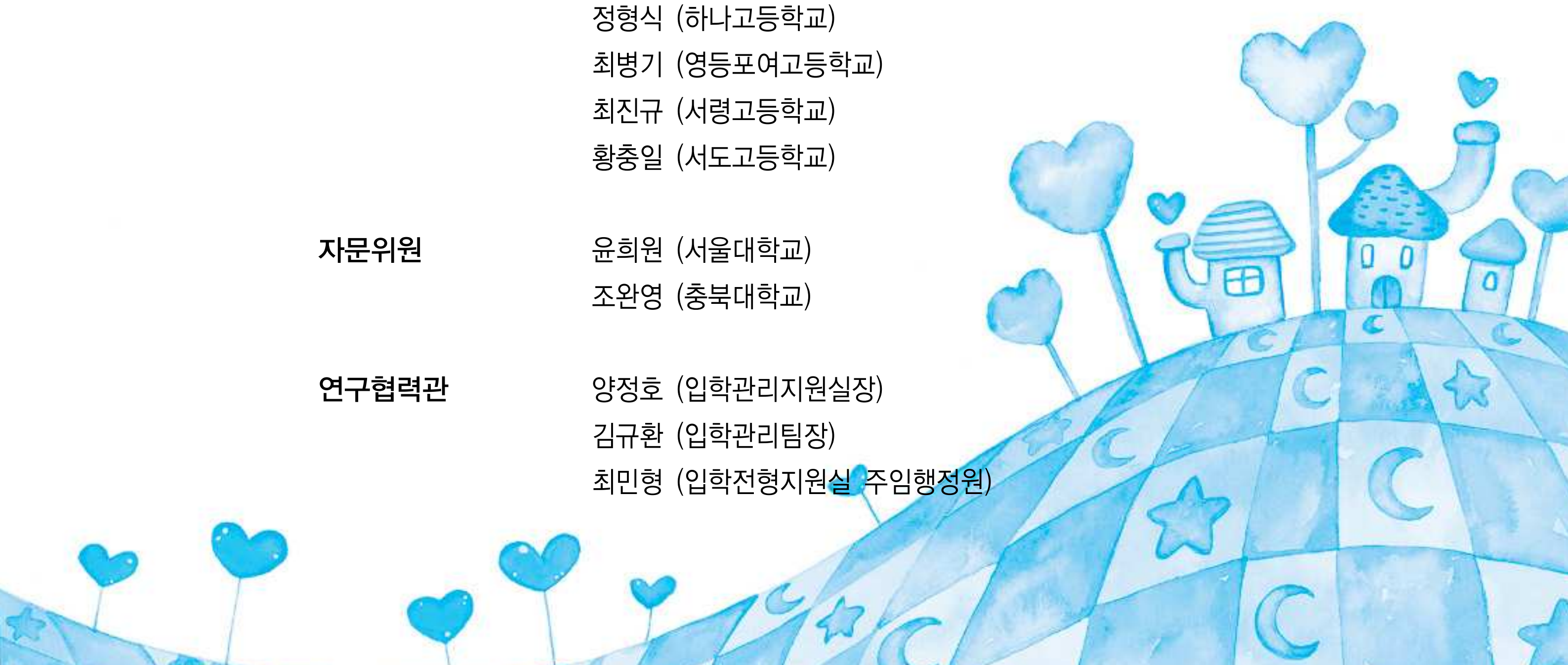
자연계(수리)

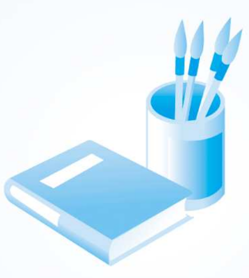
한국대학교육협의회 논술연구회

연구위원
강영기 (남주고등학교)
김평원 (마포고등학교)
김흥규 (광신고등학교)
서정인 (서울고등학교)
이명수 (대광고등학교)
이효근 (하나고등학교)
정형식 (하나고등학교)
최병기 (영등포여고등학교)
최진규 (서령고등학교)
황충일 (서도고등학교)

자문위원
윤희원 (서울대학교)
조완영 (충북대학교)

연구협력관
양정호 (입학관리지원실장)
김규환 (입학관리팀장)
최민형 (입학전형지원실 주임행정원)





논술 지도의 원리와 실제Ⅱ를 내면서…

대학 입학 전형의 한 부분으로서 꾸준하게 명맥을 유지해 온 논술 고사가 2008년을 기점으로 통합교과논술로 발전함에 따라 논술은 다양한 교과에서 활용할 수 있는 교수-학습 방법론으로 변화하고 있습니다. 이제는 '인문논술', '수리논술', '과학논술'이라는 용어가 자연스럽게 자리 잡을 정도로, 이제 논술은 교과 학습을 통해 터득한 지식을 토대로 주어진 문제를 해결하는 방식의 고차원적인 평가 도구로 발전하고 있습니다.

이처럼 논술이 하나의 교수-학습 방법론으로 변화하고 있지만 여전히 학생들은 무엇을 공부해야할 지 막연하다고 하소연하고 있습니다. 교사들도 많이 읽고, 많이 써보고, 많이 고쳐보라는 수준 이상의 구체적인 프로그램을 요구하고 있습니다.

고교와 대학 간의 상호 협력을 지향하는 한국대학교육협의회 논술연구회에서는 공교육이 주도하는 논술교육만이 논술을 둘러싼 문제들을 해결할 수 있다는 신념하에 각 대학교에서 제공한 분석 자료를 토대로 이에 대한 대비책을 상세하게 제시한 〈논술길라잡이〉를 해마다 발간하였고, 〈논술 지도의 원리와 실제〉를 통해 대학이 요구하는 방향에 맞게 학생의 실력을 키워줄 수 있는 교육 프로그램을 제시한 바 있습니다.

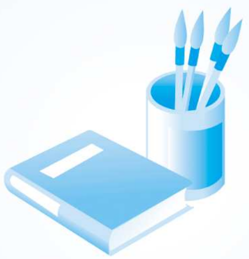
논술 작성의 원리와 방법을 방법적 지식이라 한다면, 그동안 학생들은 다양한 교재를 통해 논술과 관련된 방법적 지식을 익혀왔습니다. 하지만 이러한 방법적 지식과 실제 논술 능력과는 차이가 있습니다. 원칙적으로 논술의 원리를 모르면 잘 쓸 수도 없지만 학생들의 고민은 몰라서 못쓰는 것이 아니라 무엇이 좋은 답안인 줄 알면서도 안 써진다는 데 있습니다.

논술이 사고력 평가를 지향한다면 교육 역시 학생이 생산한 논술 답안이 아니라 그러한 답안을 생산하는 사고 과정에 중심을 두어야 합니다. 〈논술 지도의 원리와 실제 II〉는 이처럼 논술 문제를 해결하는 사고 과정을 단계적으로 교재화한 수업용 자료로서 각 학교의 상황에 맞게 재구성해서 논술 프로그램을 운영할 수 있도록 '인문논술', '수리논술', '과학논술'로 구분하여 제작한 것이 특징입니다.

앞으로 한국대학교육협의회의 〈논술길라잡이〉, 〈논술 지도의 원리와 실제〉 시리즈는 논술 문제를 출제한 대학과 고교 논술 지도 교사들이 함께 모여 만든 공신력 있는 안내서로 거듭날 것입니다. 이 책을 통해 논술 지도교사와 학생 모두 통합교과논술 교육의 의의에 공감하고, 사고력과 문제 해결 능력을 함양할 수 있기를 바랍니다.

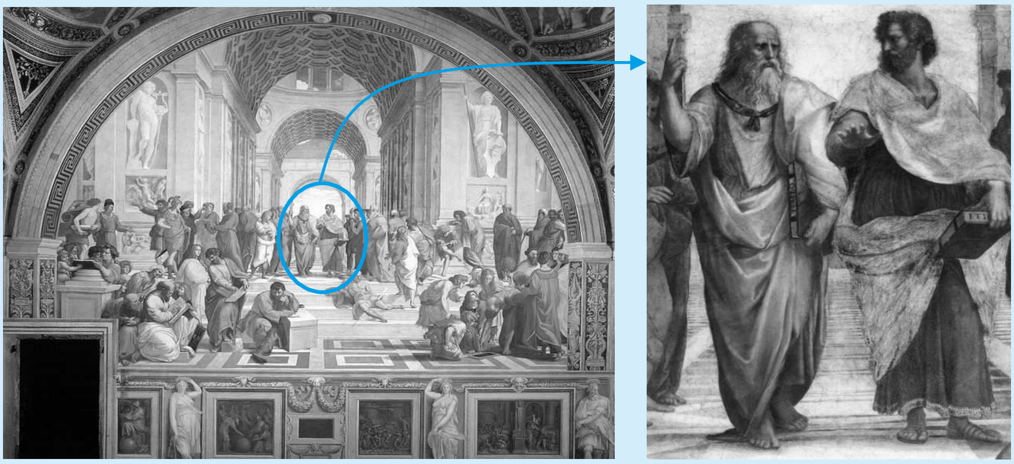
2010. 3

한국대학교육협의회 논술연구회



수리논술분야 Tip

수리논술은 수리적 사고와 논리적 서술이 결합된 말이다. 수리적 사고에서 수학을, 논리적 서술에서 글쓰기를 떠올린다면 수리논술은 수학적 글쓰기인 셈이다. 수학이 보편적인 사실을 다룬다는 점에서 수학적 사고를 논술이란 형식 속에 펼치는 것이다. 따라서 수학적 사실을 바탕으로 수학적 사고를 전개하는 것이 중요하다.



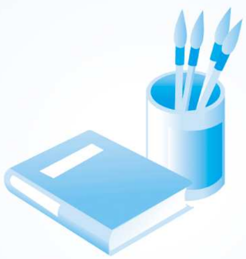
아테네 학당의 아리스토텔레스와 플라톤

수리논술의 이상은 순수한 의미의 미래를 준비하는 교육에 있고, 수리논술의 현실은 입시를 준비하는 교육에 있다.

이 책에서는 수리논술고사에서 제시문과 논제 해결을 위해 제 1, 2부로 나누어 각각 30강(수리논술의 이해 5강, 수리논술의 기본 15강, 수리논술의 응용 10강)씩 총 60강으로 구성되어 있다.

✿ 미래를 위해 수리논술을 준비하는 학생을 위한 조언

- 제시문과 논제를 잘 읽어라.
- 수학의 의미를 발견하라.
- 수학을 관찰하라.
- 수학적 원리를 추측하고 수학적으로 정당화하라.
- 수학적 글쓰기의 기본은 삼단논법이다.
- 수식을 적절히 활용하여 사고하라.
- 수학사 속의 수학적 발견을 음미해보라.



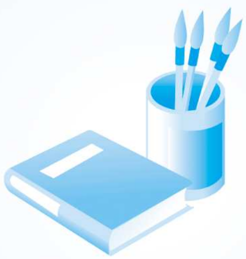
목 차

논술 지도의 원리와 실제 II | 자연계(수리)

Contents

Contents

Contents



I

고 1·2·3 수준+Upgrade

[내용안내]

[학습지도 계획 자료]

1. 수리논술의 이해
2. 수리논술의 기본
3. 수리논술의 응용

[내용안내]

1강당 50분을 기분으로 총 30강으로 구성되어 있다.

☐ 수리논술의 이해 : 5강 (제1강에서 제5강까지)
☐ 수리논술의 기본 : 15강 (제6강에서 제20강까지)
☐ 수리논술의 응용 : 10강 (제21강에서 제30강까지)

수리논술에서 내용은 수리(수학)이고, 형식은 논술이다.

[학습지도 계획 자료]

차시	분류	내용	비고
1	수리논술의 이해	항등원과 역원	2007 서울여대 예시문제
2		대칭의 활용	반사각, 입사각, 최단거리문제
3		실수와 복소수	2006 고려대 수시문제
4		경우의 수	2007 이화여대 수시문제
5		통합논술과 수학적 문제해결	2006 고려대 수시문제
6	수리논술의 기본	무한집합과 소수	2007 서강대 수시문제
7		비례식	2006 고려대 모의문제
8		비율의 활용	2007 고려대 수시문제
9		일차식과 부등식	2006 이화여대 모의문제
10		부등식의 비교	2005 이화여대 수시문제
11		반비례와 일차함수	2008 중앙대 수시문제
12		부등식의 영역	2006 중앙대 수시문제
13		원으로 평면 채우기	2006 이화여대 수시문제
14		두 점 사이의 거리	2007 한양대 수시문제
15		사인법칙	2006 서강대 수시문제
16		코사인법칙	2008 인하대 모의문제
17		코사인 법칙	2006 이화여대 모의문제
18		최적화	2007 고려대 수시문제
19		최적화	2007 이화여대 수시문제
20		최적화	2007 이화여대 모의문제
21	수리논술의 응용	최적화	2008 이화여대 수시문제
22		최적화	2006 고려대 수시문제
23		게임이론	2007 고려대 수시문제
24		컴퓨터 비트	2006 중앙대 수시문제
25		대푯값	2008 한양대 수시문제
26		단위원, 호의 길이, 수열	2009 연세대 수시문제
27		구면 삼각형	2009 경기대 모의문제
28		등주정리와 등적정리	2009 경희대 모의문제
29		원뿔곡선의 정의	2008 서울대 예시문제
30		무한집합과 일대일대응	2008 한양대 수시문제

Ⅰ 고 1·2·3 수준+Upgrade

1 수리논술의 이해

제1강 항등원과 역원 (2007 서울여자대학교 예시문제)

[읽기자료] 닫혀 있지 않다, 닫혀 있다, 결합법칙, 교환법칙, 항등원, 역원

연산(operation, 演算)이란 어떤 대상 또는 대상들이 주어졌을 때, 그 값을 어떤 것에 대응 시키는 것을 말한다. 집합 S, T에 대하여 곱집합 $S\times S$에서 T로의 함수 f를 생각하자. S의 임의의 두 원소 a, b에 대하여 연산 ◎가 $f:(a, b)\rightarrow c$ 이면 $a◎b=c$ 로 표기한다.

① T가 S의 부분집합이 아니면 집합 S는 연산 ◎에 대하여 닫혀있지 않다고 말하고 $T=S$이면 S는 연산 ◎에 대하여 닫혀있다고 말한다.

② S의 임의의 두 원소 a, b에 대하여
$a◎b = b◎a$가 성립하면 집합 S는 연산 ◎에 대하여 교환법칙을 만족한다고 한다.

③ S의 임의의 세 원소 a, b, c에 대하여
$a◎(b◎c) =(a◎b)◎c$가 성립하면 집합 S는 연산 ◎에 대하여 결합법칙을 만족한다고 한다.

④ S의 임의의 두 원소 a에 대하여
$a◎e =a$ 인 e가 S의 원소이면 e는 연산 ◎에 대한 S의 항등원이라 한다.

⑤ S의 임의의 한 원소 a에 대하여
$a◎x =e$ 인 x가 S의 원소이면 x는 연산 ◎에 대한 a의 역원이라 한다.

[논제 예] 2007 서울여대 수시 2

실수의 집합 R에서 두 실수 a, b에 대하여 연산 ✽을

$$a ✽ b = (a+1)(b+1)-1$$

로 정의할 때, 연산 에 대한 7의 역원을 구하여라.

[논제 분석] 연산 ✽에 대한 항등원을 먼저 구한 후 연산 ✽에 대한 7의 역원을 구한다.

학교		학년 반 번호		성명	

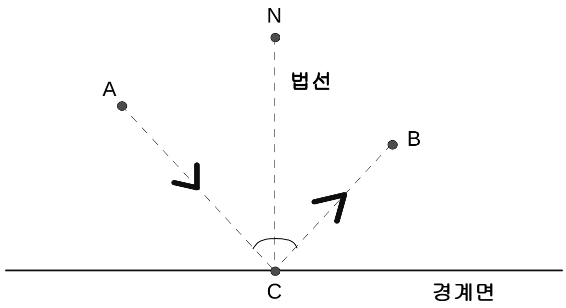
[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제2강 대칭의 활용 (반사각, 입사각, 최단거리문제)

인간이 만든 인공물이든 균형과 조화는 중요하다. 대상에 따라 상하의 균형, 좌우의 균형이 중요하다. 수학에선 기준선이나 기준점을 중심으로 '균형'이란 용어대신 '대칭'이란 용어를 사용한다. 수학에서 두 대상이 한 점이나 한 직선을 기준으로 같은 거리에 떨어져 있을 때 두 대상은 대칭이라고 말한다.

수리논술의 경우 제시문의 내용에서 수학적인 요소와 비수학적인 요소를 구별하여 수학적인 문제해결을 논술의 형식으로 서술해야 한다.

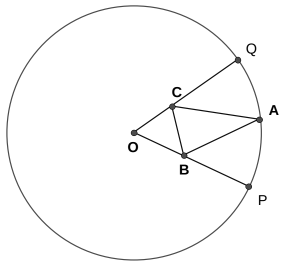
[제시문] 물체가 벽이나 바닥에 탄성 충돌한 경우 충돌 전 후의 속도의 크기는 변하지 않으며 방향만 바뀐다. 아래 그림과 같이 점 A에서 물체가 출발하여 점 C에서 충돌한 후 점 B로 움직였다고 하자. 이 때, 점 C에서 바닥과 수직인 직선, 즉 법선[1]과 직선 AC가 이루어진 각을 입사각이라 하고, 법선과 직선 CB가 이루어진 각을 반사각이라 한다. 이 때 입사각과 반사각은 같다.



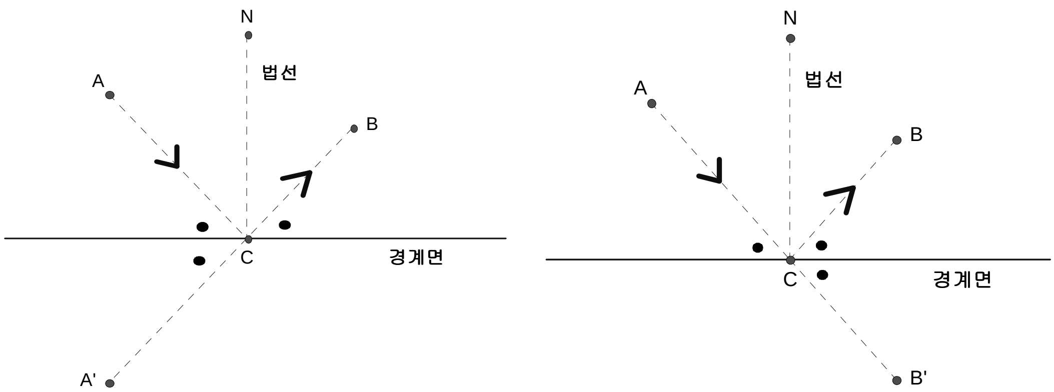
[논제 1] x축, y축 위를 움직이는 점 P, Q가 있다. 좌표평면 위의 두 점 $A(8, 2)$, $B(4, 3)$에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값을 구하시오.

[논제 2] 반지름의 길이가 10인 원 O에서 원 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\angle POQ=60°$이다. 호 PQ 위의 고정된 점 A, 선분 OP 위의 임의의 점 B, 선분 OQ 위의 임의의 점 C에 대하여 삼각형 ABC의 둘레 길이의 최솟값을 구하시오.

1) 영어로 normal line을 번역한 것인데 norm은 '규범'의 뜻을 갖는다는 면에서 법(法)과 유사한 역할을 한다. 결국 법선을 기준으로 입사각과 반사각이 표현되는 셈이다. ^.^



[제시문 내용에 대한 수학적 해석] 경계면 즉 수평선에 대해 점 A와 점 B를 각각 대칭시켜 보자. 이 때 그림에서 점(•)표시한 세 각으로 서로 같고 $\overline{AC}=\overline{A'C}$이고 $\overline{BC}=\overline{B'C}$이다. 이 사실을 이용하면 $\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{A'B}=\overline{AB'}$임을 알 수 있다. 점 A와 점 B가 고정점이고 점 C가 경계면 위의 임의의 점이라 놓으면 $\overline{AC}+\overline{CB}$ 의 최솟값은 $\overline{A'B}=\overline{AB'}$이 다. 보통 이런 결과는 최단거리 문제에 자주 활용된다.



[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 2 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제3강 실수와 복소수 (2006 고려대학교 수시문제)

[읽기자료] 실계수(實係數)의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 b^2-4ac의 부호에 따라 이차방정식의 근이 실수 또는 허수가 된다. 이런 관점에서 계수 a , b , c로 이루어진 식 b^2-4ac은 근을 판별하는 셈이므로 보통 이 식을 판별식(Discrimination)이라 하고 간단히 D로 나타낸다. $D \geq 0$ 이면 실수의 범위에서 이차방정식은 근(해)을 가지고, $D < 0$ 이면 이차방정식은 실수의 범위에서 실근(해)을 가지지 않는다.

