2014학년도 6월 평가원(B형) 해설지

신동훈샘

---

1) 정답 : ⑤

2) 정답 : ④

3) 정답 : ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\times 7^{n+1}+3}{7^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{35\cdot 7^n+3}{7^n}=35$$

4) 정답 : ③

$\dfrac{r^2(a_1+a_5)}{a_1+a_5}=r^2=4$ 이므로 $r=2$

$a_1+a_2=a_1+2a_1=3a_1=12$ 이므로 $a_1=4$

따라서 $a_4=a_1r^3=32$

5) 정답 : ②

2가 적혀 있는 카드와 4가 적혀 있는 카드는 같은 숫자로 간주 $(a,\ a)$하고,

홀수가 적혀 있는 카드도 같은 숫자로 처리$(b,\ b,\ b)$하고,

나머지 숫자 6이 적혀 있는 카드는 c로 간주하면

여섯 개의 문자 $a,\ a,\ b,\ b,\ b,\ c$를 나열하는 수와 같다. 따라서 $\dfrac{6!}{2!3!}=60$

6) 정답 : ①

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=1$에서 $f(0)=0,\ f'(0)=1$

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)}=2$ 에서 $f(1)=0,\ f'(1)=\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(2x+1)}\cdot\frac{f(f(x))-f(f(1))}{f(x)-f(1)}\cdot\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot f'(f(1))\cdot f'(1)=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

[별해]

로피탈 정리에 의해

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(f(x)\cdot f'(x)}{4x-1}=\frac{f'(0)\cdot f'(1)}{3}=\frac{1}{6}$$

7) 정답 : ①

일차변환 g를 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 이므로 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$(g \circ f)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix}$ 이므로 $\alpha+\beta=22$

8) 정답 : ⑤

삼각형 BAC의 넓이 $f(t)=\frac{1}{2}(t-1)\cdot 2\sqrt{t}=t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}$

$f'(t)=\frac{3}{2}\cdot t^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{1}{2}}$

$f'(9)=\frac{3}{2}\cdot -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$

9) 정답 : ①

$\triangle BAC \backsim \triangle DAO$ (닮음비 $3:1$) 이므로 $\overline{CA}:\overline{AO}=a-1:1=3:1$ $\quad\therefore\ a=4$

부피 $v=\pi\int_0^a(2\sqrt{x})^2\cdot dx=4\pi\int_0^4 x\cdot dx=4\pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4=32\pi$

10) 정답 : ②

${}_3H_m={}_{2+m}C_2=36$ 이므로 $\frac{(2+m)!}{2!\,m!}=\frac{(2+m)(1+m)}{2}=36$ $\quad\therefore m=7$

고구마피자, 새우피자, 불고기피자를 적어도 하나씩 포함하여 m개를 주문하는 경우의 수는

$a+b+c=7\ \ (a,\,b,\,c\geqq 1)$의 정수해의 개수와 같다.

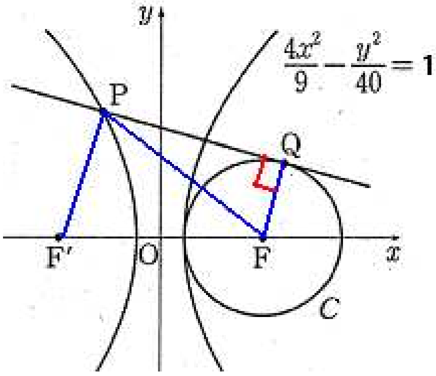
$\therefore\ {}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

11) 정답 : ⑤

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot \sin\frac{\theta}{2}=2$

$\therefore \sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{3},\ \cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이므로 $\sin\theta=2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

12) 정답 : ①



$\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{40}=1$ 이므로 $F\left(\frac{13}{2},\,0\right)$, $F'\left(-\frac{13}{2},\,0\right)$

원의 방정식 $\left(x-\frac{13}{2}\right)^2+y^2=5^2$ 이고, $\overline{PQ}\perp\overline{FQ}$ 이므로 $PF=\sqrt{12^2+5^2}=13$

쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{PF}-\overline{PF'}=3$ 이므로 $PF'=PF-3=13-3=10$