예를 들어, 특수한 방정식 $x^2+1=0$ 을 만족하는 수 x 를 생각해 보자. x 의 제곱이 -1이 되어야 하는데 이것은 형식적으로 $\sqrt{-1}$ (또는 $-\sqrt{-1}$)로 표시되어야 하는 것으로, 이것은 실수가 아니다. 그래서 $i=\sqrt{-1}$ 인 새로운 수를 도입하여 이것을 허수단위(immaginary unit, 虛數單位)라고 한다. 또, 실수 a, b 와 허수단위 i 로서 $a+bi$ 인 형식으로 나타내지는 수를 복소수(complex number, 複素數)라고 한다. 이 때, 허수단위 i와 관련한 연산은 를 마치 문자와 같이 보고 계산하여 i^2 이 나타나면 그것을 -1로 바꾸면 된다는 규칙에 따라서 실시된다. $a+bi$에서, $b=0$ 일 때, 이것은 실수 a 와 동일한 것으로 보면 된다. 특히 $a+bi$ 에서 $a=0$ 일 때, 그것을 순허수(純虛數)라고 한다.

[예] 2006 고려대학교 수시문제

[제시문] 정수에서 나눗셈의 결과가 항상 정수인 것은 아니다. 따라서 나눗셈 연산을 가능하게 하기 위해서는 정수를 유리수로 확장해야 한다. 또한 밑변의 길이와 높이가 각각 유리수인 직각 삼각형에서 빗변의 길이가 항상 유리수인 것은 아니다. 따라서 유리수를 확장한 실수가 필요하게 된다.

[논제] 실수를 확장하는 관점에서 복소수는 왜 필요한지 설명하시오. 그리고 복소수의 성질 중에서 실수의 성질과 구별되는 것 세 가지를 찾아서 예를 들어 설명하시오.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제4강 경우의 수 (2007 이화여자대학교 수시문제)

[읽기자료] 경우의 수(number of cases)란, 1회의 시행으로 일어날 수 있는 사건의 가짓수를 말한다. 예를 들어 설명하면 아래와 같다.

- 1부터 6까지의 자연수가 각 면에 표기된 정육면체 모양의 주사위를 던지는 경우 그 결과들의 집합은 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$}이므로 1회의 시행에서 그 결과는 자연수로 된 눈 숫자 중 1가지가 나오게 되므로 경우의 수는 6이다.
- 윷을 한 번 던지는 경우 1회 시행의 결과는 도, 개, 걸, 윷, 모의 5가지 중 1가지가 나오게 되므로 경우의 수는 5이다.
- 가위 바위 보를 하는 경우 그 결과는 가위, 바위, 보의 3가지 중 1가지가 나오게 되므로 경우의 수는 3이다.
- 동전을 던지는 경우 그 결과는 앞면, 뒷면 2가지 중 하나가 나오므로 경우의 수는 2이다.

[적용 예 1] 2009학년도 6월 4일 평가원 모의고사문제

좌표평면 위의 점들의 집합 $S=\{(x, y) \mid x$와 y는 정수$\}$가 있다. 집합 S에 속하는 한 점에서 S에 속하는 다른 점으로 이동하는 '점프'는 다음과 같은 규칙을 만족시킨다.

점 P에서 한 번의 '점프'로 점 Q로 이동할 때, 선분 PQ의 길이는 1 또는 $\sqrt{2}$ 이다.

점 $A(-2, 0)$에서 점 $B(2, 0)$까지 4번만 '점프'하여 이동하는 경우의 수를 구하시오.(단, 이동하는 과정에서 지나는 점이 다르면 다른 경우이다.)[4점]

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

[적용 예 2] 2007 이화여대 수시논술

[논제] 시청 광장에 분수시계를 설치하려고 한다. 분수시계는 빨강, 노랑, 파랑, 초록, 보라의 5개 물줄기들로 구성되고, 오전 6시부터 오후 10시 직전까지 작동되도록 한다. 이 분수시계는 매 정시에 물줄기의 조합이 변함으로써 시간을 나타낸다. 항상 3개 이상의 물줄기가 나오고, 매 시간대를 표시하는 물줄기의 조합이 중복되지 않도록 분수시계를 설계하시오. 그리고 같은 조건에서 이 분수시계가 24시간 작동하도록 설계하는 것이 가능한지 논하시오.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제5강 통합논술고사와 수학적 문제해결 (2006 고려대학교 수시문제)

[읽기자료] 대학에서 이루어지는 공부는 일차적으로 전공뿐만 아니라 다양한 인문, 사회, 교양에 관한 서적을 읽는 것으로 시작된다. 우리들의 일상뿐만 아니라 학문의 세계에서도 문제를 구성하는 요인은 하나가 아니라 여러 가지 변수들이 함께 작용하기 마련이다. 따라서 다양한 변수들을 비판적으로 분석하고 이것을 바탕으로 자신의 해결책을 설득력 있게 구성하여 전달하는 노력이 필요하다. 이런 과정에서 서로의 권리를 존중하면서 조화롭게 소통하기위해서는 논증구성력과 문어적 의사소통능력이 필요하다. 이와 관련하여 통합논술고사에서 중시하는 항목은 대략 다음과 같다.

① 독해 ② 비판적 사고력 ③ 문제해결능력 ④ 논증구성력 ⑤ 의사소통능력

통합논술고사에서 수리적 문제해결능력은 논리적 사고력을 바탕으로 한다. 특히 자연계열의 논술은 수리적 접근, 즉 수식을 통해 논리를 전개하는 과정을 요구한다. 따라서 지식을 종합하여 문제해결의 방향을 찾았다고 해도 이를 수식을 통해 표현하지 못하면 문제 해결은 불가능하다. 통합논술은 대개 수험생이 제시문과 논제를 분석하고 종합하여 스스로 풀어야 할 문제를 수학적으로 해결하는 과정을 요구한다. 이는 자연계열통합논술에서 수리논술의 경우 단순히 답을 찾기 위한 기계적 수식의 나열이 아니라 주어진 정보를 분석하고 결합하여 수학적으로 문제를 해결하는 데 있어 수학적 논리로 전개하는 과정을 중요한 평가자료로 삼고 있다.

예를 들어, $x<0$ 일 때, $x+\frac{1}{x}$의 최댓값을 구하는 문제에서 다음과 같이 답안을 썼다고 하자.

$x=-1$일 때 $x+\frac{1}{x}$의 값은 최대이고 최댓값은 -2이다.

이 경우 왜 $x=-1$일 때, $x+\frac{1}{x}$의 값이 최대인지 설명이 없다. 그 이유를 설명하는 방식은 다양할 수 있다. 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하거나 함수의 그래프를 이용할 수 있다. 또, 방정식의 실근조건을 활용할 수도 있다. 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한 답안을 예시하면 다음과 같다.

[예시 답안] $x<0$ 이므로 $-x>0$ 이고 $-\frac{1}{x}>0$ 이다. 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

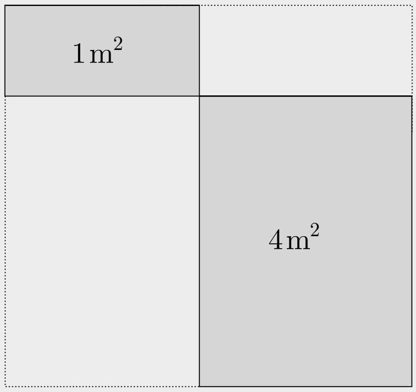
$(-x)+(-\frac{1}{x}) \geq 2\sqrt{(-x)(-\frac{1}{x})}$ (단, 등호는 $x=-1$일 때 성립)이므로 $x+\frac{1}{x}\leq -2$ 이다.

따라서 $x+\frac{1}{x}$의 최대값은 -2이다.

[적용 예] 2006 고려대 수시논술

다음 문제의 풀이의 타당성을 판단하고 문제점이 있으면 그것을 지적하고 올바르게 설명하시오.

아래 그림과 같이 두 개의 직사각형을 각각의 한 모서리에서 서로 붙였다. 그리고 각 직사각형에서 이 모서리와 만나지 않는 두 변의 연장선을 그린 후, 그림과 같이 큰 직사각형을 만들었다.



처음 두 직사각형의 넓이가 $1\,\mathrm{m}^2$과 $4\,\mathrm{m}^2$으로 일정하다고 가정할 때 큰 직사각형의 넓이의 최솟값을 구하는 문제를 다음과 같이 풀었다.

(풀이)

넓이가 $1\,\mathrm{m}^2$과 $4\,\mathrm{m}^2$인 두 직사각형의 가로의 길이를 각각 x와 y라 하자. 그러면 세로의 길이는 각각 $\frac{1}{x}$과 $\frac{4}{y}$이다. 이때 큰 직사각형의 가로의 길이는 $x+y$이고, 이 길이는 "산술평균이 기하평균보다 항상 크거나 같다"라는 정리를 사용하면 $2\sqrt{xy}$보다 크거나 같게 된다. 같은 방법으로 세로의 길이는 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$이므로 $2\sqrt{\frac{4}{xy}}$보다 크거나 같다. 따라서 큰 직사각형의 넓이는 $2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{\frac{4}{xy}}=8$보다 크거나 같다. 그러므로 큰 직사각형의 넓이의 최솟값은 $8\mathrm{m}^2$이다.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

2 수리논술의 기본

제6강 무한집합과 소수 (2007 서강대학교 수시문제)

고대 그리스인들은 어떤 숫자는 그보다 작은 숫자에 의해서 나뉠 수 있는 반면에 다른 숫자들은 이런 특성이 없다는 관찰을 했다. 자연수 중에서 1과 자신을 제외한 어떤 숫자로도 나뉠 수 없는 숫자를 소수(素數)라 부른다. 또한 소수가 아닌 자연수 중에서 1이 아닌 수를 합성수라 부른다. 언뜻 생각하기에는 소수와 합성수의 구분이 아무런 의미도 없는 것처럼 보인다. 그러나 소수는 매우 중요하다는 사실이 밝혀졌고, 수학자들이 소수에 대해서 더 많은 사실을 발견할수록 그 중요성은 더 높이 평가되고 있다. ⓐ소수가 그처럼 중요한 이유 중 하나는 자연수에서 소수가 하는 역할이 화학에서 원자의 역할과 같다는 것이다.

소수에 대한 분명한 물음은 이런 것이다. 도대체 얼마나 많은 소수가 있는 것일까? 유클리드는 그의 저서 『기하학 원론』에서 소수의 개수가 무한하다는 것을 증명했다. 그의 증명을 간략히 서술하면 아래와 같다.

“유한개만의 소수가 존재한다고 가정하자. 이 유한개의 소수들을 모두 곱한 값에 1을 더하면 그것 역시 소수이며, 처음에 가정한 유한한 소수 집합에 속하지 않는다. 그러므로 소수가 유한하다는 가정은 모순이 됨을 알 수 있다.”

어떤 자연수 N이 소수인지 여부를 검사하는 가장 확실한 방법은 소인수분해를 하는 것이다. ⓑ이를 위해서는 $\sqrt{N}$ 이하의 모든 소수들로 N을 나누어 보아야 한다. 이때 N이 실제로 소수일 때가 제일 큰 문제이다. 소인수분해를 사용하여 소수 여부를 검사하는 방법은 N이 아주 큰 수라면 최고 성능의 컴퓨터로 계산한다고 하더라도 매우 오랜 시간이 걸릴 수 있다. 그렇지만 수학자들은 소수의 패턴을 연구함으로써 여러 대안적 소수 검사 방법을 고안할 수 있었다. 실제로 현재의 대형 컴퓨터와 ARCLP와 같은 소수 검사 방법을 사용 하면 100자리에 이르는 소수 두 개를 쉽게 찾을 수 있다. 이 두 소수를 곱하면 200자리 수인 합성수 하나가 만들어진다. 다른 한편, 이 200자리 숫자가 매우 큰 두 개의 소수의 곱이라는 것을 알고 있고, 현재 가용한 가장 빠른 컴퓨터를 사용한다고 하더라도 이 정도 크기의 합성수를 소인수분해 하는 것은 실질적으로 불가능하다고 할 만큼 오랜 시간이 걸린다. 소수 검사가 가능한 수의 크기와 소인수분해가 가능한 수의 크기 사이에 있는 이 커다란 불균형을 이용하여 수학자들은 ‘공유 열쇠(public key)’ 암호체계를 고안했다.

[논제 1] 밑줄 친 ⓐ의 논리와 ⓑ의 근거에 대하여 각각 논술하라.

[논제 2] 소수의 개수가 무한하다는 유클리드의 증명을 부연하여 논술하라.

[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 2 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

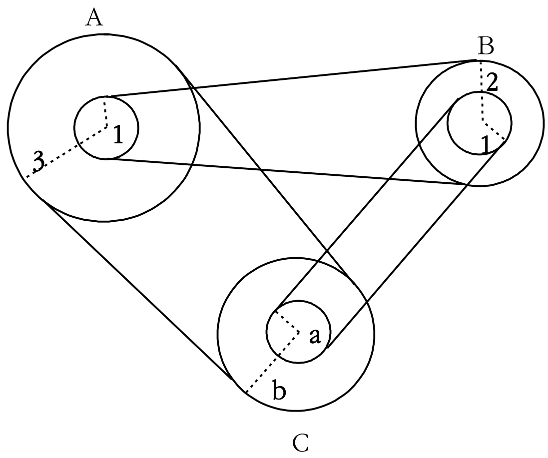
학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제7강 비례식 (2006 고려대학교 모의문제)

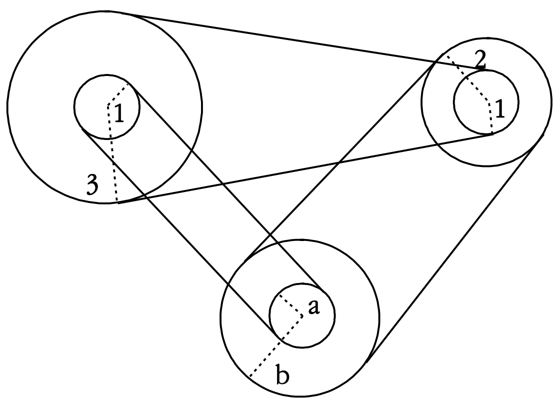
다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

세 개의 도르래가 벨트로 연결되어 있다. 각 도르래의 작은 바퀴와 큰 바퀴의 반지름은 $\mathrm{A}(1\mathrm{cm}, 3\mathrm{cm})$, $\mathrm{B}(1\mathrm{cm}, 2\mathrm{cm})$, $\mathrm{C}(a\mathrm{cm}, b\mathrm{cm})$이다.



[논제 1] 위의 그림과 같이 벨트로 연결되어 있을 때 벨트가 미끄러지지 않고 돌기 위한 a, b사이의 관계를 설명하시오.

[논제 2] 각 도르래에서 작은 바퀴와 큰 바퀴에 연결되어 있는 두 벨트를 그대로 유지하거나 서로 바꾸어서 벨트가 미끄러지지 않고 도는 여러 가지 경우를 관찰하였다. 이때 모든 가능한 $\frac{b}{a}$의 값을 계산하시오. 아래 그림은 가능한 한 가지 예를 나타낸다. (단, $a<b$이고 벨트를 꼬아서 거는 경우는 제외한다.)



[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 2 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제8강 비율의 활용 (2007 고려대학교 수시문제)

선진국에서 개발되는 신약들은 장기간의 연구와 천문학적인 비용의 투자를 필요로 하고 있다. 임상 실험의 마지막 단계는 비용의 효율적인 절감을 이유로 개발도상국 국민을 대상으로 진행되는 경우가 많은데 이때 위약(僞藥)의 투여나 국제 협약의 무시 등 비도덕적인 행위가 나타나기도 한다. 그러나 이렇게 개발된 신약이 개발도상국에서 판매될 때에는 선진국 수준의 비싼 가격으로 책정되기 때문에 정작 개발도상국 국민들은 실제적인 혜택을 거의 받지 못하고 있다. 세계무역기구의 무역 관련 지적 재산권 협정 제 31조는 국가 비상사태, 극도의 긴급 상황 또는 공공의 비상업적 사용을 전제로 특허권자의 동의 없이 특허 대상의 생산 및 사용을 허용하고 있다. 이 규정에 기초하여 개발도상국 정부 또는 정부의 승인을 받은 제삼자(제약 회사)는 특허에 의해 보호되는 신약을 특허권자의 동의 없이 생산 판매할 수 있다. 그래서 개발도상국에서는 강제 실시권을 발동하고 복제 약을 만들어 가난한 사람들이 혜택을 받을 수 있게 하기도 한다. 이때 개발도상국 정부는 자국에서 복제 약을 개발할 수 있는지의 여부와 예상 가격을 알아보고 다국적 기업과 다시 가격 협상을 한 다음에 강제실시권의 발동 여부를 결정할 수도 있다. 다음은 어느 개발도상국에서 전염병이 발생했을 때 그에 대한 대처 상황을 가정해 본 것이다. 전염병은 두 도시 A와 B의 도심에서 동시에 발생하여 모든 방향으로 일정한 속도로 확산되고 있다. A도시는 B도시에 비해 상대적으로 빈곤층이 많고 인구밀도가 높다. 한 다국적 제약 회사에서 개발한 신약을 이용하면 이 전염병 환자의 80%가 치료된다. 하지만 신약의 값이 비싸기 때문에 그 개발도상국에서는 강제 실시권을 발동하여 치료율은 30%로 낮지만 가격이 싼 복제 약을 공급하려고 한다. 이를 위해 A와 B도시 사람들의 신약과 복제 약 구매 가능성을 조사해서 다음의 결과를 얻었다.

〈자료 1〉 도시별 환자 집단의 구매력 현황

	신약을 살 수 있는 환자	어느 약도 살 수 없는 환자
A도시	10 %	10 %
B도시	50 %	0 %

* 구매력이 있는 경우 신약을 산다.

그런데 다국적 제약 회사는, 복제 약의 가격을 높게 책정하면 신약의 가격을 낮추겠다는 조건으로 협상을 제안하면서 협상안 수용 시 예상되는 상황에 대하여 다음의 자료를 제시하였다.

〈자료 2〉 도시별 환자 집단의 구매력 예상

	신약을 살 수 있는 환자	어느 약도 살 수 없는 환자
A도시	20 %	30 %
B도시	70 %	0 %

* 구매력이 있는 경우 신약을 산다.

[논제] 개발도상국 정부는 치료되는 환자 수를 기준으로 삼아 협상안 수용 여부를 결정하려고 한다. 정부가 결론을 내리는데 국민들을 설득 할 수 있는 유리한 선택에 대하여 논술하시오.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

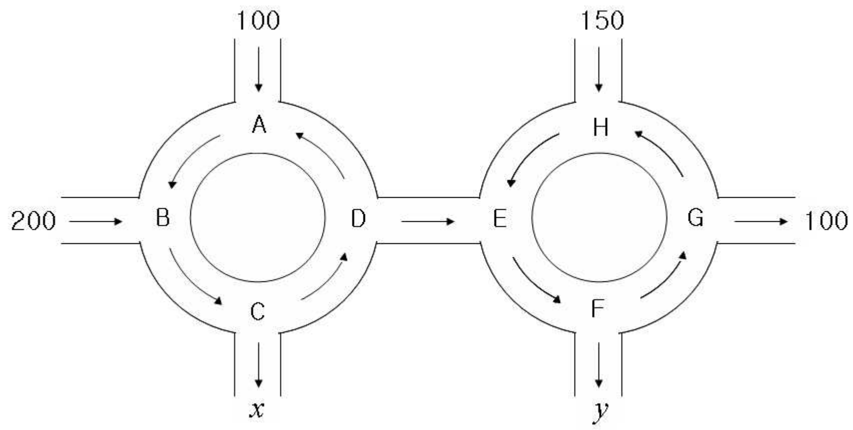
학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제9강 일차식과 부등식 (2006 이화여자대학교 모의문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

다음은 어느 신도시의 중심에 일방통행 도로들이 만나는 두 개의 로터리와 차량 통행 방향을 나타낸 그림이다. 그림 안의 숫자는 이 로터리들을 들어가고 나오는 차량들의 시간 당 평균 통과 차량수로 정의된 교통량을 표시한 것이다.



[논제 1] $x=15$일 때 교차로 D와 E 사이의 교통량을 결정하고, 그 이유를 설명하시오.

[논제 2] 교차로 C와 F에서 빠져나오는 교통량 x와 y사이의 관계식을 결정하고, y값의 범위에 대해 논하시오.

[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 2 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제10강 부등식의 비교 (2005 이화여자대학교 수시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

매 분기별로 아파트 가격 변동액과 연간 가격 변동예측 액 자료를 발표하고 있는 부동산연구소의 발표에 의하면, 올 1사분기 3개월 동안 세 아파트의 가격변동 액이 각각 A_1, A_2, A_3이었고, 올 한 해 동안 같은 세 아파트의 가격 변동 예측 액이 C_1, C_2, C_3 일 것이라고 한다.

[논제] 올 1사분기 변동 액의 대소 관계가 $A_1 < A_2 < A_3$와 같고, 연간 변동 예측 액이 $C_2 < C_3 < C_1$을 만족한다고 할 때, 이 부동산연구소가 추정하는 올 4월초부터 9개월간 같은 세 아파트의 가격 변동 예측 액 B_1, B_2, B_3의 가능한 모든 대소 관계를 열거해 보고 그 근거를 논하시오.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제11강 반비례와 일차함수 (2008 중앙대학교 수시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

연료전지를 발전장치로 간주할 때, 그 가장 중요한 장점은 원리적으로 에너지 변환효율(열효율)이 높다는 점이다. 화력발전에서는 연료의 화학 에너지를 일단 열의 형태로 보일러에 공급하고, 보일러에서 발생하는 증기에 의해서 터빈을 가동하여 전기 에너지를 만들어 낸다. 이러한 화력발전의 열효율은 현재 40~50% 정도에 머물고 있다. 이에 비하면 연료전지에서는 화학 에너지를 열의 형태로 변환하지 않고 직접 전기 에너지로 변환하므로 이론적인 열효율이 높다.

연료전지의 또 하나 중요한 장점은 환경 적합성이다. 연료와 공기를 공급하기 위한 송풍기 이외에는 터빈과 같은 회전기를 필요로 하지 않으므로 소음과 진동이 적다. 또한 수소를 연료로 사용하면 배출되는 것은 물 뿐이며 CO_2와 같은 지구 온난화 가스가 발생하지 않는다. 연료전지가 청정 발전장치로 평가 받는 이유도 바로 이 때문이다. 하지만 이 평가에 대해서는 좀 더 신중하게 생각할 필요가 있다. 연료전지의 연료로 사용되는 수소는 지구에 매장되어 있는 것이 아니다. 수소는 주로 석유나 천연가스의 부분 연소 반응으로 만들어지는데, 그 과정에서도 CO_2가 배출된다. 따라서 지구 전체 환경의 차원에서 보면 CO_2를 배출하는 과정을 통해 만들어진 수소를 원료로 사용하는 연료전지는 결과적으로 화력발전과 마찬가지로 지구 온난화 가스를 배출하는 셈이다. 다만 효율이 문제가 된다. 예를 들어, 메탄을 연료로 하는 화력 발전의 현실적 효율을 40%라고 하면, 전력 에너지 1kWh당 CO_2 배출량은 약 490g이다. 한편, 메탄으로 만들어지는 수소를 연료로 하는 연료전지의 효율이 이론상 최대값인 95%라면 전력 에너지 1kWh를 생산하기 위해 연료전지를 사용하면 약 340g의 CO_2가 배출된다. 그러나 이와 같은 이론적인 최대 효율을 얻는 것은 불가능하다. 만약 연료전지의 효율이 60%라 하면, 전력 에너지 1kWh당 약 540g의 CO_2가 배출된다. 즉, 연료전지의 효율이 낮으면, 같은 양의 전력을 생산하기 위하여 더 많은 수소 원료가 필요하고, 따라서 수소를 생산하는 과정에서 CO_2 배출량이 증가하게 된다.

[논제 1] 제시문에 의하면 연료전지로 발전(發電)할 때, 연료전지의 효율이 낮을 경우 화력발전에 비해 더 많은 CO_2를 배출한다. 그렇다면 화력발전의 경우보다 적은 CO_2를 배출하기 위하여 제시문에서 예시한 연료전지의 효율이 몇 % 이상이 되어야 하는지 설명하고 그 타당성을 논술하시오.

[논제 2] 어느 지역에 A라는 화력발전소와 B라는 연료전지 발전소가 있다. 실제로 생산하는 전력량 1 kWh의 생산원가는 A의 경우 60원이고, B의 경우 75원이다. A의 효율은 40%로 제시문에 의하면 전력량 1 kWh당 약 490g의 CO_2가 발생한다. 또한 B의 효율은 83%로 전력량 1 kWh당 약 390g의 CO_2가 발생한다. 이때 발생한 CO_2에 대하여는 아래 표와 같이 세금이 부과된다고 하자. 생산비용을 생산원가와

세금의 합이라고 할 때, 이 지역에서 1,000 kWh의 전기를 생산하는 비용을 최소화하려면 A와 B에서 각각 얼마의 전기를 생산해야 하는지에 대하여 논술하시오.

CO2 총 발생량(kg)	세금(원)
100이하	0
100초과 200이하	15,000
200초과 300이하	30,000
300초과 400이하	45,000
400초과 500이하	60,000
500초과 600이하	75,000
⋮	⋮

[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 2 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제12강 부등식의 영역 (2006 중앙대학교 수시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

국내 굴지의 전자회사인 A전자는 반도체와 휴대전화를 동시에 생산할 수 있다. 그러나 인력, 자금력, 기술 등의 제약으로 어느 한 제품을 무한히 생산하는 것은 불가능할 뿐 만 아니라, 한 제품을 더 생산하려고 하면 다른 제품의 생산을 줄여야 한다. 보다 구체적으로, 한 회사가 자신에게 주어진 자원과 기술을 아무리 효율적으로 사용하더라도 최대로 생산할 수 있는 두 제품의 생산량 사이에는 일정한 관계가 존재한다. 이 관계를 그림 또는 수식으로 표현한 것을 이 회사의 생산가능곡선이라고 한다. A전자가 생산하는 반도체 생산량을 x, 휴대전화 생산량을 y라 표시하면 A전자의 생산가능곡선은 $x+y=10$이라 하자. 즉 반도체를 x단위 생산할 때 A전자가 생산할 수 있는 휴대전화의 최대 생산량은 $10-x$단위가 된다. 한편 반도체 한 단위의 판매가격은 3원이고, 휴대전화 한 단위의 판매가격은 4원으로 고정되어 있다고 하자. (단, 반도체와 휴대전화의 생산량은 0 이상의 실수 값을 갖는다고 가정하라.)

[논제 1] A전자가 총 매출액을 극대화하기 위한 생산전략을 구하고, 그 이유를 설명하시오.

[논제 2] A전자의 생산가능곡선이 $x^2+y^2=100$으로 바뀌었다고 하자. 즉 반도체를 x단위 생산할 때 A전자가 생산할 수 있는 휴대전화의 최대 생산량은 $\sqrt{100-x^2}$단위가 된다. 이 경우 총 매출액을 극대화하기 위한 A전자의 생산 전략은 어떻게 바뀌겠는가? 구체적인 수치를 제시할 필요 없이 적당한 그래프를 이용하여 그 이유를 설명하시오.

[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 2 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

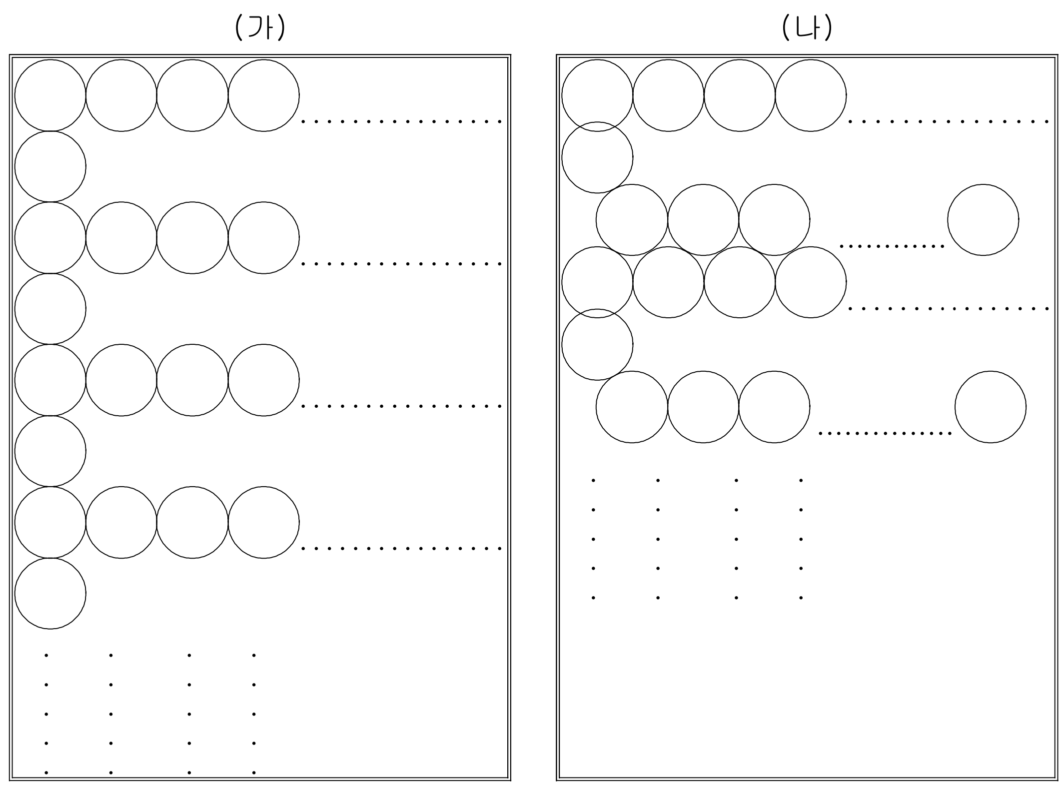
학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제13강 원으로 평면 채우기 (2006 이화여자대학교 수시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

서영이는 친구들을 집으로 초대하여 다과 파티를 하려고 한다. 크기가 같은 원 모양의 과자를 여러 개의 정사각형 쟁반에 담으려고 할 때, 과자들이 서로 겹치지 않고 쟁반 밖으로도 나가지 않게 하려고 한다. 서영이는 다양한 크기의 쟁반에 과자를 담을 때 아래 (가)와 같이 나란히 배열하는 방법과 (나)와 같이 엇갈리게 배열하는 방법 두 가지를 생각하였다.



[논제 1] 서영이가 (가), (나)의 두 가지 배열 방법 중 어느 것이 과자를 더 많이 담을 수 있는지를 고민하고 있다. 이때, 서영이가 고려해야 할 요소들에 대해 서술하시오.

[논제 2] 서영이는 (가)의 방법이 더 많은 수의 과자를 담을 수 있다고 생각하였다. 어떠한 경우에 서영이의 생각이 타당할지 그 조건들을 논하시오.

[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 2 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

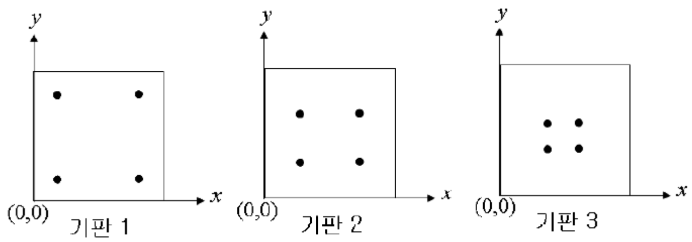
[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제14강 두 점 사이의 거리 (2007 한양대학교 수시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

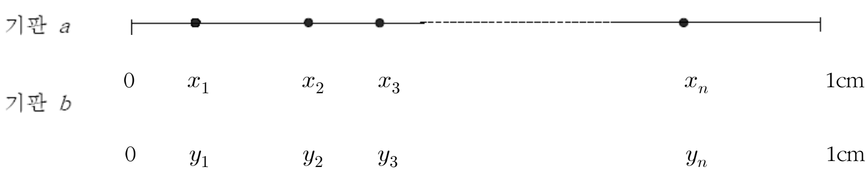
인쇄 회로 기판은 집적 회로, 저항기 또는 스위치 등의 전기적 부품들을 조립하는데 사용하는 얇은 판으로, 오늘날 우리가 사용하는 많은 전자 제품에 없어서는 안 되는 요소이다.

어떤 공장에서 제작하는 인쇄 회로 기판은 모두 크기가 같은 정사각형이고, 기판에 조립되는 부품의 수는 동일하다. 기판의 종류는 오직 부품들이 놓이는 위치에 따라 결정된다고 가정하다. 부품의 위치는 기판의 왼쪽 아래 꼭지점을 원점으로 하고 두 모서리를 x축, y축으로 설정하여 좌표로 나타낸다. 이때 기판의 원점과 앞면은 정해져 있기 때문에 기판의 회전이나 뒤집기 등은 고려하지 않는다. 아래의 그림은 4개의 부품을 조립하기 위해 제작한 3가지 기판의 예이다.



이제 기판의 생산관리를 용이하게 하기 위해 기판 사이의 유사성을 나타내는 지표를 개발하고자 한다. 기판 a와 기판 b의 유사성을 나타내는 지표를 S_{ab}라고 하자. S_{ab}는 $0 \le S_{ab} \le 1$을 만족해야 하고, 두 기판 사이의 유사성이 클수록 S_{ab}가 커야하며, 특히 두 기판이 동일하면 $S_{ab}=1$을 만족해야 한다. 예를 들어, 위의 그림에서 기판 2와 다른 기판 사이의 유사성이 기판 1과 기판 3 사이의 유사성보다 크므로 $S_{12} > S_{13}$와 $S_{23} > S_{13}$이어야 하고 또한 $S_{11} = S_{22} = S_{33}$를 만족해야 한다.

[논제] 2차원 기판 문제를 단순화시킨 1차원 기판 문제를 고려하자. 아래의 그림에서처럼 기판 a와 b는 모두 길이가 1cm이고 각각 n개의 부품이 놓일 자리가 만들어져 있다. 기판의 한 끝을 원점으로 정하고, 기판 a의 부품 위치들의 좌표를 작은 것부터 $x_1, x_2, \cdots, x_n$이라 하고, 기판 b의 경우에는 그것을 $y_1, y_2, \cdots, y_n$라고 하자. 기판 a와 기판 b의 유사성을 나타내는 지표 S_{ab}를 제시하고 그 타당성을 설명하시오.



[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제15강 사인법칙 (2006 서강대학교 수시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

해변에서 멀지 않은 곳에 무인도가 있고 그 섬 가운데에는 높은 산이 있다. 이 무인도에 가는 방법이 없어 해변에서만의 측정으로 해변으로부터 이 섬이 떨어진 거리와 산의 높이를 근사적으로 알고자 할 때, 가능하면 측정회수를 줄이고 작업량이 적도록 효율적인 방법을 찾으려 한다(단, 측정도구로 줄자와 각도기만 사용할 수 있음을 가정한다).

[논제 1] 해변에 있는 두 나무의 위치를 이용해서 이 두 나무에서 섬까지의 거리를 각각 알아낼 수 있는 여러 방법 중 두 가지를 택하여 각각의 방법이 갖는 장단점을 비교하여 설명하시오.

[논제 2] 해변의 어느 두 지점을 정하여 산의 높이를 알아낼 수 있는 여러 가지 방법 중 하나를 택하여 설명하고, 이러한 방법의 효율성에 대해 논하시오.

[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 2 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제16강 코사인법칙 (2008 인하대학교 모의문제)

다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 피라미드는 고왕국 시대의 왕묘이다. 고왕국에서는 사후에 완전한 영생을 얻는 것은 단지 왕뿐이며, 신하나 백성들은 내세에서도 왕에게 봉사함으로써만 영생을 얻을 수 있다고 생각하였다. 이집트의 대표적 유적인 기자(Gizah)의 쿠푸 왕(the Paraoh Khufu)의 피라미드는 대략 바닥 한 변의 길이가 230m, 높이가 146m나 되어 230만 개의 석회암 석재로 만들어졌다. (중략) 그러나 고왕국의 멸망 이후 더 이상 피라미드는 건설되지 않았다. 창조신이 정한 질서가 왕을 정점으로 하는 국가 체제로 실현되었다고 믿었던 사람들에게 그것은 큰 충격이었다. 왕권이 실추되면서 신하나 백성들은 피라미드를 만드는 대신, 자신의 손으로 영생을 얻기 위한 길을 찾으려 하였다.

(나) 세계 7대 불가사의 중의 하나인 기자에 있는 쿠푸 왕의 피라미드에는 황금비가 숨어있다. 기원전 2650년 경 지어졌다고 추측되는 이 피라미드로부터 당시 이집트 인들이 황금비의 값을 알고 있었다고 조심스럽게 가정할 수 있다. 이집트 정부가 1925년 최종적으로 내놓은 보고서에 따르면 쿠푸 왕의 피라미드의 크기는 다음과 같다.

[쿠푸 왕의 피라미드의 크기]

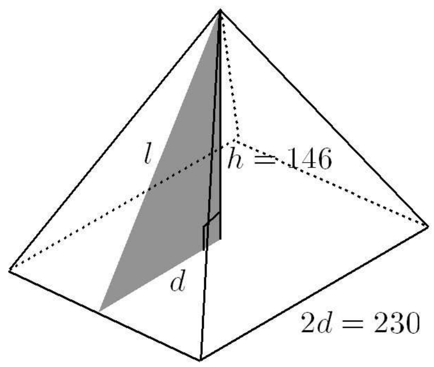
방향	길이 (m)	방향
북	230.24	남서 2' 28"
동	230.39	북서 5' 30"
남	230.45	남서 1' 57"
서	230.36	북서 2' 30"

높이	146.60m

[밑면의 모서리가 이루는 각]

북서	북동	남동	남서
89 59' 58"	90 3' 2"	89 56' 27"	90 0' 33"

(다) 피라미드에서는 길이나 넓이의 비가 일정한 값이 되는 경우가 많다. 여러 가지 경우를 계산해보면서 그러한 경우를 조사해보자. 계산을 편리하게 하기 위하여 밑면의 모서리의 길이를 모두 230m라고 하자. 밑면의 모서리의 길이를 $2d$, 옆면인 삼각형의 높이를 l이라고 하면 $l^2 = d^2 + h^2$이므로 $l = \sqrt{115^2 + 146^2}$이고 따라서 계산기를 사용하여 구하 $l = 185.85$이다. 옆면의 넓이를 계산해보면 $\frac{1}{2} \times 230 \times 185.85 = 21372.75$로 이 값은 높이의 제곱인 21316과 거의 같다. 당시의 설계 도면이 전해지지 않아 구체적인 것은 알 수 없지만 앞에서의 계산에 의해 고대 이집트인들은 다음과 같은 원리로 피라미드를 건축하였다고 가정해볼 수 있다.



[가정1] 피라미드의 밑면은 정사각형으로 건축한다.
[가정2] 피라미드 옆면의 넓이는 높이의 제곱과 같도록 건축한다.

[논제] $l=1$로 놓았을 때, 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정오각형의 한 변의 길이가 피라미드 옆면의 모서리의 길이와 같음을 추정하여라. 단, $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$이다.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

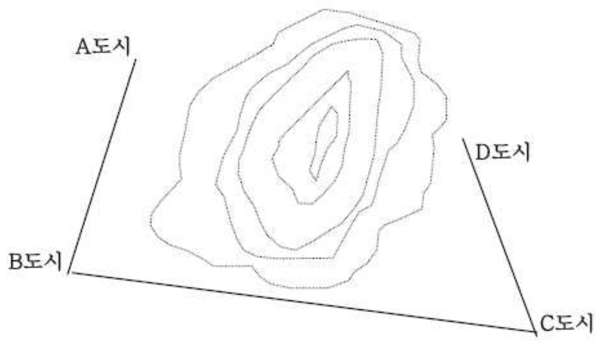
학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제17강 코사인 법칙 (2006 이화여자대학교 모의문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

아래 그림은 네 도시 A, B, C, D와 그 사이에 있는 산의 위치를 보여 주고 있다. 정부에서는 도시 A와 B, B와 C, C와 D 사이의 기존 직선도로 이외에, 도시 A와 D 사이의 직선도로를 새로 만들기로 하였다.



[논제] 기존 도로들의 길이와 이 도로들이 이루는 각을 이용하여 직선도로 AD의 길이를 계산할 수 있는 방법을 단계별로 제시하시오. (단, 모든 도시는 같은 높이에 있고, 중간에 있는 산을 관통하는 지점들 사이의 거리와 각은 직접 측량이 불가능하다고 한다.)

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제18강 최적화 (2007 고려대학교 수시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

정부는 태풍 피해를 입은 주민들에 대한 보상을 결정하고 75억 원의 예산을 배정하였다. 보상 대상을 선정하기 위해 피해 접수를 받은 결과 1,000건이 신고 되었다. 그런데 접수된 건들 중에는 보상금을 타기 위해 허위로 피해 신고를 한 사례가 적지 않은 것으로 확인되었다. 이에 따라 정부는 신고 내용의 진위를 가리기 위한 조사를 실시하기로 하였다. 그러한 조사를 마친 직후에, 적발된 허위신고를 제외한 모든 접수 건들에 대해 보상금을 균등하게 배분할 예정이다.