13) 정답 : ⑤

$n^2a_{n+1}=\left(n^2-1\right)a_n+n(n+1)2^n$ 에서 양변에 $\frac{1}{n(n+1)}$을 양변에 곱하면

$\frac{n}{n+1}a_{n+1}=\frac{n-1}{n}a_n+\boxed{2^n}$ 이므로 $b_{n+1}=b_n+2^n$ $\quad\therefore$ (가)$=f(n)=2^n$

$b_{n+1}=b_n+2^n \quad (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$, $b_1=0$

$$\begin{array}{rl} & b_2=b_1+2 \\ & b_3=b_2+2^2 \\ & b_4=b_3+2^3 \\ & \vdots \\ + & b_n=b_{n-1}+2^{n-1} \\ \hline \end{array}$$

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=0+\frac{2\left(2^{n-1}-1\right)}{2-1}=\boxed{2^n-2} \qquad \therefore (나)=2^n-2=g(n)$$

$$f(5)+g(10)=2^5+2^{10}-2=1054$$

14) 정답 : ②

$A^3-E=0$ 이므로 $\quad (A-E)\left(A^2+A+E\right)=0$

양변의 왼쪽에 $(A-E)^{-1}$을 곱하면 $A^2+A+E=0$

$(A-E)^2=A^2-2A+E=-3A$

$(A-E)^{60}=(-3A)^{30}\quad=3^{30}\cdot E$

$\therefore$ 모든 성분의 합 $=2\cdot 3^{30}$

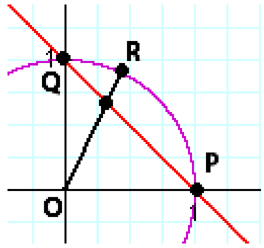
2014학년도 6월 평가원(B형) 해설지

15) 정답 : ④

$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ 이므로 점 $R(\cos\theta,\ \sin\theta)$

직선 OR: $y=\tan\theta\cdot x$

직선 PQ: $y=-x+1$



한편, 삼각형 OPQ와 삼각형 OPR의 공통부분의 넓이가 삼각형 OPQ의 넓이의 $\dfrac{2}{3}$배이기 위해서는 $\overline{OR}$와 $\overline{PQ}$의 교점의 y좌표가 $\dfrac{2}{3}$이어야 한다.

직선 OP와 직선 PQ의 방정식에서 $y=\dfrac{2}{3}$을 대입하면 $x=\dfrac{1}{3}$이고, $\tan\theta=2$

따라서 회전변환 f를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은 $2\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 이다.

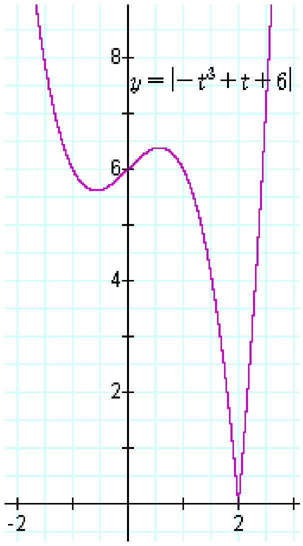
16) 정답 : ③

$g(t)=\dfrac{|t-t^3+6|}{\sqrt{2}}$

$h(t)=-t^3+t+6$

$h'(t)=-3t^2+1$

t		$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$			$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	
$h'(t)$	$-$	0	$+$		0	$-$
$h(t)$	↘		↗			↘



따라서 $y=g(t)$는 실수 전체에서 연속이며, 0이 아닌 극솟값을 가진다. ∴ ㄱ(참),ㄴ(참)

$t=2$에서는 접점이 생기므로 미분 불가능하다. ∴ ㄷ(거짓)

17) 정답 : ④

점 B의 x좌표를 b라 하면

$2^a=15\cdot 2^{-b}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면 $a=-b+\log_2 15$ 이므로 $b=-a+\log_2 15$

그러므로 $\overline{AB}=a-b=2a-\log_2^{15}$

$1<\overline{AB}<100$ 이므로 $1<2a-\log_2 15<100$

따라서 $\dfrac{1}{2}log_2 30<a<50+\dfrac{1}{2}\log_2 15$

$\log_2 16<\log_2 30<\log_2 32$이므로 $4<\log_2 30<5$이고,

$\log_2 8<\log_2 15<\log_2 16$ 이므로 $3<\log_2 15<4$ 이므로

$2.xx < a < 51.xx$ 이다.