문제는 조사 기간이다. 조사 기간이 길어질수록 허위신고를 더 많이 적발할 수 있는 반면에 조사에 드는 비용은 늘어난다. 게다가 보상금 지급 시기가 늦춰짐에 따라 피해 주민들에 대한 보호·관리 비용도 증가한다. 조사 및 보호·관리 비용이 증가하는 만큼 배정된 예산 중 실제 보상에 사용될 재원은 줄어들 수밖에 없다. 조사기간, 보호·관리 비용, 허위신고 적발건수, 보상금 총액, 보상의 효과 사이에는 다음의 표와 같은 관계가 성립한다.

	1일째	2일째	3일째	4일째
일별 조사 및 보호, 관리 비용(억 원)	1	2	3	4
일별 허위 신고 적발 건수	100	90	80	70

보상금 총액 = (예산) - (조사 및 보호 · 관리 비용)

보상의 효과 = (총 접수건수 중 진짜 피해건수) × (1건당 보상액)

※ 표에서 일별 통계는 누적분이 아닌 하루 분의 수치임.

※ 4일째 이후에도 일별 조사 및 보호·관리 비용은 매일 1억 원씩 증가하고, 일별 허위 신고 적발건수는 매일 10건씩 감소함.

[논제] 제시문의 경우 보상의 효과를 가장 크게 하려면 정부가 며칠간 조사해야 하는지를 밝히고, 그 근거를 제시하시오.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제19강 최적화 (2007 이화여자대학교 수시문제)

[논제 1] 주어진 예산으로 휴대폰, MP3 플레이어, 전자수첩을 각각 하나씩 사고자 한다. 각 물품의 만족도는 가격이 상승함에 따라 증가한다고 가정하자. 아래의 표는 휴대폰, MP3 플레이어, 전자수첩의 가격별 만족도를 나타낸다. 90만원의 예산으로 총 만족도가 최대가 되도록 구매하고자 할 때, 구매할 물품들의 가격을 결정하는 방법을 설명하시오.

〈물품의 가격별 만족도〉

물품 \ 가격	10만원	20만원	30만원	40만원	50만원
휴대폰		30	42	50	55
MP3 플레이어	20	30	37	41	
전자수첩	10	19	25	28	30

[논제 2] 위의 표와는 다르게 각 물품의 단위가격당 만족도 증가량이 일정한 경우를 생각해보자. 단위가격당 만족도는 휴대폰이 가장 많이 증가하고, 그 다음은 MP3 플레이어, 전자수첩 순이다. 총 만족도가 최대가 되도록 하려면 임의의 주어진 예산으로 어떻게 물품들을 구매해야 하는지 설명하시오.

[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 2 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제20강 최적화 (2007 이화여자대학교 모의문제)

[논제] 제주도에서 대학생 단편영화제가 총 열흘 간 개최될 예정이다. 주최 측은 전국의 대학생 영화감독들을 초청하여 각 영화마다 5회씩 시사회를 개최할 계획이다. 그 중 서울에 사는 5명의 대학생 영화감독이 시사회에 참석하기로 한 일정은 아래 표에 ■로 표시 되어 있다. 주최 측이 제공하는 경비는 제주도에 머무는 기간 동안의 호텔 숙박비와 서울-제주 간 왕복 항공료이고, 주최 측은 경비를 줄이기 위해 시사회가 없는 날 해당 대학생을 서울에 갔다 다시 돌아오게 하거나 제주도에 머무르게 할 수 있다. 주최 측이 비용을 절감하기 위해서 영화제에 참석한 5명의 영화감독들의 체류 일정을 어떻게 결정해야 할지 호텔 숙박요금과 항공료를 고려하여 논하시오.

행사일 / 영화감독	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
감독 A	■	■	■			■	■			
감독 B				■	■	■		■	■	
감독 C			■	■				■	■	■
감독 D		■	■	■	■					■
감독 E		■		■	■	■				■

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

3 수리논술의 응용

제21강 최적화 (2008 이화여자대학교 수시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

현재 우리나라 지폐는 1천원권, 5천원권, 1만원권으로 구성되어 있다. 사람들은 같은 금액인 경우, 가능하면 적은 장수의 지폐를 소지하고자 한다. 예를 들어, 1만 6천원의 경우 1천원권 16장보다는 1만원권 1장과 5천원권 1장, 1천원권 1장으로 총 3장의 지폐를 소지하고자 한다. 한국은행이 지폐 인쇄비용을 최소화하는 방법은 사람들이 소지하고자 하는 총 장수에 비례하여 각 지폐를 공급하는 것이다. (단, 이 문제에서 동전 사용은 없고, 권종별 인쇄비용은 동일한 것으로 가정한다.)

[논제 1] 사람들이 소지하는 금액 중 1만원 단위 미만인 0원, 1천원, 2천원, …, 9천원 등 10가지 경우가 모두 균일한 분포를 이룬다고 가정하자. 한국은행이 지폐 인쇄비용을 최소화하기 위하여 1천원권과 5천원권을 어떤 비율로 공급해야 하는지 설명하시오.

[논제 2] 사람들이 소지하는 금액이 증가함에 따라, 기존 1만원권에 추가하여 5만원권 또는 10만원권 중 1종의 고액권 발행을 검토하고 있다. 사람들이 소지하는 금액에 따라 새로 발행할 고액권 종류의 선택 방법을 지폐 인쇄비용 최소화의 관점에서 논하시오.

[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 2 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제22강 최적화 (2006 고려대학교 수시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

남태평양에 있는 어떤 화산섬이 폭발할 것이라는 보고를 받고 한국의 119 구조대가 긴급 출동하였다. 이 섬은 정상에서 해안까지의 거리가 4km인 원뿔 모양이다. 용암은 섬 윗부분부터 균일하게 덮으며 내려오고, 용암으로 덮인 넓이는 시간에 비례하여 증가하고 있어서 얼마 후 섬 전체가 덮일 것으로 예상된다. 구조대가 섬의 해안에 있는 C지점에 도착하니 화산 분출이 시작된 지 이미 25분이 지나 흘러내린 용암이 정상에서 1km 내려온 지점에 도달하였다. 현재 정상에서 2km 내려온 A지점에 조난자 3명과 3km 내려온 B지점에 조난자 12명이 구조를 기다리고 있다. 구조대는 구조선이 대기하고 있는 C지점으로 조난자를 모두 대피시켜야 하는데, 구조대의 이동속도는 조난자 운송과 관계없이 항상 분당 100m이고, 구조대는 한 팀으로 구성되어 있으며 한 번에 한 명씩만 운송할 수 있다. 단, A, B, C의 지점과 정상은 일직선상에 있다.

이 상황에서 조난자 구출방법을 놓고 A지점의 조난자를 B지점으로 일단 옮기자는 의견, A지점 조난자부터 먼저 구조해야 한다는 의견, 또는 제 3의 지점으로 모두 운송한 후 C지점으로 운송하자는 의견을 포함하여 온갖 다양한 의견들이 제시되었다.

[논제] 이때 구조대장이 취해야 할 합리적인 판단과 그 근거에 대하여 논술하여라.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제23강 게임이론 (2007 고려대학교 수시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 두 친구 갑과 을이 A와 B 중 한 분야에서 서로 독립적으로 사업을 하려고 한다. 이 두 사람은 동일한 분야나 다른 분야에서 사업을 할 수 있다. 갑과 을이 어떤 분야를 선택하느냐에 따라 그들 각자가 얻을 이윤은 달라진다. 갑이 얻을 수 있는 이윤과 을이 얻을 수 있는 이윤은 다음과 같다.

〈갑의 이윤〉

		을	
		A	B
갑	A	12	9
	B	15	10

〈을의 이윤〉

		을	
		A	B
갑	A	12	15
	B	9	10

갑과 을은 서로 협의하지 않고 다음과 같은 방식으로 동시에 사업 분야를 정한다. 갑은 을이 A를 선택할 것이라고 예상하면 자신이 A를 택할 경우 12의 이윤을, B를 택할 경우 15의 이윤을 얻을 것이기 때문에, 이 두 경우 중 더 큰 이윤을 가져다 줄 B를 택한다. 만일 을이 B를 택할 것이라고 예상하면 갑은 9와 10의 이윤 중 더 큰 이윤을 얻게 해주는 B를 택한다. 따라서 을이 어떤 사업 분야를 택할 것으로 예상되더라도 갑은 항상 B를 택할 것이다. 을도 갑의 경우와 같은 방식으로 사업 분야를 정하고, 그 결과 B로 진출할 것이다. 따라서 두 사람은 모두 B에 진출하여 각각 10의 이윤을 얻게 될 것이다. 이 때 갑과 을의 '의사결정요소'는 자신의 이윤이다.

(나) 공자가 말했다.

"도(道)는 사람에게서 멀리 있는 것이 아니다. 도를 행한다면서 사람을 멀리한다면 그것은 도라고 할 수 없다. 군자는 '사람다움'의 기준으로 사람을 다스리되 사람이 그 기준에 맞게 바로잡히면 다스림을 그친다. 도는 자신이 원치 않는 일을 다른 사람에게 행하지 않는 것이다. 군자의 도에는 네 가지가 있다. 나는 그 중 어느 한 가지도 제대로 실천하지 못하고 있다. 자식에게 바라는 바로써 부모를 섬기지 못하고, 하급자에게 바라는 바로써 상급자를 대하지 못하고, 동생에게 바라는 바로써 형을 위하지 못하고, 벗에게 바라는 바로써 벗에게 먼저 베풀지 못한다. 그러니 평소에 어찌 말과 행동에 부족함이나 지나침이 없도록 성실히 노력하지 않을 수 있겠는가."

공자가 일컫는 도의 의미에 대해 그의 제자인 증자는 "선생님의 도는 충(忠)과 서(恕)일 뿐이다."라고 설명했다. 여기서 '충'이란 자신의 진심을 다한다는 뜻이고, '서'란 자신을 미루어 남을 대한다는 뜻이다.

자연에는 만물이 조화를 이루도록 하는 법칙과 규범이 있다. 모든 인간은 자연으로부터 이 법칙과 규범을 부여받아 동일한 도덕적 본성을 지니고 태어난다. '충'은 바로 이 본성을 그대로 따르는 진실 된 마음이다. '서'는 어떤 경우이든 한결같이 '충'의 마음을 미루어 남을 대하는 방법을 일컫는다.

[논제] 제시문 (가)의 상황에서, 갑과 을이 제시문 (나)의 관점을 의사결정에 반영하는 정도에 따라 결과가 다르게 나타날 수 있다. 제시문 (나)의 관점을 어떻게 '의사결정요소'로 반영할 수 있는지 수리적으로 추론하고, 그렇게 추론된 '의사결정요소'에 따라 사업 분야를 정할 때 갑과 을이 각각 12의 이윤을 얻을 수 있는 경우를 논술하시오.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제24강 컴퓨터 비트 (2006 중앙대학교 수시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

컴퓨터는 우리가 사용하는 문자를 0과 1로 구성된 비트(bit)를 일정한 방식으로 조합하여 인식한다. 예를 들어, 사용하는 문자가 A, C, G, T 네 개라면, 각 문자에 비트의 조합 00, 01, 10, 11을 배정하여 컴퓨터에 기억시킬 수 있다. 이러한 배정방식에서 GATT라는 문자열을 컴퓨터는 10001111로 인식하고, 역으로 컴퓨터에 기억된 000111을 우리는 ACT로 인식한다. 컴퓨터에 비트의 조합을 어떤 방식으로 배정하느냐에 따라 메모리와 같은 컴퓨터자원의 효율성이 달라질 수 있다.

[논제 1] ACGTACGACA라는 문자열이 있다고 하자. 이 때, A, C, G, T에 배정되는 비트의 조합을 각각 00, 01, 10, 11로 주는 방식 I과 0, 10, 111, 110으로 주는 방식 II의 차이점을 컴퓨터자원의 효율성 측면에서 설명하시오.

[논제 2] TGCATGCTGT라는 새로운 문자열에 대하여 방식 I과 방식 II에서 사용된 비트의 조합을 그대로 적용한다고 하자. 컴퓨터자원의 효율성 측면에서 이때의 결과와 [논제1]의 경우를 비교하여 다른 결과가 나온다면, 그 이유를 밝히고 비트의 조합을 배정할 때, 어떤 점을 고려해야 하는지 설명하시오.

[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 2 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제25강 대푯값 (2008 한양대학교 수시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 집단의 속성을 전체적으로 파악하기 위해서는 다양한 대푯값이 사용된다. 가장 흔히 사용되는 것이 산술평균이다. 이는 집단 구성원의 속성값을 모두 더한 후 구성원의 수로 나눈 것이다. 하지만 다른 종류의 대푯값도 있다. 우선 집단에 속한 개별 구성원이 가장 많이 가지고 있는 속성값을 대푯값으로 취하는 최빈값이 있다. 그리고 집단의 속성값을 크기 순으로 배열한 후 중간에 있는 값을 택하는 중간값도 있다. 어떤 경우든 집단의 대푯값은 집단 구성원 각각이 가지고 있는 개별적 속성값과 구별되어야 한다. 우리나라 가구당 자녀의 수가 1.2명이라고 할 때 실제로 1.2명의 자녀를 가지고 있는 가구는 한 가구도 없을 것이기 때문이다.

(나)

사례(1): 우리나라 이혼한 부부를 대상으로 한 최근 통계조사에 따르면 평균적으로 결혼 후 10년 정도 지난 후에 이혼하는 것으로 나타났다. 하지만 정작 이혼이 가장 많이 이루어지는 시기는 결혼 직후부터 3년 사이의 결혼생활 초반기와 자식들이 다 장성한 후 '황혼 이혼'이 이루어지는 결혼생활 후반기이다.

사례(2): 흡연은 폐암의 주요 원인으로 지목되고 있다. 현재 폐암은 우리나라 사람의 사망원인 중 중요한 부분을 차지하기에 사회적인 의료비용을 증가시키는 중요한 원인으로 여겨지고 있다. 이 점을 고려하여 정부는 흡연을 줄일 수 있는 사회적 대책을 여러 모로 강구하고 있다. 하지만 우리 주변에는 매일 줄담배를 피워대면서도 폐암에 걸리지 않고 장수하는 사람이나 평생 담배 근처에는 가보지도 않았는데도 폐암에 걸려 사망한 사람을 가끔씩 찾아볼 수 있다.

사례(3): 지금은 타계한 유명한 진화생물학자 스티븐 제이 굴드는 40대 초반에 중피종이라는 희귀한 악성 종양에 걸렸다는 판정을 받았다. 그는 이 병의 중간값 생존율이 8개월이라는 말을 듣고 절망했다고 한다. 그러나 굴드는 중피종에 대해 자세히 알아본 결과 이 병의 생존기간 분포가 오른쪽 꼬리가 매우 긴 형태라는 점을 알아냈다. 그리고 자신이 오른쪽 꼬리 부근에 위치한 개인일 가능성이 높다는 근거, 즉 아직은 젊고 의료 환경이 좋은 곳에서 살고 있으며 비교적 조기에 병을 발견했고 병과 싸워 이기려는 투지에 불타고 있다는 사실을 근거로 자신은 8개월보다는 훨씬 높은 생존가능성이 있다는 결론을 내렸다. 실제로 굴드는 이런 결론에 근거하여 적극적으로 건강관리를 한 덕택에 중피종 진단 이후에도 상당기간동안 활발한 학술활동을 수행할 수 있었다.

[논제] (가)와 (나)를 활용하여 집단의 속성과 구성원의 속성을 관련시켜 생각할 때 발생할 수 있는 문제점에 대해 서술하시오. (500자 이내)

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제26강 단위원, 호의 길이, 수열 (2009 연세대학교 수시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

> XY-평면 위에 중심이 원점이고 반지름이 1인 단위원 C가 있다. 고정점 $A(-1, 0)$부터 시계 방향으로 원 C위의 한 점 P까지의 호의 길이를 $l(P)$라고 하자. 원 C 위의 임의의 두 점 P_1과 P_2에 대하여 연산 $P_1 \oplus P_2$를 점 P_1부터 원 C를 따라 시계 방향으로 $l(P_2)$ 만큼 더 이동하여 얻어지는 점으로 정의하자. 그러면 이 연산은
> 교환법칙과 결합법칙을 만족함을 쉽게 알 수 있다.

[논제 1] 점 P가 원 C 위의 임의의 한 점이라고 할 때, 연산 $\oplus$에 대하여 P의 항등원과 역원을 나타내는 점은 어떠한 점인지 각각 설명하시오.

[논제 2] 원 C 위의 점으로 이루어진 수열 $\{P_n\}$ 이

P_0, P_1, $P_n = P_{n-1} \oplus P_{n-2}$ (단, $n = 2, 3, 4, \cdots$)

로 정의된다. $P_0 = A$ 이고, P_1은 $l(P_1) = \frac{\pi}{3}$인 원 C 위의 점일 때, $P_n = A$ 를 만족하는 자연수 n 의 최솟값을 구하시오.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

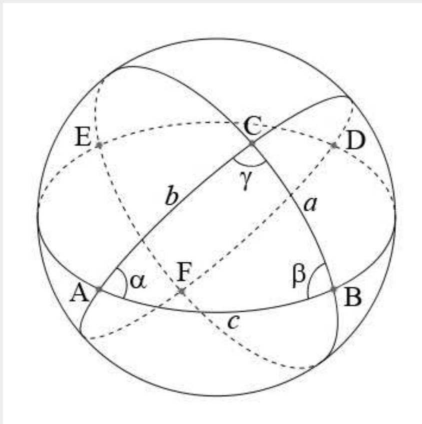
제27강 구면 삼각형 (2009 경기대학교 모의문제)

다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 남쪽으로 3km 걸어간 후, 서쪽으로 2km 걸어간 다음 다시 북쪽으로 3km 걸어가서 원래 출발한 지점으로 돌아간다면, 이 출발점은 지구상에서 어디인지 결정할 수 있다. 그리고 이 여행의 자취를 지구 위에 그리면 구면에 삼각형이 그려지는데, 이 삼각형 내각의 합은 180도보다 크다. 이는 평면에 그려진 삼각형과는 완전히 다른 성질이다. 이런 삼각형을 구면 삼각형이라 부른다. 구면기하학에서는 대원은 구의 중심을 지나는 평면과 구면의 교점이 이루는 원이다. 구면상의 두 점 사이의 최단 거리는 대원을 따라 측정한다. (중략)

고대의 바빌로니아, 이집트, 중국 등에서도 토지의 측량, 점성술, 천문학과 같은 실용적인 필요성에 의해서 삼각법을 이용한 기록을 엿볼 수 있으나 삼각법의 창시자는 그리스의 천문학자 히파르쿠스(Hipparchus)이다. 그는 구면 위의 내각의 크기와 두 점 사이의 거리를 측정할 필요를 느껴서 구면 삼각법에 관한 많은 연구를 하였다.

반지름이 1인 구면상의 내각 α, β, γ와 대변 a, b, c를 가지는 삼각형 ABC에 대하여 그는 다음과 같은 구면 사인법칙, 코사인법칙을 발견하였다.



$$\frac{\sin a}{\sin\alpha}=\frac{\sin b}{\sin\beta}=\frac{\sin c}{\sin\gamma}$$

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha$$
$$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos\beta$$
$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma$$

$$\cos\alpha=-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos a$$
$$\cos\beta=-\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cos b$$
$$\cos\gamma=-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos c$$

여기서, 내각 α, β, γ와 대변 a, b, c는 모두 라디안(radian)을 단위로 사용하는 호도법을 이용한다.

- 『이야기로 쉽게 배우는 삼각함수』

(나) 집합 A의 원소의 개수를 $n(A)$로 나타낸다. 두 집합 A, B의 합집합의 원소의 개수는

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

세 집합 A, B, C의 합집합의 원소의 개수는

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C).$$

이 법칙은 집합의 수가 3개 이상 있어도 확장이 가능하며 이를 '포함과 배제의 원리'라 한다.

- 고등학교 『수학』 -

[논제] 제시문 (가)의 그림에서 구의 중심에 대한 점 A, B, C의 대칭점을 각각 점 D, E, F라 하자. 영역 ABDC는 구면에만 존재하는 2각형이다. 반지름이 1인 구면의 넓이가 4π임을 이용하여 내각 α를 가지는 2각형 ABDC의 넓이가 2α임과, 삼각형 ABC와 삼각형 DEF가 합동임을 보이고, 그 결과와 (나)를 응용하여 삼각형 ABC의 넓이가 $\alpha+\beta+\gamma-\pi$임을 설명하시오.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제28강 등주정리와 등적정리 (2009 경희대학교 모의문제)

다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

여러 사물들은 제 각각의 특성을 지닌 채 자기만의 모양을 가지고 있다. 이러한 사물의 가장 기본적인 요소들은 점, 선, 면이라고 말할 수 있다. 그와 같은 기하학적 도형 중에서도 가장 기본적인 것이 직선과 원이다. 그리스인들은 직선과 원이야말로 기하학적 도형이며 완전하다고 생각하고 집중적으로 연구하였다. 이러한 믿음을 배경으로 그리스인들은 작도의 도구를 오직 원과 직선만을 그릴 수 있는 '자'와 '컴퍼스'에 국한시켰던 것이다. 수학적으로 모든 원은 닮은꼴이며 같은 원에서는 어느 점에서나 굽은 정도가 같다. 따라서 물체의 바퀴는 거의 대부분 원형이다. 또한 원은 어느 방향으로든지 재든지 폭(지름의 길이)은 일정하며 이 개념을 확장한 것이 정폭도형이며, 맨홀의 뚜껑 중 원모양이 많은 것은 이를 이용한 대표적인 예라고 할 수 있다. 원과 관련하여 유용한 정리로 등주정리와 등적정리를 꼽을 수 있다. 등주정리는 같은 둘레의 길이를 가지는 도형 중에서 넓이가 최대가 되는 것은 원이라는 것이며, 등적정리는 같은 넓이를 갖는 도형 중에서 둘레의 길이가 최소가 되는 것은 원이라는 사실이다. 우리 생활 속에서 볼 수 있는 간단한 예는 두루마리 화장지의 심(화장지를 감은 축)이 원형이라는 것에서 찾아볼 수 있다.

[논제]

(1) 둘레의 길이가 일정한 직사각형 중에서 넓이가 가장 큰 것을 구하는 방법에 대하여 논술하시오.

(2) 원과 임의의 도형을 이용하여 등주정리로부터 등적정리를 유도하는 방법과 등적정리로부터 등주정리를 유도하는 방법에 대하여 논술하시오.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

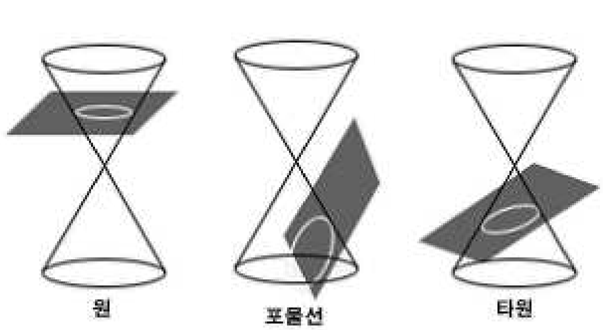
[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제29강 원뿔곡선의 정의 (2008 서울대학교 예시문제)

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

원뿔에 대한 고대 그리스의 연구에 등장한 원, 포물선, 타원, 쌍곡선은 원뿔에 평면을 다양한 각도로 통과시켰을 때 나타나는 곡선이란 의미에서 원뿔곡선 또는 원추곡선이라고 부른다. 현재 사용되고 있는 원, 포물선, 타원, 쌍곡선의 어원은 고대 그리스의 수학자 아폴로니우스의 저서 「원뿔 곡선론」에서 찾아볼 수 있다. 아폴로니우스는 하나의 직원뿔을 여러 가지 평면으로 잘라 이 평면이 밑면과 이루는 각이 모선과 밑면과 이루는 각보다 작은가, 같은가, 큰가에 따라서, 포물선은, “같다”는 뜻에서 parabola의 원어를 썼고, 타원은 “부족하다”는 뜻의 ellipse, 쌍곡선은 “초과한다”는 뜻의 hyperbola를 썼다.

일반적으로 수학에서는 원추곡선(원뿔곡선)을 이차곡선이라고 부르는데, 이는 원추곡선을 좌표 평면 위에 나타내면 이차식이 되기 때문이다.



[논제] 제시문에 주어진 원뿔곡선의 정의를 활용하여 다음 내용이 사실임을 설명하시오.
“평면 위에 놓인 공의 그림자에서도 광원의 위치에 따라 원뿔곡선을 볼 수 있다.”

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제30강 무한집합과 일대일대응 (2008 한양대학교 수시문제)

다음 제시문으로부터 논리적 근거를 도출하여 물음에 구체적으로 답하시오.

(가) 저 밤하늘을 수놓고 있는 별들의 수효를 헤아릴 수 있는지요? 저희 목동들에게 전해오는 은밀한 이야기에 의하면, 이 땅에 살아 숨 쉬는 모든 생명체는 자신만의 별을 하나씩 가지고 있답니다. 개개의 별과 생명체는 그 생사를 같이 하는 것이지요.

(나) 자연수 집합과 짝수 집합 사이에는 일대일 대응이 존재한다. 이런 의미에서 두 집합의 크기는 같다.

(다) 내게 사물이 가진 이름 따위는 무의미하네. 오직 그것이 존재하는가, 하지 않는가 여부만이 의미 있을 뿐이지. 따라서 어떤 사물들의 모임인 소위 그 집합이란 것도 그것을 구성하는 원소의 개수가 얼마인가 하는 것만이 중요하단 말이야. 다시 말해, 두 집합의 크기가 같다면, 그 둘은 내게 동일한 집합으로 인지되는 것일세.

(라) 하나의 구조를 구성하는 요소들 간의 관계는 그 구조의 특성을 결정하는 중요한 인자이다. 예를 들어 덧셈에서 '항등원', 혹은 '역원'의 유무를 생각하면, 정수 집합과 자연수 집합은 동일하다고 할 수 없다.

[논제 1] 정수 집합과 자연수 집합은 어떤 측면에서 동일시할 수 있겠는가?

[논제 2] 집합의 크기 측면에서 홀수 집합과 7의 배수의 집합은 동일시할 수 있겠는가?

[논제 3] 곱셈의 측면에서 홀수 집합과 7의 배수의 집합은 동일시할 수 있겠는가?

[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 2 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 3 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

Ⅱ 고 2·3 수준+Upgrade

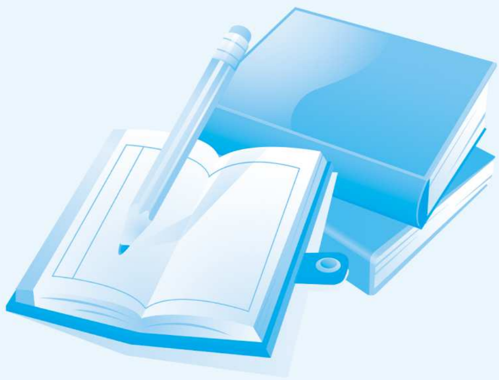
[내용안내]

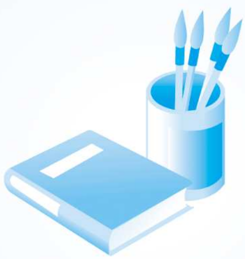
[학습지도 계획 자료]

1. 수리논술의 이해

2. 수리논술의 기본

3. 수리논술의 응용





[내용안내]

1강당 50분을 기분으로 총 30강으로 구성되어 있다.

□ 수리논술의 이해 : 5강 (제1강에서 제5강까지)
□ 수리논술의 기본 : 15강 (제6강에서 제20강까지)
□ 수리논술의 응용 : 10강 (제21강에서 제30강까지)

수리논술에서 내용은 수리(수학)이고, 형식은 논술이다.

[학습지도 계획 자료]

차시	분류	내용	비고
1	수리논술의 이해	그래프와 수열의 극한	2009 서울대 정시문제
2		함수와 넓이	2009 서강대 수시문제
3		공간도형	2001 중앙대 수시문제
4		확률	2008 고려대 수시문제
5		미분과 방정식	2009 서울대 정시문제
6	수리논술의 기본	DNA와 행렬	2008 서울대 모의문제
7		관계와 행렬	2006 이화여대 모의문제
8		암호와 지수의 활용	2009 한양대 수시문제
9		수열과 점화식	2008 이화여대 수시문제
10		저항과 수열의 극한	2008 고려대 수시문제
11		무한급수	2010 한국외대 수시문제
12		정보전달과 수열의 극한	2007 이화여대 수시문제
13		무한등비급수	2007 고려대 수시문제
14		경우의 수	2006 고려대 수시문제
15		색맹염색체와 확률	2009 인하대 수시문제
16		기하학적 확률	2009 서강대 수시문제
17		기댓값	2006 이화여대 모의문제
18		이차곡선의 정의	2006 고려대 수시문제
19		타원의 기초	2008 서울대 예시문제
20		포물선과 접선	2008 인하대 모의문제
21	수리논술의 응용	이차곡선	2008 서울대 예시문제
22		쌍곡선과 반사	2008 연세대 예시문제
23		벡터의 내적	2008 고려대 정시문제
24		면적과 길이	2008 연세대 모의문제
25		원과 미분	2009 아주대 모의문제
26		미분방정식의 해의 유일성	2009 서울대 정시문제
27		단위원과 수열	2009 연세대 정시문제
28		구분구적법	2008 고려대 모의문제
29		적분	2008 성균관대 예수문제
30		평균값의 정리	2008 서울대 정시문제

II 고 2·3 수준+Upgrade

1 수리논술의 이해

제1강 그래프와 수열의 극한 (2009 서울대학교 정시문제)

[읽기자료] 수열의 극한과 그래프

수열의 점화식과 관련한 극한을 계산할 때 그래프를 활용하면 편리할 때가 있다.

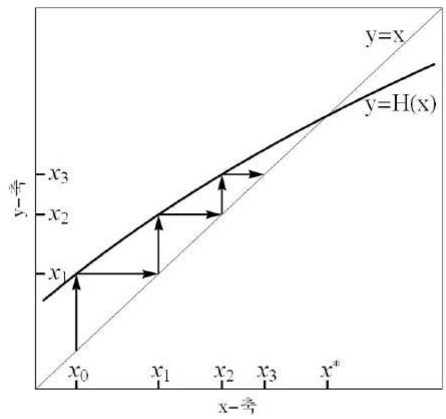
[예] 함수 $H(x)$ 를 이용하여 정의된 점화식

$$x_{n+1} = H(x_n)$$

의 극한에 대해 생각해 보자. 초깃값 x_0 이 〈그림〉과 같이 표시될 때 다음 값 x_1 이 〈그림〉의 y 축에 표시되어 있다. 이 점으로부터 수평선을 그어 직선 $y=x$ 와 만날 때까지 그으면 교점의 x 좌표는 x_1 이 되며 이 값이 〈그림〉의 x 축에 표시되어 있다. 이 x_1 을 초깃값으로 다시 점화식을 적용하면 다음 값 x_2 는 〈그림〉의 y 축에 표시되어 있다. 이 과정을 반복해서 〈그림〉에서와 같이 굵게 표시한 화살표들을 그릴 수 있다. 이와 같이

x_0, x_1, x_2, x_3, · · ·

의 움직임에 관한 정보를 화살표로 그린 것을 x_0 에서 시작하는 거미줄 그림이라고 한다.



〈그림〉

만약 x^*가 점화식 $x^* = H(x^*)$를 만족하면 x^*를 점화식 $x^* = H(x^*)$의 부동점(fixed point)이라고 부른다. 이 때 x^*는 함수 $y = H(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표이다.

[논제] 2006 고려대학교 수시문제 변형

한 사람이 계단을 오를 때, 매 걸음마다 한 계단 또는 두 계단씩 올라간다고 하자. n개의 계단을 올라가는 모든 가능한 방법의 수를 a_n이라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) a_{12} 의 값을 구하시오

(2) 그래프와수식을 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$의 값을 추정하시오.

[논제 분석]주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[문제 해결 전략] 주어진 조건에 따라 수열 $\{a_n\}$ 의 항을 나열하여 그 규칙을 찾는다. 일반적으로 항들 사이의 관계를 구하고 그래프와 수식을 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$의 값을 추정한다.

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제2강 함수와 넓이 (2009 서강대학교 수시문제)

[읽기자료] 실수의 정수부분과 소수부분

실수 x 에 대하여 x 보다 작거나 같은 정수 중 제일 큰 것을 실수 x 의 정수부분이라 하고 기호로

$$[x]$$

로 나타낸다. 또, 실수 x 에서 실수 x 의 정수부분을 뺀 값을 실수 x 의 소수부분이라 하고 기호로

$$x-[x]$$

로 나타낸다. 이 정의로부터 다음과 같은 사실을 얻을 수 있다.

① 실수 x 에 대하여 실수 x 의 정수부분과 소수부분을 각각 n, α 라 하면

$$n \le x < n+1 \quad \text{이고} \quad 0 \le \alpha < 1$$

이다.

[Why?]

② 양수 x 에 대하여 x 의 정수부분을 $[x]$ 라 하면

$$1-\frac{1}{x} < \frac{[x]}{x} \le 1$$

이다.

[Why?]

[논제 예] 2009 서강대학교 수시 면접문제 일부

함수 f 는 주기가 1인 함수이며, 구간 $[0\ ,\ 1]$에서 $f(x)=x^2-x$ 로 정의된다. 함수 g 를 $g(x)=x+f(x)$ 로 정의한다.

함수 k 는 정의역을 폐구간 $[0\ ,\ 2]$로 가지며 $0 \le x \le 2$ 에서 $k(x)=g(x)$ 이다. 함수 k 의 역함수를 h 라 할 때, 구간 $[0\ ,\ 2]$에서 함수 $y=k(x)$ 와 함수 $y=h(x)$ 로 둘러싸인 영역의 넓이 S 를 구하여라.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

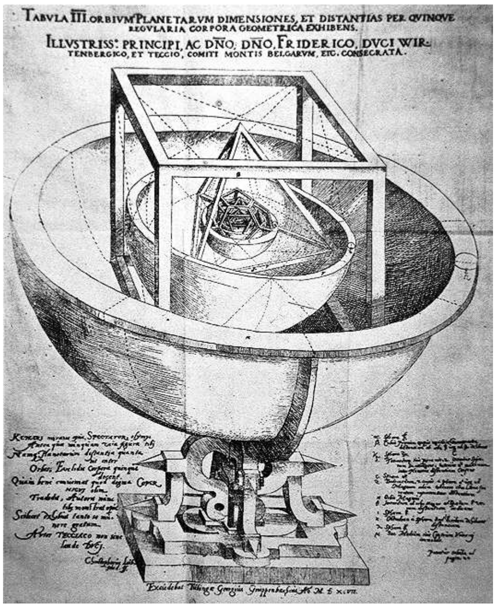
주어진 조건	
요구 사항	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

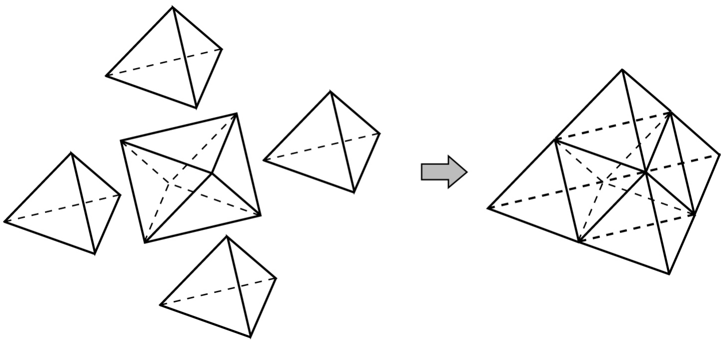
제3강 공간도형 (2003 중앙대학교 수시문제)

[읽기자료] 가로, 세로, 높이를 갖는 도형을 입체도형 또는 공간도형이라 한다. 공간도형은 평면 도형에 비해 보는 각도에 따라 그 모양이 다양하게 인식되기 쉽다. 따라서 공간도형을 활용한 문제를 잘 다루려면 공간감각을 길러야 한다. 공간감각을 기르는 방법 중 하나는 공간도형을 만들어 이리 저리 관찰하고 다양한 실험이나 변화를 시도해 보는 일이다.



[예] 2009학년도 고 1 전국연합학력평가문제

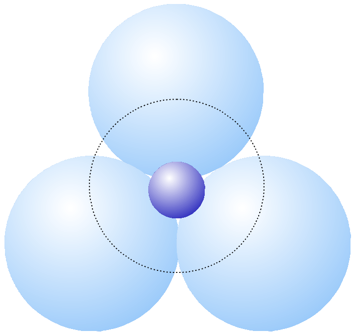
한 모서리의 길이가 1 인 정사면체 4 개와 정팔면체 1개를 붙이면 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2 인 정사면체를 만들 수 있다.



이를 이용하여 한 모서리의 길이가 1 인 정사면체와 정팔면체의 부피의 비를 구하면 1: 4이다.

[논제] 2001 중앙대학교 수시논술

그림과 같이 반지름이 1인 4개의 동일한 구가 서로 접하면서 밑바닥에 3개, 그 위에 1개가 올려져 있다. 만일 이 4개의 구들 사이에 반지름 r인 작은 구를 원래 모양의 변화 없이 모든 구와 접하게 위치시킬 수 있다면 반지름 r은 얼마인가?



[그림] 나머지 하나의 큰 구를 위치시키기 전에 위에서 바라본 모양

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제4강 확률 (2008 고려대학교 수시문제)

[논제] 2008 고려대학교 수시논술

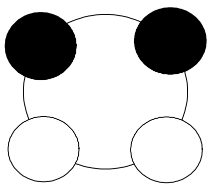
다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 어떤 시행의 표본공간 S가 n개의 근원사건으로 이루어져 있고 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 r개의 근원사건으로 이루어져 있으면 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를 다음과 같이 정의하고, 그것을 수학적 확률이라고 한다.

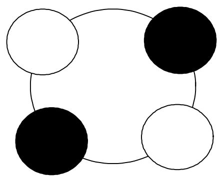
$$\mathrm{P}(A) = \frac{r}{n}$$

예를 들어 검은 구슬 두 개와 흰 구슬 두 개를 꿰어 염주를 만드는 경우를 생각해 보자.

구슬 색의 배치에 따라 다음과 같이 두 가지 종류의 염주를 만들 수 있다.



a형 염주



b형 염주

구슬의 색을 보지 않고 임의로 구슬을 배치할 때 a형 염주가 만들어지는 사건을 A라 하자.

표본공간 S가 두 개의 근원사건으로 이루어져 있으며 사건 A는 한 개의 근원사건으로 이루어져 있으므로 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$는

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$$

이다.

(나) 어느 제약회사에서 1만 정의 알약을 생산하였다. 그런데 1정의 알약이 모조 알약으로 바뀌는 일이 발생하였다. 알약이 진품인가 모조품인가를 구별하는 기술을 이용할 경우 진품 알약은 90%의 확률로 진품으로 판정되고 10%의 확률로 모조품으로 판정된다. 그리고 모조품 알약은 90%의 확률로 모조품으로 판정되고 10%의 확률로 진품으로 판정된다.

임의의 알약 1정을 검사한 결과 모조품이라는 판정이 나왔다. 이 때 그 알약이 모조품일 확률은 90%이다.

[논제] 제시문 (가)와 (나)에서 올바르게 서술되지 않은 부분이 있다면 바르게 고치고, 그 과정을 설명하시오.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제5강 미분과 방정식 (2009 서울대학교 정시문제)

[읽기자료] 2009 서울대학교 정시 자료 변형

(1) 여러 가지 자연현상 및 사회현상은 시간에 따라 변화하는 적절한 양과 그 양의 순간변화율(도함수) 등의 관계식으로 표현할 수 있다. 예를 들어, 마찰이 없는 수평면 위에서 용수철에 의해 진동하는 질량 m인 물체의 운동을 기술해보자. y를 용수철 평형점으로 부터의 변위(길이)라 하고 용수철 상수를 k라 하면 후크의 법칙에 의해 용수철이 물체에 가하는 힘은 $F=-ky$가 된다. 뉴턴의 운동방정식은 $F=ma$로 표시되는데 가속도 a는 속도 v의 도함수이고, 속도 v는 위치 y의 도함수이므로 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})$이고, y를 두 번 미분한 결과 $\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})$, 즉 y의 이차 도함수를 $\frac{d^2y}{dt^2}$로 나타내면, 관계식

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+ky=0$$

을 얻는다. ($y=f(t)$인 경우 $\frac{d^2y}{dt^2}$를 $f''(t)$로 쓰기도 한다.) 이와 같이 시간에 따라 변하는 양과 이의 도함수들 사이의 관계를 설정한 등식을 총칭하여 미분방정식이라 부른다.

(2) 수열 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$이 수렴하며 그 극한값을 e로 나타내는데 약 2.71828이다. e를 밑으로 하는 지수함수 e^t은 모든 실수 t에서 미분 가능하며, 임의의 상수 a에 대하여 $\frac{de^{at}}{dt}=ae^{at}$이 성립한다.

[적용 예]

상수 a에 대해

$\frac{d\sin at}{dt}=a\cos at$, $\frac{d\cos at}{dt}=-a\sin at$

라는 사실을 이용하면, 함수 $y=\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$가 다음 등식을 만족함을 보이시오.