$\therefore 3 \le a \le 51$ 이므로 2이상의 자연수 a의 개수는 49개

18) 정답 : ③

$x_k = 1 + \frac{k}{n}$, $f(x_k) = e^{1+\frac{k}{n}}$ 이므로 $A_k = \frac{1}{2} \cdot \left(1+\frac{k}{n}\right) \cdot e^{1+\frac{k}{n}}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} A_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right) e^{1+\frac{k}{n}}$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^2 x \cdot e^x \cdot dx$$
$$= \frac{1}{2}\left\{ \left[x \cdot e^x\right]_1^2 - \int_1^2 e^x \cdot dx \right\} = \frac{1}{2}e^2$$

19) 정답 : ②

기울기 m인 두 접선의 방정식을 $y = mx \pm \sqrt{1 \cdot m^2 \cdot 2}$ 이 점 $P(k,\ 2)$를 지나므로 $2 = mk \pm \sqrt{m^2+2}$

$(2-mk)^2 = m^2 + 2$

$(k^2-1)m^2 - 4k \cdot m + 2 = 0$

두 접선의 기울기의 곱이 $\frac{1}{3}$ 이므로 $m_1 \times m_2 = \frac{2}{k^2-1} = \frac{1}{3}$

$\therefore k^2 = 7$

20) 정답 : ④

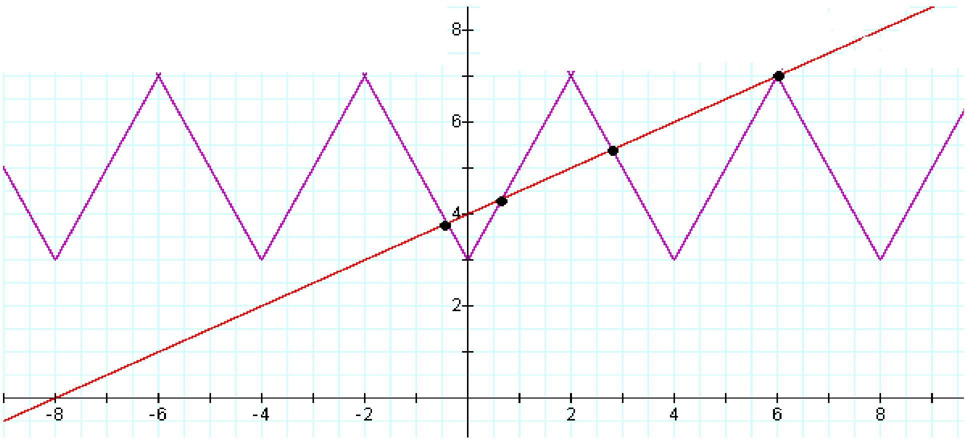
$f(x) - mx = t$로 치환하면 $\sqrt{t} = t - 2 \quad (t \geqq 2)$

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$(t-4)(t-1) = 0$ 이므로 $t = 4(\because t \geqq 2)$

$f(x) - mx = 4$ 이므로 $f(x) = mx + 4$

두 함수 $y = f(x)$, $y = mx + 4$의 두 교점의 개수가 4개 이하가 되도록 하는 m의 최솟값은 아래 그림에서처럼



$y=mx+4$가 점 $(6,\ 7)$ 을 지날 때 이다.

$\therefore 7=6m+4$

따라서 $m=\dfrac{1}{2}$

21) 정답 : ③

원 O의 중심을 좌표 평면상의 원점으로 가져 가면,

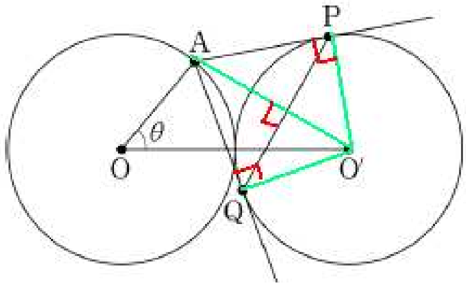
$A(\cos\theta, \sin\theta)$

원 O' : $(x-2)^2+y^2=1$

$AP^2=\overline{AO'}^2-1^2 = (\cos\theta-2)^2+\sin^2\theta-1$

$\square AQO'P=\overline{AP}\cdot\overline{PO'}=\dfrac{1}{2}\overline{AO'}\cdot\overline{PQ}$