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+ky=0$$

[적용 예 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

2 수리논술의 기본

제6강 DNA와 행렬 (2008 서울대학교 모의문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

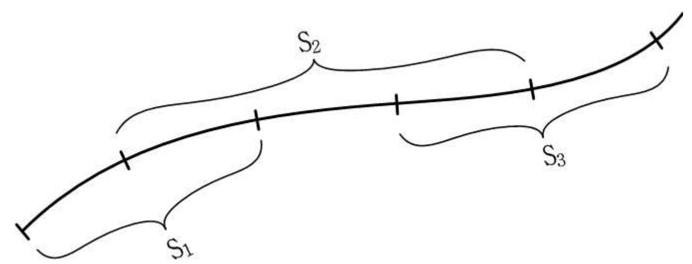
어떤 생명체의 유전정보의 총체를 유전체(genome)라고 부른다. 인간의 유전체는 23개의 염색체로 이루어져 있으며 그 안의 유전정보는 DNA의 염기서열(base sequence)로 기록된다. 인간의 염색체는 한 개의 선형 DNA로 구성되어있는 반면 박테리아의 염색체는 한 개의 원형 DNA로 구성되어있다.

유전체 DNA의 염기서열을 알아내는 것은 생명 현상의 이해를 위해서 매우 중요한 일이다. 유전체 DNA의 염기 서열을 알아내기 위하여 인간 유전체사업(Human Genome Project)에서 사용한 방법은 다음과 같다.

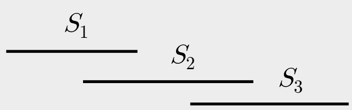
먼저 동일한 염색체 DNA 여러 개를 각각 적절한 길이로 무작위로 잘라낸 다음, 염기서열분석기(DNA Sequencer)를 이용하여 잘라낸 DNA 조각의 양 끝의 염기 서열을 읽어낸다. 이렇게 읽어낸 DNA 조각들의 염기서열을 비교하여 서로 염기서열이 일치하는 부분을 찾고, 이를 바탕으로 DNA 조각들을 배열하여 유전체의 염기서열을 재구성한다. 예를 들어, 잘려진 DNA 조각 S_1, S_2, S_3에 대하여, S_i와 S_j의 염기서열 끝부분이 서로 일치한다면 행렬의 $(i,\ j)$ 성분을 1, 일치하지 않는다면 0으로 표시하여 만들어진 행렬이 다음과 같다고 하자.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

위의 내용으로부터, S_1, S_2, S_3이 다음과 같이 배열되어 있음을 알 수 있다.



이 배열은



의 형태로도 표현 할 수 있다.

[논제] 인간의 같은 염색체에서 얻어진 DNA 조각을 S_1, S_2, S_3, S_4이라고 하자. S_1, S_2, S_3, S_4의 염기서열 일치 여부에 관한 정보로부터 다음 행렬이 만들어질 수 없음을 설명하시오.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제7강 관계와 행렬 (2006 이화여자대학교 모의문제)

[읽기 자료] 두 이차 정사각행렬 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$에 대하여 행렬의 곱셈은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathrm{AB}=\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix},\quad \mathrm{BA}=\begin{pmatrix} ap+cq & bp+dq \\ ar+cs & br+ds \end{pmatrix}$$

일반적으로 두 행렬 A, B의 곱 AB는 (A의 열의 개수)=(B의 행의 개수)일 때만 정의된다. 곱 AB의 $(i,\ j)$의 성분은 A의 i행의 성분과 B의 j열의 성분을 차례로 곱하여 더한 것이다. 따라서 A가 $m\times k$행렬, B가 $k\times n$행렬이면 AB는 $m\times n$행렬이다.

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

> n명의 학생 P_1, P_2, P_3, …, P_n 에 대하여, 아래와 같은 규칙
>
> $$\mathrm{M}_{ij} = \begin{cases} 1 & P_i\text{가 } P_j\text{를 좋아하는 경우, } i\neq j \\ 0 & \text{그 외 모든 경우} \end{cases}$$
>
> 에 의해 만들어지는 $n\times n$정사각행렬 $\mathrm{M}=(\mathrm{M}_{ij})$을 관계행렬이라 하고, $\mathrm{N}=\mathrm{M}^2$을 2단계 관계행렬이라 한다. 또한, P_i가 P_j를 좋아하고 P_j가 P_i를 좋아하는 경우, P_i와 P_j를 친구라고 정의한다.

[논제 1] 4명의 학생들에 대한 관계행렬이 아래와 같이 주어져 있다.

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

이때, 2단계 관계행렬 $\mathrm{N}=(\mathrm{N}_{ij})$를 구하고, 네 학생에 대하여 대각성분 N_{ii}가 학생 P_i의 친구의 수와 서로 같음을 보이시오.

[논제 2] n명의 학생들에 대한 임의의 관계행렬 M에 대하여, 2단계 관계행렬 N의 대각성분을 모두 합한 것은 항상 짝수가 됨을 설명하시오.

[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 2 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제8강 암호와 지수의 활용 (2009 한양대학교 수시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

[가] 암호란 통신문의 내용을 제삼자가 판독할 수 없도록 글자, 숫자, 부호 등으로 변형시킨 것인데 주로 군사적 목적이나 외교통신, 정자상거래 등에 많이 이용된다.

다음과 같은 방식으로 만들어지는 암호를 생각해보자. 먼저 알파벳 A부터 Z와 !, ?에 다음과 같이 숫자를 대응시킨다.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	!	?
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

이제 key를 고정된 양의 정수 k라 하고, 다음과 같은 변환규칙에 의해 암호화한다.

변환규칙 : 숫자 n에 대응하는 문자 → n^k을 29로 나눈 나머지에 대응하는 문자

예를 들어 key가 3인 경우, D에 대응하는 숫자가 4이므로 4^3을 29로 나눈 나머지는 6이 된다. 따라서, D는 6에 대응하는 문자 F로 변환된다.

[나] 두 정수 a , b와 양의 정수 m에 대해, $a-b$가 m의 배수(즉, $a-b=mq$인 정수 q가 존재)일 때, a와 b는 법 m에 대해 합동이라고 하고 $a \equiv b \pmod{m}$으로 표기한다. 일반 등식에서와 같이 합동식에서도 다음의 법칙들이 성립한다.

(i) $a \equiv a \pmod{m}$

(ii) $a \equiv b \pmod{m}$ 이면, $b \equiv a \pmod{m}$

(iii) $a \equiv b \pmod{m}$ 이고 $b \equiv c \pmod{m}$ 이면, $a \equiv c \pmod{m}$

(iv) $a \equiv b \pmod{m}$ 이고 $c \equiv d \pmod{m}$ 이면, $a+c \equiv b+d \pmod{m}$ 이고 $ac \equiv bd \pmod{m}$

(v) $ac \equiv bc \pmod{m}$ 이고 c와 m이 서로 소이면, $a \equiv b \pmod{m}$

[논제] key가 3일 때와 key가 2일 때, 통신문 'HUNT'를 변환하여 얻어진 암호문을 비교하고 발생하는 문제에 대하여 논하시오.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제9강 수열과 점화식 (2008 이화여자대학교 수시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

식중독균에는 새로운 개체를 만들어내는 데 소요되는 시간과 생존 시간이 다른 여러 종류의 균들이 있다. 각각의 균별 특성에 따른 증식 속도를 파악하여, 특정 시점의 식중독균 개체 수를 추정하는 것은 식품의 유통기한을 결정하는 데 매우 중요하다. 다음 자료는 두 종류의 식중독균에 대해 식품 유통 환경에서의 특성을 조사한 것이다.

- A균은 신생균과 성숙균으로 분류되고, 1시간마다 신생균과 성숙균 모두 새로운 신생균을 만들며 그 직후에 기존 신생균은 성숙균으로 성장하고, 기존 성숙균은 사멸한다.
- B균의 개체 수는 2시간마다 2배로 늘어난다. 일단 만들어진 개체는 주어진 환경 하에서는 사멸하지 않는다.

[논제 1] 초기에 A균의 신생균 개체 수(p_0)가 1이고 성숙균 개체 수(q_0)가 0이어서 총 개체 수(r_0)가 1로 주어진 경우, A균의 개체증가 특성을 고려하여 개체 수가 10이상으로 증가하는 데 소요되는 시간을 추정해 보시오.

[논제 2] 현재 A균만을 포함한 식품과, 그에 비해 4배 많은 개체 수의 B균만을 포함한 식품이 있다. 식품관리책임자로서 A균과 B균의 상대적 증식 속도를 고려하여, 시간 경과에 따른 두 식품의 식중독 유발 가능성에 대해 논하시오. (식중독 유발 가능성은 균의 종류에 관계없이 개체 수에 따라 증가한다고 하자.)

[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 2 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

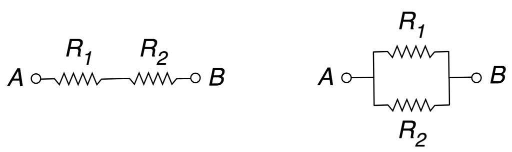
학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제10강 저항과 수열의 극한 (2008 고려대학교 수시문제)

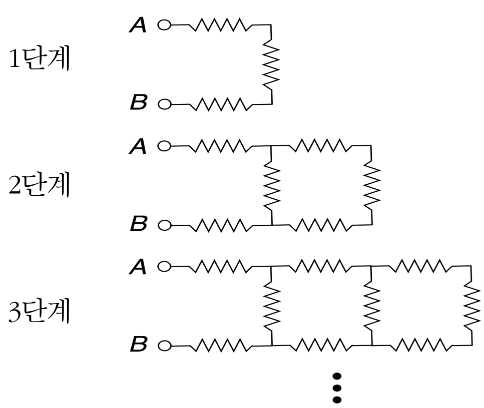
다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

두 개의 저항을 [그림 1]과 같이 연결하는 방법을 직렬연결이라 하고, [그림 2]와 같이 연결하는 방법을 병렬연결이라 한다. 크기가 R_1과 R_2인 두 개의 저항을 직렬 연결할 때, 합성 저항 R은 각 저항의 합과 같다($R = R_1 + R_2$). 그리고 크기가 R_1과 R_2인 두 개의 저항을 병렬 연결할 때, 합성 저항의 역수는 각 저항의 역수의 합과 같다$\left(\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$.



[그림 1]　　[그림 2]

[논제] [그림 3]과 같이 1 Ω의 저항을 각 단계마다 계속해서 세 개씩 붙여나갈 때, 수학적 귀납법을 이용하여 A와 B 사이의 합성 저항이 감소함을 설명하고 합성 저항의 극한값에 대하여 서술하시오.



[그림 3]

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제11강 무한급수 (2010 한국외국어대학교 수시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

자연수에 대한 기수법(記數法)으로 우리는 진법을 사용한다. 인류의 역사를 살펴보면 12진법, 60진법을 사용했던 적이 있고 컴퓨터 프로그래밍에서는 2진법, 16진법 등이 유용하게 쓰이기도 한다. 자연수의 기수법에서 어떤 진법을 사용하느냐에 따라 같은 수가 다르게 표현된다. 진법을 이용한 기수법의 특징은 어떤 수를 하나의 단위로 정하고 이 수의 거듭제곱을 이용하여 자연수를 나타내는 것이다. 이러한 방법을 이용하면 큰 수를 표시하는 데 편리하다.

p진법에서는 p개의 숫자 $0,1,2,\cdots,p-1$을 사용하여 자연수를 표현한다. 맨 오른쪽 자리의 단위는 p^0(=1)이며, 수의 자리가 왼쪽으로 하나씩 올라감에 따라 자리의 단위가 p배씩 커지게 된다. 어떤 자연수 N이, $0,1,2,\cdots,p-1$ 중의 한 값을 가지는 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$에 대하여

$$N=a_n\cdot p^n+a_{n-1}\cdot p^{n-1}+\cdots+a_1\cdot p^1+a_0\cdot p^0,\qquad (\text{단, } a_n\neq 0)$$

을 만족하면, N을 p진법으로 $a_na_{n-1}\cdots a_1a_{0_{(p)}}$로 표기한다. 여기서 (p)는 p진법으로 나타낸 수임을 의미하는데, 10진법은 가장 많이 사용되므로 (10)을 생략한다. 예를 들어, 10진법의 수 427을 5진법으로 나타내면,

$$427=3\cdot 5^3+2\cdot 5^2+0\cdot 5^1+2\cdot 5^0$$

이므로 3202(5)가 된다.

p^{-1}의 거듭제곱을 이용하면 양의 실수도 자연수의 기수법인 p진법을 확장해 나타낼 수 있다. 양의 실수를 표현할 때 진법과 더불어 사용하는 것이 소수표기법이다. 소수점 왼쪽은 양의 실수의 자연수 부분을 나타내며, 소수점 오른쪽은 0과 1 사이의 수를 나타낸다. 소수점 아래 첫 번째 자리의 단위는 p^{-1}이며, 수의 자리가 오른쪽으로 하나씩 내려갈 때마다 자리의 단위가 p배씩 작아지게 된다. 가령, 194.7603은

$$1\cdot 10^2+9\cdot 10^1+4\cdot 10^0+7\cdot 10^{-1}+6\cdot 10^{-2}+0\cdot 10^{-3}+3\cdot 10^{-4}$$

을 의미한다.

이제 0과 1 사이의 실수를 p진법으로 표현하는 문제를 생각해 보자. 예를 들면, $\frac{3}{8}$은 10진법으로 0.375인데, 이는 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다. $\frac{3}{8}$이 10진법으로 표현되어 $0.b_1b_2b_3b_4\cdots$라 하자. 즉, b_n은 $0\le b_n<10\ (n=1,2,\cdots)$을 만족하는 정수이고,

$$\frac{3}{8}=b_1\cdot 10^{-1}+b_2\cdot 10^{-2}+b_3\cdot 10^{-3}+b_4\cdot 10^{-4}+\cdots \tag{1}$$

가 성립한다고 하자. 식 (1)의 양변에 10을 곱하면

$$3+\frac{3}{4}=b_1+b_2\cdot 10^{-1}+b_3\cdot 10^{-2}+b_4\cdot 10^{-3}+\cdots \tag{2}$$

이 된다.
이 때 b_1은 10보다 작으며 음이 아닌 정수이고,

$$0 \le b_2 \cdot 10^{-1} + b_3 \cdot 10^{-2} + b_4 \cdot 10^{-3} + \cdots < 1 \qquad (3)$$

가 성립한다. 따라서 식 (2)의 양변을 비교하면 $b_1 = 3$이고

$$\frac{3}{4} = b_2 \cdot 10^{-1} + b_3 \cdot 10^{-2} + b_4 \cdot 10^{-3} + \cdots \qquad (4)$$

가 된다. 이제 식 (4)에 대하여 위의 과정을 반복하면 $b_2 = 7$, $b_3 = 5$, $b_4 = b_5 = \cdots = 0$을 얻는다.

[논제] ① 〈제시문〉의 식 (3)이 성립하는 이유를 논리적으로 설명하시오.

② 〈제시문〉를 참고하여 $\frac{3}{5}$을 4진법으로 나타내시오.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제12강 정보전달과 수열의 극한 (2007 이화여자대학교 수시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

어떤 정보가 여러 사람을 거쳐 전달될 때, 각 사람은 앞 사람에게서 전달받은 내용을 그대로 다음 사람에게 전하거나 정반대로 전한다고 하자. 도시 A의 시민들이 전달받은 내용을 그대로 전할 확률은 0.8이고, 정반대로 전할 확률은 0.2이다. 도시 B의 시민들이 전달받은 내용을 그대로 전할 확률은 0.6이고, 정반대로 전할 확률은 0.4이다. 갑은 '많은 사람을 거쳐 전달된 내용이 첫 정보와 동일할 확률은 도시 A가 도시 B보다 높다'고 주장한다. 한편, 을은 '아래와 같은 실험으로부터 위의 정보전달 과정의 결과를 유추할 수 있다'고 주장한다.

[실험내용] 외부와 완전히 차단되고 한 가운데 특수막이 설치된 상자가 있다. 상자에는 빨간색 연기 분자가 1,000개 들어있고, 단위시간당 일정한 비율의 연기 분자가 특수막을 통과하여 반대쪽으로 이동한다. 모든 연기 분자가 특수막 왼쪽에 있는 상태에서 실험을 시작한다. 특수막 왼쪽의 연기 분자의 수가 시간에 따라 어떻게 변하는지 관측한다.

[논제] 수리적 논리에 근거하여 갑의 주장과 을의 주장의 타당성을 각각 논하시오.

[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제13강 무한등비급수 (2007 고려대학교 수시문제)

[논제] 두 도시 A와 B의 도심에서 전염병이 동시에 발생하여 모든 방향으로 일정한 속도로 확산되고 있다. 전염병이 발생하고 며칠이 지난 후부터 전개된 정부의 방역 활동을 통해 전염병의 전파 속도는 매일 절반씩 줄고 있다. 전염병이 퍼진 지역이 시간에 따라 어떻게 변화하는지 논술하시오.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

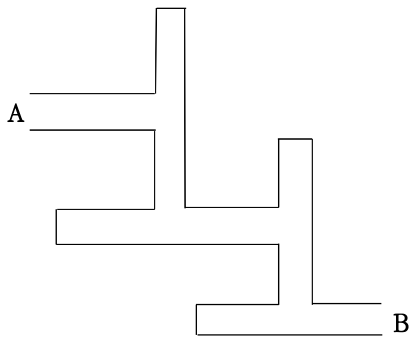
학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제14강 경우의 수 (2006 고려대학교 수시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

어느 도시에 다음과 같은 도로망이 있다. 길을 전혀 모르는 한 행인이 A 지역에서 B 지역으로 길을 물어 찾아가려고 한다. 각 갈림길에는 다섯 명의 사람이 있고 길을 물으면 이 중 네 명은 바른 방향을 나머지 한 명은 반대 방향을 가리켜 주는데, 행인은 이 사실을 알고 있다. 각 갈림길에서 한 번에 한 사람에게만 길을 물어볼 수 있는데, 길을 물어 본 후 어느 방향이 바른 방향인지 확실히 알 수 있으면 그 길을 따라 다음 갈림길로 가고 그렇지 않으면 다른 사람에게 다시 물어 보아야 한다.



[논제] A에서 B까지 가는데 평균 몇 회 길을 물어야 하는지 설명하시오.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제15강 색맹염색체와 확률 (2009 인하대학교 수시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

일반적으로 사람의 체세포에는 양쪽 부모로부터 22개의 상염색체와 하나의 성염색체를 물려받아 이루어진 23쌍의 염색체가 들어있다. 이 중 성염색체는 X 염색체와 Y 염색체인데 남자는 XY, 여자는 XX로 이루어져 있다. 성염색체에는 남성과 여성을 결정하는데 필요한 유전자 외에도 다양한 형질을 결정하는 여러 가지 유전자들이 존재한다고 알려져 있다. 색맹 유전자가 그 대표적인 예인데, 이 형질을 결정하는 유전자는 X 염색체에 있으며 정상인 대립 유전자에 대해 열성으로 작용한다. 즉, 색맹을 유발하는 유전자를 가진 염색체를 X' 이라고 하면, 염색체 조성이 XY 인 남자와 XX 인 여자에게는 색맹의 형질이 나타나지 않고, $X'Y$ 인 남자와 $X'X'$ 인 여자에게는 색맹의 형질이 나타난다. 그리고 여자의 경우에는 $X'X$ 의 염색체 조성을 가질 수 있다. 색맹 유전자가 정상인 유전자에 대해 열성이기 때문에 이 경우에는 정상으로 나타나지만, 색맹 유전자를 다음 세대로 전달할 수 있기 때문에 보인자라고 한다. 또한, 특정 집단 내에 색맹 유전자가 나타날 확률이 p 라면 정상인 대립 유전자가 나타날 확률은 $1-p$ 이다.

[논제] 제시문에 주어진 내용을 바탕으로 다음을 기술하시오.

(1) 어느 격리된 사회에서 여자의 1% 가 색맹이고 18% 가 보인자라고 했을 때, 임의의 남자와 여자가 결혼을 해서 아들을 낳을 경우 그 아들이 색맹일 확률을 구하시오. 단, 이 사회는 충분히 큰 집단이며, 대립 유전자에서 돌연변이가 나타나지 않고, 자연선택 역시 작용하지 않는다고 가정한다.

(2) (1)의 사회에서 어느 해에 결혼한 부부의 색맹 여부를 조사하였더니 남자의 5%와 여자의 1%가 색맹이었다. 이들이 낳은 자녀 중에서 딸의 0.7% 가 색맹이었다면 아들의 몇 $\%$ 가 색맹일 것으로 예상할 수 있는가? 결혼한 부부 중에서 보인자인 여자의 비율을 고려하여 답하시오. 단, 자녀의 수는 충분히 많고 아들과 딸의 수는 같다고 가정한다.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

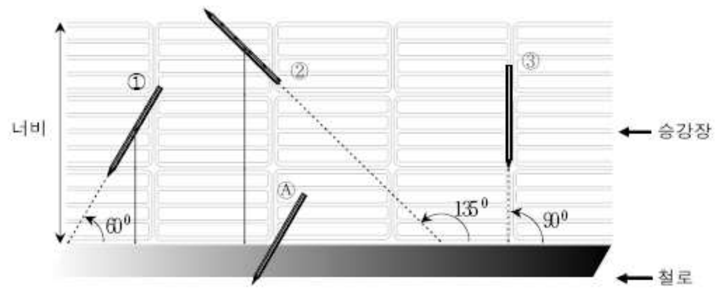
[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제16강 기하학적 확률 (2009 서강대학교 수시문제)

다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 두 사람은 정오부터 오후 1시 사이에 신촌역 앞에서 만나 같이 서점에 가기로 하였다. 지하철 도착 시각표를 모두 잘 알고 있는 그들은 기다리는 시간을 줄이기 위하여 먼저 도착한 사람이 도착한 직후부터 정확히 10분만 기다린 후 서점으로 향하기로 하였다. 서희는 약속장소인 신촌역으로 가기 위하여 집 근처 역에서 지하철을 기다리다가 아래 그림

Ⓐ와 같이 철로변 승강장 가장자리에 걸쳐있는 연필 한 자루를 발견하였다.



[나] 얼마 후 신촌역에서 만난 두 사람은 그들이 만날 수 있다는 사실에 놀랐다. 왜냐하면 서로 10분만 기다리기로 하였기 때문에 역에서 만날 가능성이 낮을 것이라고 생각하였기 때문이다. 두 사람은 그들이 실제로 만날 수 있을 확률을 계산해 보기로 하였다. 그들은 x-축, y-축을 진우, 서희가 각각 도착 가능한 시간 축으로 하는 표본 공간을 구성하고 둘이 만날 수 있는 경우를 생각해 보았다.

[다] 서희가 승강장의 연필 모양을 진우에게 자세히 설명하자, 두 사람은 모양 Ⓐ처럼 연필이 철로 변 승강장 가장자리에 걸쳐있을 가능성을 조사해 보기로 하였다. 이 경우 연필은 부피가 없는 길이 L인 단순 선분이라 하고, 승강장의 너비를 D라 하고, 철로 변 승강장 가장자리 직선을 시초선으로 정하였다. ①, ②, ③의 예처럼, 연필의 중심으로부터 시초선까지의 거리와 연필과 시초선이 이루는 각으로 이루어진 좌표들을 표본 공간으로 고려하였다. 단, 연필의 중심은 항상 승강장에 놓인다고 가정한다.

[논제1] [다]를 이용하여, 두 사람이 실제로 만날 수 있는 확률 값에 대하여 논술하라.

[논제2] [라]를 이용하여 표본 공간을 구성하고, 연필이 승강장 가장자리에 걸쳐 있을 확률 값에 대하여 논술하라.

[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 2 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제17강 기댓값 (2006 이화여자대학교 모의문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

차 재배지에서 차를 오늘 수확하는 대신 하루 더 재배하여 내일 수확하면 1.5배의 양을 수확할 수 있다고 한다. 내일 비가 오지 않으면 차 값은 수확시기에 관계없이 3(천원/kg)으로 일정하지만, 내일 비가 올 경우 오늘 수확한 차는 4(천원/kg), 내일 수확할 차는 2(천원/kg)이 된다. 내일 비올 확률 p를 알 수 없어서, 오늘 전량 수확하면 얻을 수 있는 400kg의 일정 비율 $0 \leq x \leq 1$만 오늘 수확하고, 나머지는 하루 더 재배하여 내일 수확하려고 한다.

[논제 1] 내일 비가 오지 않는 경우($p=0$)와 비가 오는 경우($p=1$) 각각에 대하여, 수확비율 x에 대한 수입 기댓값 $E_0(x)$와 $E_1(x)$을 구하고, 수입을 최대로 하기 위한 수확비율 x을 결정하시오.

[논제 2] 앞의 계산 결과를 이용하여, 내일 비올 확률이 p인 경우, 수확비율 x에 대한 수입의 기댓값 $E_p(x)$를 구하고 수입을 최대로 하기 위한 최선의 선택이 무엇인가를 논하시오.

[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 2 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제18강 이차곡선의 정의 (2006 고려대학교 수시문제)

[논제] 항해 중인 배는 자신의 위치를 세 기지로부터 전파를 받아 알 수 있다. 이 때 세 기지 A, B, C는 위치가 정확하게 알려져 있어야 하고 전파를 동시에 보내야 한다. 그러면 전파가 배에 도달하는 시간의 차이를 이용하여 배의 위치를 정확히 알 수 있다. 그런데 기지 C의 전파발생기가 고장이 나서 전파를 보내지 못하고 두 기지 A와 B에서만 전파를 보낸다고 하자. 이 경우 두 기지 A와 B에서 동시에 보낸 전파가 배에 도달한 시간의 차이와 두 기지 A와 B의 위치에 관한 정보로부터 얻을 수 있는 가능한 배의 위치에 대해 설명하시오.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

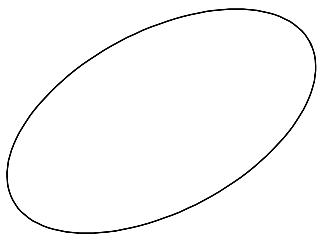
제19강 타원의 기초 (2008 서울대학교 예시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

케플러는 많은 관측 자료를 조사한 결과 태양 주위를 도는 행성의 궤도가 인류가 오랫동안 믿어 왔던 원이 아니라 타원이라는 것을 처음으로 발견하였다. 이로 인하여 천동설보다 지동설이 크게 지지를 얻게 되었다. 타원은 공의 그림자에서 볼 수도 있고, 원기둥이나 원뿔의 절단면에서도 발견되며, 기울어진 유리잔에 담긴 물의 면이나 물체의 운동에서도 관측된다. 타원에는 두개의 초점이 있는데, 초점의 성질을 이용하면 점화 장치를 만들거나 환자의 몸 안에 든 결석 제거 장치, 전파 탐지나 음악실의 음향 효과 등 다양한 응용을 할 수 있다.

[논제 1] 타원과 직선이 두 점에서 만날 때 이 두 점을 양 끝으로 하는 선분을 타원의 현이라고 하자. 주어진 방향과 평행인 현의 중점은 현의 위치가 변하더라고 모두 일정한 직선 위에 있음을 설명하시오.

[논제 2] 자와 컴퍼스를 가지고 있을 때, 아래 그림과 같이 주어진 타원에서 타원의 중심, 타원의 장축과 단축, 그리고 초점을 어떻게 구하는지 설명하시오.



[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 2 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

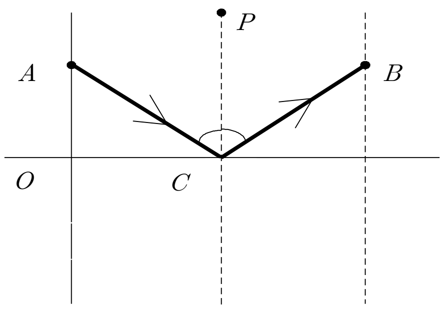
제20강 포물선과 접선 (2008 인하대학교 모의문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

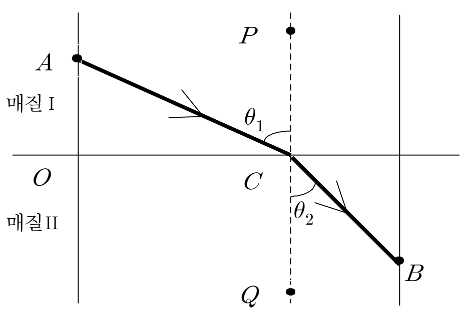
(가) 진행하는 빛은 다른 매질을 만나면 반사되기도 하고 굴절되기도 한다. 거울 면에 부딪힌 빛은 반사되며, 공기 중에서 물 속으로 진행하는 빛은 굴절된다. 이 두 현상을 각각 반사의 법칙과 굴절의 법칙으로 설명할 수 있다. 이 두 법칙을 한 가지 원리로 설명할 수는 없을까? 17세기 프랑스의 수학자 페르마는, 빛은 반사나 굴절에 관계없이 출발점에서 도달점에 도착할 때까지 시간이 가장 적게 드는 경로를 선택해서 진행한다는 사실을 발견하였다. 그리고 이 사실로부터 역으로 반사의 법칙과 굴절의 법칙을 도출하였다. 따라서 “빛은 시간을 최소화하는 경로로 진행한다”라는 것을 하나의 원리로 설정하면 빛의 반사와 굴절 현상은 이 원리의 결과로 볼 수 있다. 즉, 반사와 굴절 현상은 각기 다른 것이 아니라 하나의 원리가 서로 다른 물리적 상황 속에서 일어나는 결과일 뿐이다.

(나) 동일한 매질 속에 금속판이 그림 1과 같이 놓여 있고, 점 A에서 출발한 빛이 점 C에서 반사한 다음 점 B에 도달하였다고 하자. 같은 매질 속에서는 빛의 속력은 일정하므로 ‘시간을 최소화하는 경로’는 ‘거리가 최소인 경로’와 동일하다. 그러면 ‘거리가 최소인 경로’에서는 입사각 $\angle ACP$와 반사각 $\angle PCB$는 같게 된다. 이것을 반사의 법칙이라고 한다.

다음으로 굴절현상을 살펴보기로 하자. 일반적으로 서로 다른 매질 속에서는 빛의 속력이 바뀌는데 이 속력의 차이로 굴절률을 정의한다. 그림 2와 같이 매질 I과 매질 II가 맞닿아 있고, 빛이 매질 I에 있는 점 A에서 두 매질의 경계면에 있는 지점 C를 통과하여 매질 II에 있는 점 B에 도달한다고 하자. 매질 I에서의 빛의 속력을 v_1, 매질 II에서의 빛의 속력을 v_2라고 하자. 그리고 점 C 에서 두 매질의 경계면에 수직인 직선을 그림 2와 같이 점선으로 표시하자. 마지막으로 입사각 $\angle ACP$를 θ_1이라고 하고 굴절각 $\angle QCB$를 θ_2라고 하자. 그러면 점 A에서 출발한 빛이 점 B에 도달할 경우, C를 통과할 때가 시간이 가장 적게 걸린다면, 이 점에서는 등식 $\dfrac{c}{v_1}\sin\theta_1 = \dfrac{c}{v_2}\sin\theta_2$ 가 성립하게 된다. 여기서 c는 진공 속에서의 빛의 속력이다. 이것을 굴절의 법칙이라 하고 $\dfrac{c}{v_1}$ 를 매질 I에서의 굴절률, $\dfrac{c}{v_2}$ 를 매질 II에서의 굴절률이라고 한다.

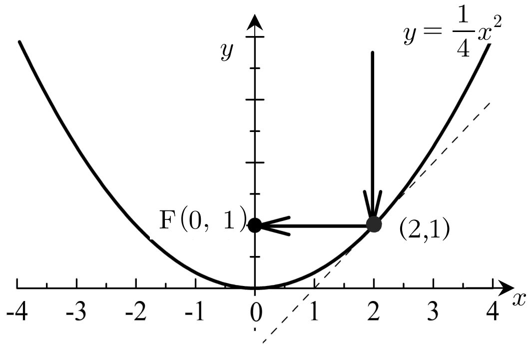


[그림 1]



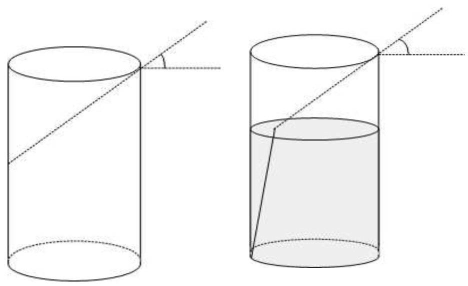
[그림 2]

[논제 1] 이차 곡선을 사용하면 여러 가지 자연 현상을 기술할 수 있다. 공을 비스듬히 던질 때 공이 날아가는 궤적은 포물선이며 지구, 인공위성, 핼리 혜성 등의 궤도는 타원을 이룬다. 이차 곡선의 성질과 빛의 반사 법칙을 실생활에 활용한 예가 많이 있다. 신장에 있는 결석을 제거하기 위한 의료기는 타원 모양의 거울을 만들어 하나의 초점에서 쏜 음파는 반드시 다른 초점을 지난다는 타원의 성질을 이용한 것이며, 바다를 항해하는 선박의 위치를 찾아낼 때는 쌍곡선의 성질을 이용한다. 위성방송을 시청하는 데 쓰이는 접시형 안테나 (파라볼라 안테나)의 면은 포물선을 회전시켜 만든 포물면으로 되어 있다. 인공위성에서 발사된 전파는 평행하게 진행하여 접시형 안테나에서 반사된 후 초점을 지나게 되므로 이 초점에 수신기를 설치하면 미약한 전파도 잘 탐지할 수 있게 된다. 이것은 '포물선의 축에 평행하게 진행한 모든 광선은 포물선에 닿아 반사될 때 반드시 포물선의 초점을 지난다'는 포물선의 성질을 실생활에 활용한 것이다. 이러한 성질을 한 예에서 확인해 보자. 그림 3과 같이 포물선 $y=\frac{1}{4}x^2$ 에 빛이 y축과 평행하게 위에서 들어온다고 하자. 포물선 위의 점 $(2,1)$에서 반사되는 빛은 앞에서 설명한 반사의 법칙에 의해서 포물선의 초점 $F(0,1)$을 지나게 됨을 보여라.

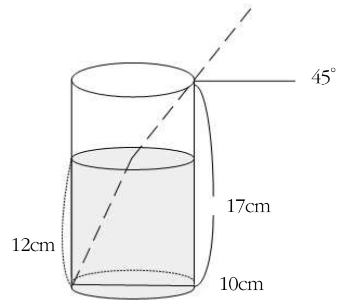


[그림 3]

[논제 2] [그림 4]와 같이 긴 원통형의 컵에 굴절률이 큰 액체를 충분히 부으면 빛의 굴절현상에 의해서 처음에 보이지 않던 바닥이 보이게 되는데, 이 현상을 이용하면 액체의 굴절률을 측정할 수 있다. [그림 5]와 같이 지름 10cm, 높이 17cm인 컵 위에서 컵의 끝부분과 45°의 각도로 컵의 내부를 들여다본다. 이 때 컵 내부의 옆면 일부는 보이지만 바닥은 보이지 않는다. 주어진 액체를 컵 속으로 천천히 부었더니 어느 순간부터 컵의 바닥이 보이게 되었다. 컵의 바닥 모서리 부분이 보이는 순간에 액체의 높이는 12cm였다. 굴절의 법칙을 이용하여 이 액체의 굴절률을 구하여라. (단, 공기의 굴절률은 1이라고 하자.)



[그림 4]



[그림 5]

[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 2 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

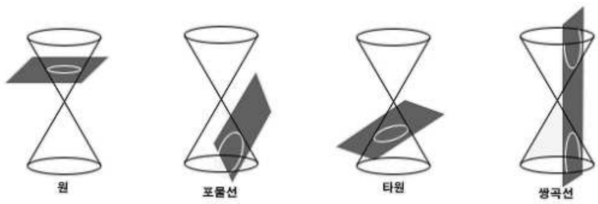
3 수리논술의 응용

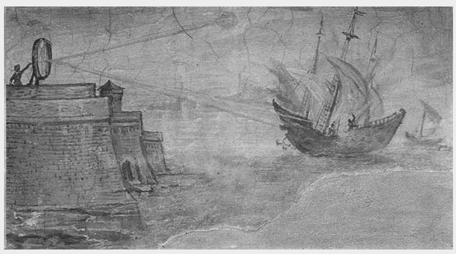
제21강 이차곡선 (2008 서울대학교 예시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 원뿔에 대한 고대 그리스의 연구에 등장한 원, 포물선, 타원, 쌍곡선은 원뿔에 평면을 다양한 각도로 통과시켰을 때 나타나는 곡선이란 의미에서 원뿔곡선 또는 원추곡선이라고 부른다. 현재 사용되고 있는 원, 포물선, 타원, 쌍곡선의 어원은 고대 그리스의 수학자 아폴로니우스의 저서「원뿔 곡선론」에서 찾아볼 수 있다. 아폴로니우스는 하나의 직원뿔을 여러 가지 평면으로 잘라 이 평면이 밑면과 이루는 각이 모선과 밑면과 이루는 각보다 작은가, 같은가, 큰가에 따라서, 포물선은, "같다"는 뜻에서 parabola의 원어를 썼고, 타원은 "부족하다"는 뜻의 ellipse, 쌍곡선은 "초과한다"는 뜻의 hyperbola를 썼다.

일반적으로 수학에서는 원추곡선(원뿔곡선)을 이차곡선이라고 부르는데, 이는 원추곡선을 좌표 평면 위에 나타내면 이차식이 되기 때문이다. 평면 위에 놓인 공의 그림자에서도 광원의 위치에 따라 다양한 이차곡선을 볼 수 있다.





(나) 이차곡선인 포물선과 쌍곡선은 타원과 더불어 고대에서 현재까지 많은 학자들에 의해 연구되고 있다. 갈릴레오 갈릴레이는 던져진 물체의 궤적을 포물선으로 설명했고, 행성운동의 세 가지 법칙을 발견한 케플러는 타원으로 행성의 궤도를 설명하기도 했다. 또한 고대 그리스의 수학자 아르키메데스가 포에니 전쟁에서 포물면 거울로 햇빛을 모아 나무로 된 로마의 전함에 불을 질렀다는 이야기도 전해지고 있다. 현대에도 이차곡선은 비행기나 선박의 위치를 나타내는 LORAN 항법시스템 등에 사용되기도 하고, 그 반사성질을 이용하여 자동차의 전조등, 송수신용 안테나 및 현대적인 망원경 등과 같은 실생활에 유용한 도구들을 만드는데도 응용되고 있다.

* 포물선 : 평면 위의 한 정점과 한 정직선으로부터 거리가 같은 점들의 모임
  쌍곡선 : 평면 위의 두 정점으로부터 거리의 차가 일정한 점들의 모임

[논제] 포물선과 쌍곡선은 모양이 비슷하지만 서로 다른 성질을 갖는 곡선이다. 그 유사점과 차이점에 대하여 설명하시오.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

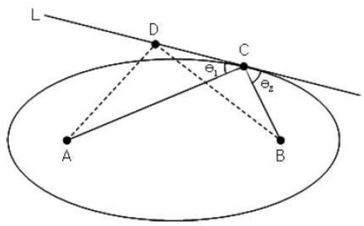
학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제22강 쌍곡선과 반사 (2008 연세대학교 예시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

(타원의 광학적 성질) 평면 위의 두 점 A, B로부터 거리의 합이 일정한 점들로 이루어진 곡선을 타원이라 하고, 이 두 점을 타원의 초점이라고 한다. 라틴어로 초점은 불을 지피는 장소를 의미하는데, 그 이유는 타원의 모양을 따라 거울을 설치하고 한 초점에 불을 지피면 불빛이 타원 표면에 설치한 거울에 반사되어 다른 초점으로 가기 때문이다.