$\therefore \overline{PQ}=2\dfrac{\overline{AP}\ \cdot\ 1}{\overline{AO'}}=2\dfrac{\sqrt{(\cos\theta-2)^2+\sin^2\theta-1}}{\sqrt{(\cos\theta-2)^2+\sin^2\theta}}=2\sqrt{\dfrac{4-4\cos\theta}{5-4\cos\theta}}$

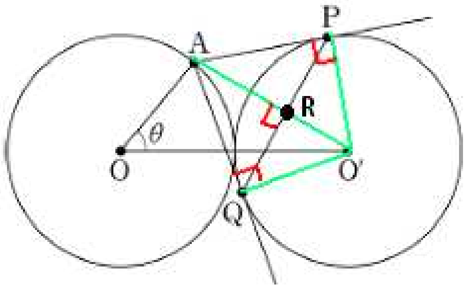


$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{PQ}}{\theta}=\lim_{\theta\to+0}2\sqrt{\frac{1}{\theta^2}\cdot\frac{4(1-\cos\theta)}{5-4\cos\theta}}=\lim_{\theta\to+0}2\sqrt{\frac{1}{\theta^2}\cdot\frac{4\sin^2\theta}{(5-4\cos\theta)(1+\cos\theta)}}=2\sqrt{2}$$

[별해]

$\triangle AOO'$ 에서 제2 코사인 법칙에 의해 $\overline{AO'}^2=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\cos\theta=5-4\cos\theta$

$\triangle AO'P$에서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{AP}^2=\overline{AO'}^2-1^2=4-4\cos\theta$



$\triangle ARP \backsim \triangle APO'$ 이므로 $\overline{AP}:\overline{PR}=\overline{AO'}:\overline{PO'}$

따라서 $\sqrt{4-4\cos\theta}:\overline{PR}=\sqrt{5-4\cos\theta}:1$ 에서 $\overline{PR}=\sqrt{\dfrac{4-4\cos\theta}{5-4\cos\theta}}$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{PQ}}{\theta}=\lim_{\theta\to+0}2\sqrt{\frac{1}{\theta^2}\cdot\frac{4(1-\cos\theta)}{5-4\cos\theta}}=\lim_{\theta\to+0}2\sqrt{\frac{1}{\theta^2}\cdot\frac{4\sin^2\theta}{(5-4\cos\theta)(1+\cos\theta)}}=2\sqrt{2}$$

22) 정답 : 22

$a_2+a_5=(a_3-d)+(a_3+2d)=20+d=24$

$\therefore d=4,\ a_6=a_3+3d=10+12=22$

2014학년도 6월 평가원(B형) 해설지


신동훈샘

23) 정답 : 12

로피탈 정리에 의해 $\lim_{x \to 0}(2 \cdot e^{2x} + 10) = 12$

24) 정답 : 16

$V_2 = V_1 \times \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ 에서 $8 = 2 \times \left(\frac{36}{12}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ $\therefore 4 = 3^{\frac{2}{2-k}}$

$b = a \times \left(\frac{90}{10}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ 에서 $\frac{b}{a} = \left(3^{\frac{2}{2-k}}\right)^2 = 4^2 = 16$

25) 정답 : 7

준식의 양변을 $\sqrt{2}$ 로 나누면 $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2}$

삼각함수 합성에 의하여 $2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$ $(0 \le x \le 2\pi)$

$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$

$x = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right)$ 이므로 모든 실근의 합은 $\frac{4\pi}{3}$

$\therefore p + q = 3 + 4 = 7$

26) 정답 : 450

a_n과 a_{n+1}은 숫자배열이 같다.