[그림 1]

타원 위의 점 C에서의 접선을 L이라고 하면, 타원은 이차곡선이므로 타원과 직선 L은 C에서만 만난다. 또한 C를 제외한 직선 L 상의 임의의 점 D는 타원 밖에 있다. 이 때, 초점 A, B로부터 D까지 거리의 합이 초점 A, B로부터 C가지 거리의 합보다 큼을 알 수 있다. 즉, 선분 $\overline{\mathrm{BD}}$ 와 타원과의 교점을 E라고 하면, 삼각형 $\triangle \mathrm{ADE}$의 두변의 길이 합 ($|\overline{\mathrm{AD}}|+|\overline{\mathrm{DE}}|$)은 다른 한 변의 길이 ($|\overline{\mathrm{AE}}|$)보다 크므로 $\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{DB}}=\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{DE}}+\overline{\mathrm{EB}}>\overline{\mathrm{AE}}+\overline{\mathrm{EB}}$ 가 성립한다. 또한 E는 타원 위의 점이므로, 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{AE}}+\overline{\mathrm{EB}}=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CB}}$ 이고, 따라서

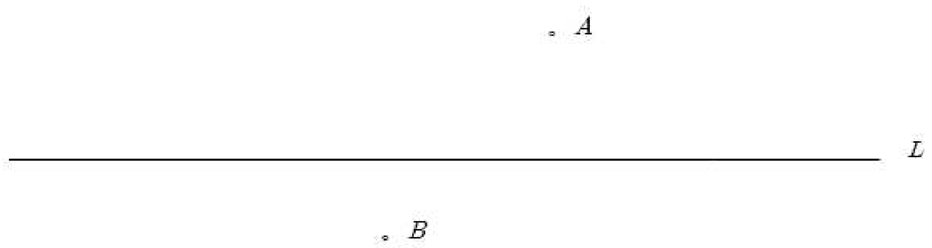
$$\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{DB}}>\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CB}}$$

이다. 즉, A에서 직선 L상의 한 점을 지나 B로 가는 최단 경로는 C를 지나는 것이다. 이 최적의 점 C는 다른 방법으로도 구할 수 있는데, B를 직선 L에 대하여 반사시킨 점 B′와 A를 직선으로 연결할 때 직선 L이 만나는 점이 바로 그 최적의 점이 된다. 이 최적의 점이 C이므로, 선분 $\overline{\mathrm{AC}}$와 접선 L사이의 각 θ_1과 선분 $\overline{\mathrm{BC}}$와 접선 L사이의 각 θ_2가 같음을 알 수 있다.

$$\theta_1=\pi-\measuredangle \mathrm{B}'\mathrm{CD}=\theta_2$$

따라서 빛이 A에서 출발하여 C에 도달하면, 빛이 반사할 때, 입사각$\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)$과 반사각 $\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)$가 같기 때문에, C에서 반사된 빛은 B로 향하게 된다.

[논제] 아래 그림에서와 같이 직선 L을 사이에 두고 두 점 A, B가 있다고 하자. 직선 위의 점 C에 대하여 C로부터 두 점 사이의 거리의 차 즉, $||\overline{AC}|-|\overline{BC}||$가 최대가 되려면 점 C가 어디에 놓여 있어야 하는지를 논리적으로 설명하시오.



[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

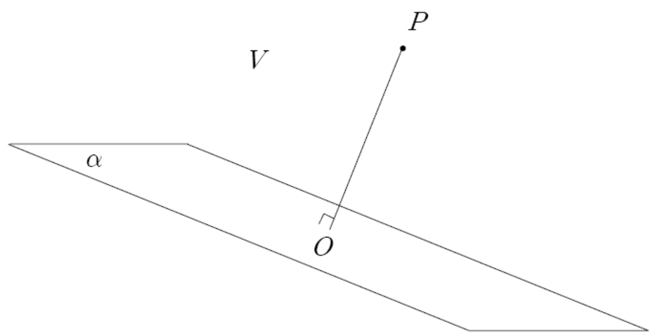
학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제23강 벡터의 내적 (2008 고려대학교 정시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 한 점 $\mathrm{P}(l, m, n)$를 지나는 직선이 평면 α와 원점 O에서 수직으로 만난다. 점 P의 좌표 l, m, n은 모두 자연수이다. 평면 α로 나누어지는 공간의 부분 중 점 P를 포함하는 부분을 V라 하고 V는 평면 α 위의 점들을 포함하지 않는다고 하자. V에 속하는 점들 중 좌표의 성분이 모두 정수인 점들의 집합을 S라 하고 Q를 S에 속하는 한 점이라 할 때 다음의 정리가 성립한다.



정리 1. S에 속하는 모든 점 R이 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \leq \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OR}}$을 만족하면 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$는 l의 약수이다.

정리 2. S에 속하는 모든 점 R이 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \leq \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OR}}$을 만족하면 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$는 l, m, n 의 최대공약수이다.

[논제] 대우를 이용하여 제시문의 정리1이 성립함을 보인다.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제24강 면적과 길이 (2008 연세대학교 모의문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

(단면의 면적 $A(r)$을 이용, 단면의 길이 $L(r)$을 구하는 논리) 반경이 r인 원기둥을 $45°$ 각도로 잘라서 생성되는 단면의 면적을 $A(r)$, 둘레의 길이를 $L(r)$이라고 하자. r의 함수로 단면의 면적 $A(r)$을 알고 있을 때, 이를 이용하여 단면의 둘레 길이 $L(r)$을 구하고자 한다.

반경이 각각 r, $r+h$ $(h>0)$인 원기둥을 $45°$ 각도로 자른 단면의 면적은 $A(r)$, $A(r+h)$이다. 큰 단면에서 작은 단면을 제거하면 가느다란 띠가 생성되는데, 이 띠의 면적은 이 두 단면의 면적의 차이 $A(r+h)-A(r)$이다. 이 띠를 풀면 직사각형으로 근사할 수 있고, 이 직사각형은 밑변의 길이는 우리가 구하고자 하는 단면의 길이 $L(r)$이고 높이는 h이다.

$$A(r+h)-A(r) \approx L(r)h$$
$$\frac{A(r+h)-A(r)}{h} \approx L(r)$$

위의 근사는 h가 작아질수록 정교하여지므로, 위 식에서 h를 0으로 보내는 극한을 취하면 등식이 성립한다. 즉, $L(r)=\frac{d}{dr}A(r)$

[논제] 위에 주어진 정보에 근거하여 단면의 길이를 각각 설명하고 있다. 공식을 유도하는 과정의 타당성에 관하여 논하시오.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

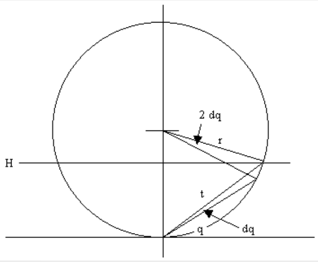
학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제25강 원과 미분 (2009 아주대학교 모의문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

구면의 넓이는 어떻게 주어지는가? 아르키메데스는 보다 일반적인 질문에 대한 답을 제시하였다. 이는 구면을 평면으로 잘라서 얻어진 부분의 넓이를 일반적으로 기술하는 것이다. 구체적으로, 평면에 의하여 잘린 구면 부분의 넓이는 영역의 중심으로부터 잘려서 생긴 원의 둘레에 이르는 거리를 반지름으로 갖는 원의 넓이와 같다는 것이다.



이를 증명하기 위하여 구면을 수평의 평면으로 자른 측면도를 살펴 보자. 아르키메데스의 결과는 평면 H 아래쪽의 넓이가 반지름 t인 원의 넓이와 같다는 것이다. 이 사실은 H가 구면의 아래쪽에서 접한다면 당연히 성립한다. 우리는 H의 높이 (또는 각 q)에 대한 넓이의 변화율을 이용하여 아르키메데스의 결과를 보이려고 한다. 원의 넓이를 이용하여 계산한 넓이의 공식을 A(q), 구면의 넓이를 S(q)라고 하자.

㉠ 우선 $t=2r\sin q$이다. 미분 공식을 적용하여 $\frac{dt}{dq}=2r\cos q$을 얻고 이로부터, 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{dA}{dq}=4\pi rt\cos q$$

평면에 의하여 잘려진 구면의 넓이가 각의 변화 ⊿$.q$에 따라 어떻게 변화하는지를 살펴보자. ㉡ 각이 ⊿q 만큼 변화하면 구의 중심으로부터 각의 변화는 2⊿q가 된다. 각 2⊿q에 대응하는 호의 길이는 $2r$⊿q이 되고 이는 각의 변화에 대응하는 잘려진 띠 모양의 구면 영역의 너비에 해당한다. 띠 모양의 둘레는 $2\pi t\cos q$로 근사되므로 넓이의 변화량에 대한 다음 근사식을 얻고

$$\Delta S \approx 4\pi rt\cos q\,\Delta q$$

이로부터 다음 결론을 얻는다.

$$\frac{dS}{dq}=4\pi rt\cos q$$

한편, 평면이 구면의 아래에 접하는 경우는 당연히 A=S=0이므로 A(q)=S(q)임을 알 수 있다. 특별히 평면 H를 구면의 위쪽 끝점과 접하도록 잡으면 구면의 넓이 $4\pi r^2$을 얻게 된다. 이는 아르키메데스가 가장

중요하게 생각한 결과 중 하나인데, 구면의 넓이가 동일한 반지름을 가진 원의 넓이의 4배가 되기 때문이다. 물론, 오늘날에는 초등학생들도 이 결과를 알고 있지만 이 사실이 알려지지 않은 시대의 이 발견은 아름답다고 할 수 밖에 없다.

원기둥은 어디에 등장하는가? 밑면의 반지름이 r이고 높이가 $2r$인 원기둥의 옆넓이는 $(2\pi r)(2r)=4\pi r^2$이므로 이는 내접하는 구면의 넓이와 같다. 아르키메데스는 넓이가 일치할 뿐 아니라 원기둥에 수직인 평면으로 잘린 넓이들이 같음을 보인 것이다.

[논제] 제시문의 밑줄 친 ㉠, ㉡ 부분을 간략히 설명하라.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제26강 미분방정식의 해의 유일성 (2009 서울대학교 정시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

여러 가지 자연현상 및 사회현상은 시간에 따라 변화하는 적절한 양과 그 양의 순간변화율(도함수) 등의 관계식으로 표현할 수 있다. 예를 들어, 마찰이 없는 수평면 위에서 용수철에 의해 진동하는 질량 m인 물체의 운동을 기술해보자. y를 용수철 평형점으로 부터의 변위(길이)라 하고 용수철 상수를 k라 하면 후크의 법칙에 의해 용수철이 물체에 가하는 힘은 $F=-ky$가 된다. 뉴턴의 운동방정식은 $F=ma$로 표시되는데 가속도 a는 속도 v의 도함수이고, 속도 v는 위치 y의 도함수이므로 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})$이고, y를 두 번 미분한 결과 $\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})$, 즉 y의 이차 도함수를 $\frac{d^2y}{dt^2}$로 나타내면, 관계식

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+ky=0 \qquad \cdots (1)$$

을 얻는다. ($y=f(t)$인 경우 $\frac{d^2y}{dt^2}$를 $f''(t)$로 쓰기도 한다.) 이와 같이 시간에 따라 변하는 양과 이의 도함수들 사이의 관계를 설정한 등식을 총칭하여 미분방정식이라 부른다.

상수 a에 대해

$$\frac{d\sin at}{dt}=a\cos at, \quad \frac{d\cos at}{dt}=-a\sin at$$

라는 사실을 이용하면, 함수 $y=\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$ 를 미분방정식 (1)에 대입했을 때 모든 t에 대해서 등호가 성립함을 쉽게 확인할 수 있다. 이 때, $y=\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$ 가 미분방정식 (1)을 '만족'시킨다고 말한다. 이와 같이 '주어진 미분방정식을 만족시키는 함수'를 그 미분방정식의 해라고 부른다.

논의를 진행하기 위하여 몇 가지 수학적 사실이 더 필요하다. 우선 수열 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$이 수렴하며 그 극한값을 e로 나타내는데 약 2.71828이다. e를 밑으로 하는 지수함수 e^t은 모든 실수 t에서 미분 가능하며, 임의의 상수 a에 대하여

$$\frac{de^{at}}{dt}=ae^{at}$$

이 성립한다.

자연현상을 설명하는 미분방정식은 그 해가 초기 조건(한 시점에서의 함수값, 도함수값 등)에 의하여 유일하게 결정된다. 구체적인 예를 들기 위해 아래 미분방정식을 살펴보기로 하자.

$$\frac{dy}{dt} = ay + b \qquad \cdots (2)$$

여기서 a와 b는 상수이다. 이 미분방정식의 해 $y = f(t)$가 초깃값 $f(0)$에 의해 유일하게 결정됨을 확인해보자.

이를 위하여 $f_1(t)$와 $f_2(t)$가 미분방정식 (2)의 해이고, 또한 f_1의 초깃값 $f_1(0)$과 f_2의 초깃값 $f_2(0)$이 같다고 하자. 이 때 함수 $g(t)$를 $g(t) = f_2(t) - f_2(t)$로 정의하면 $f_1(t)$와 $f_2(t)$가 미분방정식 (2)의 해라는 사실로부터 $g'(t) = ag(t)$가 성립함을 알 수 있다. 보조함수 $h(t)$를 $h(t) = e^{-at}g(t)$로 정의하면 모든 실수 t에 대하여 $h'(t) = 0$임을 확인할 수 있다.

따라서 $h(t)$는 상수함수가 되고, $g(0) = f_1(0) - f_2(0) = 0$이므로 모든 t에 대하여 $h(t) = 0$이 된다. 모든 실수 t에 대하여 e^{-at}은 항상 양수이므로, $h(t)$의 정의로부터 $g(t) = 0$이 모든 t에 대하여 성립하게 된다. 따라서 두 함수 $f_1(t)$와 $f_2(t)$는 같은 함수이다.

비슷한 방법으로 미분방정식 $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$의 해 $y = f(t)$가 $f(0)$, $f'(0)$에 의해서 유일하게 결정됨도 보일 수 있다. 이와 같이 미분방정식의 해가 초기 조건에 의해 유일하게 결정되는 것을 통칭하여 미분방정식의 해의 유일성이라 한다.

[논제] C_1과 C_2가 임의로 주어진 상수라 하자. 보조함수

$$g(t) = (\cos t)f(t) - (\sin t)f'(t)$$
$$h(t) = (\sin t)f(t) + (\cos t)f'(t)$$

를 이용하여 미분방정식

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0 \qquad \cdots (3)$$

의 해 $y = f(t)$가 초기 조건 $f(0) = C_1$, $f'(0) = C_2$에 의해 유일하게 결정됨을 보이시오.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제27강 단위원과 수열 (2009 연세대학교 정시문제)

다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

XY-평면 위에 중심이 원점이고 반지름이 1인 단위원 C가 있다. 고정점 $A(-1, 0)$부터 시계 방향으로 원 C 위의 한 점 P까지의 호의 길이를 $l(P)$라고 하자. 원 C 위의 임의의 두 점 P_1과 P_2에 대하여 연산 $P_1 \oplus P_2$를 점 P_1부터 원 C를 따라 시계 방향으로 $l(P_2)$ 만큼 더 이동하여 얻어지는 점으로 정의하자. 그러면 이 연산은 교환법칙과 결합법칙을 만족함을 쉽게 알 수 있다.

[논제] 원 C 위의 점으로 이루어진 수열 $\{P_n\}$이 P_0, P_1, $P_n = P_{n-1} \oplus P_{n-2}$ (단, $n=1, 2, 3, 4, \cdots$)로 정의된다.

(a) $P_0 = A$이고, P_1은 $l(P_1) = \dfrac{\pi}{3}$인 원 C 위의 점일 때, $P_n = A$를 만족하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

(b) k가 임의의 자연수이고, $P_0 = A$이며, $l(P_1) = \dfrac{2\pi}{k}$은 P_1인 원 C 위의 점일 때, $P_n = A$를 만족하는 자연수 n의 최솟값을 구하는 방법에 대하여 논하시오.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제28강 구분구적법 (2008 고려대학교 모의문제)

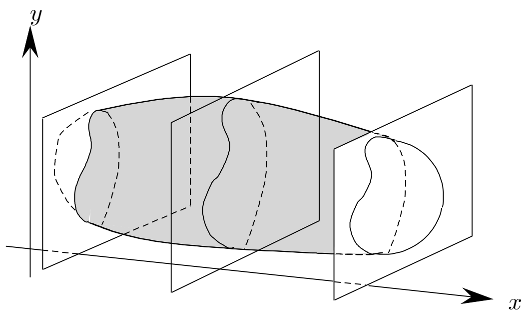
다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

X-선 컴퓨터 단층촬영(X-ray CT)은 물질 내에 있는 불순물의 크기를 밝히는데 사용되기도 한다. 모 회사 연구소에서 세라믹 내부에 크기를 알 수 없는 금속 불순물 덩어리 하나가 발견되었다. 이 불순물의 부피를 알기위해 x축을 따라가며 10㎜ 간격으로 단층촬영을 한 결과 불순물의 단면의 넓이가 아래 표와 같이 주어졌다.

x축 단면 위치(mm)	0	10	20	30	40	50
불순물의 단면적(mm^2)	0	2	6	3	2	0

측정을 더 정확히 하기 위해 7㎜ 간격으로 단층촬영을 한 번 더 하여 아래의 표를 얻었다.

x축 단면 위치(㎜)	0	7	14	21	28	35	42	49
불순물의 단면적(㎟)	0	2	8	6	6	4	2	0



[논제] 불순물의 부피를 가급적 정확하게 얻는 방법을 제안하고 부피를 추정해보시오. 그리고 그 타당성에 대해 논술하시오.

[논제 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제29강 적분 (2008 성균관대학교 예수문제)

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

함수 $y=f(x)$가 폐구간 $[a,b]$에서 연속일 때 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분은 아래 왼쪽 기호로 나타내고, 그 값은 아래 오른쪽 극한 값으로 주어진다.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \qquad \left(\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n},\quad x_k = a+k\Delta x\right)$$

[논제 1] 홍길동은 장난감 자동차를 사서 4초간 1차원 운동을 시키고, 5번 속도를 측정하여 다음과 같은 실험 결과를 얻었다.

측정시각	0.4초	1.2초	2.0초	2.8초	3.6초
속도	0.05m/s	-1.16m/s	4.00m/s	-6.34m/s	4.00m/s

위 표로부터 이 장난감 자동차의 4초간 평균속도 $\bar{v}$와 평균이동거리(변위) $\bar{x}$ 를 논리적으로 추정하시오.

[논제 2] 이 장난감 자동차의 성능이 궁금해진 홍길동이 장난감 자동차를 제작한 회사에 성능을 의뢰하였더니, 정지해 있다 출발한 경우 속도는 $v(t)=t^2\cos(\pi t)$라는 답신이 왔다. 이 회사가 생각하는 이 장난감 자동차의 첫 4초간 평균속도 $\langle v \rangle$와 이동거리 (변위) $\langle x \rangle$를 논리적으로 추정하시오.

[논제 3] [논제 1]에서 얻은 결과와 [논제 2]에서 얻은 결과를 비교했을 때, 발생된 오차를 줄이기 위한 실험 개선 방안에 대하여 간단히 논하시오.

[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 2 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 3 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

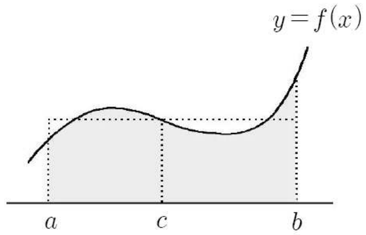
[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

제30강 평균값의 정리 (2008 서울대학교 정시문제)

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

폐구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 f에 대하여 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$를 만족하는 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재한다는 사실이 잘 알려져 있다.

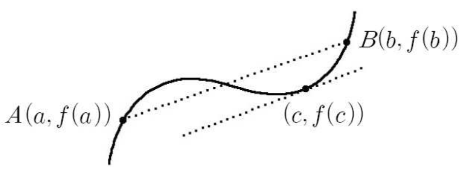
이를 '적분에 관한 평균값의 정리'라고 한다. 이것은 폐구간 $[a, b]$에서 $f(x) \geq 0$ 일 때, 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이가 밑변의 길이가 $b-a$이고 높이가 $f(c)$인 직사각형의 넓이와 같다는 것을 의미한다.



[그림 1]

(나) 적분에 관한 평균값의 정리로부터 도함수 f'이 폐구간 $[a, b]$에서 연속이면 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$를 만족하는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다는 '미분에 관한 평균값의 정리'를 유도할 수 있다.

곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $A(a, f(a))$와 $B(b, f(b))$를 지나는 직선 AB의 기울기는 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$이고, $f'(c)$는 점 $(c, f(c))$에서 곡선 $y = f(x)$에 접하는 직선의 기울기이다. 따라서 미분에 관한 평균값의 정리는 곡선 $y = f(x)$의 접선 중에 직선 AB와 평행한 것이 적어도 하나 존재한다는 것을 의미한다.



[그림 2]

미분에 관한 평균값의 정리는 여러 가지 부등식을 증명하거나 다양한 함수의 근삿값을 구하는 데 이용된다.

[논제 1] 적분에 관한 평균값의 정리를 이용하여 도함수 f'이 폐구간 $[a,b]$에서 연속이면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

를 만족하는 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재한다는 것을 설명하시오.

[논제 2] 함수 $f(x)=x^3$에 대하여 폐구간 $[1,2]$에서 논제1의 등식을 만족하는 c의 값을 구하시오

[논제 1 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[논제 2 분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구 사항은 무엇인가?

주어진 조건	
요구 사항	

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

중요한 개념	

학교		학년 반 번호		성명	

[첨삭지도]	[답안]	[첨삭지도]

논술 지도의 원리와 실제 Ⅱ | 자연계(수리)

2010년 3월 일 인쇄
2010년 3월 일 발행

발 행 : **한국대학교육협의회 입학전형지원실**
121-270 서울시 마포구 상암동 1601 KGIT 상암센터 11층
전 화 : 02)6393-5257
인쇄처 : 경성문화사
전 화 : 02)786-2999