$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < 100$ 이므로 $\frac{1}{100} \cdot a_n < a_{n+1} < a_n$ $\therefore a_{n+1} = \frac{1}{10} \cdot a_n$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_n}{1 - \frac{1}{10}} = 500$ 이므로 $a_1 = 450$

27) 정답 : 9

$x - t = k$ 이므로 $-dt = dk$

$\therefore F(x) = \int_x^0 (x-k)f(k)(-dt) = \int_0^x (x-k)f(k) \cdot dk = x \cdot \int_0^x f(k)dk - \int_0^k k \cdot f(k) \cdot dk$

$\therefore F'(x) = \int_0^x f(k)dk + xf(x) - x \cdot f(x) = \int_0^x f(k)dk$

$F'(a) = \int_0^a f(k) \cdot dk = \ln 10$ 이므로 $\int_0^a \frac{1}{1+k}dk = \ln 10$

$[\ln(1+k)]_0^a = \ln(1+a) = \ln 10$ 이므로 $a = 9$

28) 정답 : 10

$g(x)=a(x+1)(x-2)$ (단, $a>0$) 이므로 $g(x-2)=a(x-1)(x-4)$

$f(x)-g(x-2)=b(x+2)(x-1)(x-2)(x-6)$

따라서 $\dfrac{f(x)}{g(x-2)}\le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{f(x)-g(x-2)}{g(x-2)}\le 0$

$\dfrac{b(x+2)(x-1)(x-2)(x-6)}{a(x-1)(x-4)}\le 0$ 이므로 $(x+2)(x-2)(x-6)(x-4)\le 0 \quad (x\ne 1,4)$

$-2\le x<1,\quad 1<x\le 2,\quad 4<x\le 6$

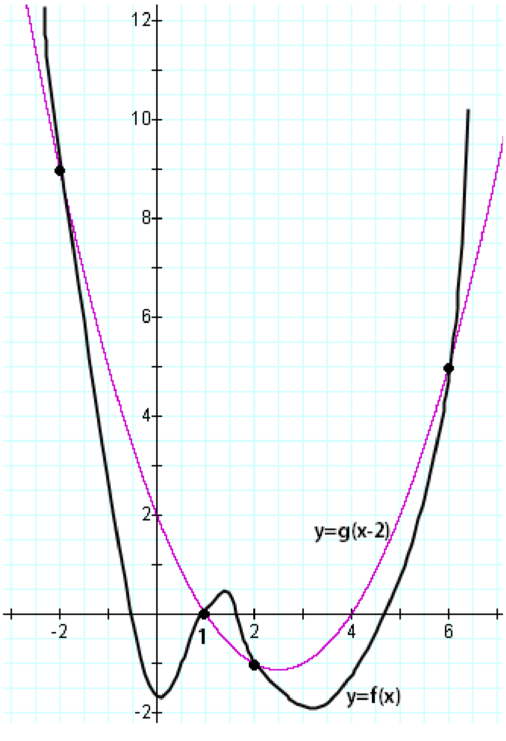
정수 $x=-2,\ -1,\ 0,\ 2,\ 5,6$

총합 $=10$

[별해]

$f(x)\cdot g(x)\leqq \{g(x-2)\}^2,\qquad g(x-2)\neq 0$

$g(x-2)\{f(x)-f(x-2)\}\leqq 0$



i) $g(x-2)<0,\quad f(x)\geqq g(x-2)$

$1<x<4$이고, $x\leqq -2,\quad 1<x\leqq 2,\quad x\geqq 6$

$\therefore 1<x\leqq 2$이므로 정수 $x=2$

ii) $g(x-2)>0,\ f(x)\leqq g(x-2)$

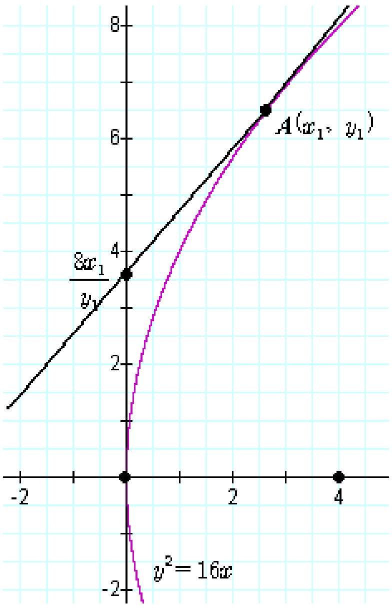
($x<1$ 또는 $x>4$) 이고, $(-2\leqq x\leqq 1$ 또는 $2\leqq x\leqq 6)$

$\therefore -2\leqq x<1,\quad 4<x\leqq 6$

정수 $x=-2,-1,0,\ 5,\ 6$

이상 ⅰ) 과 ⅱ)에 의하여 정수 x의 총합 $=10$

29) 정답 : 14



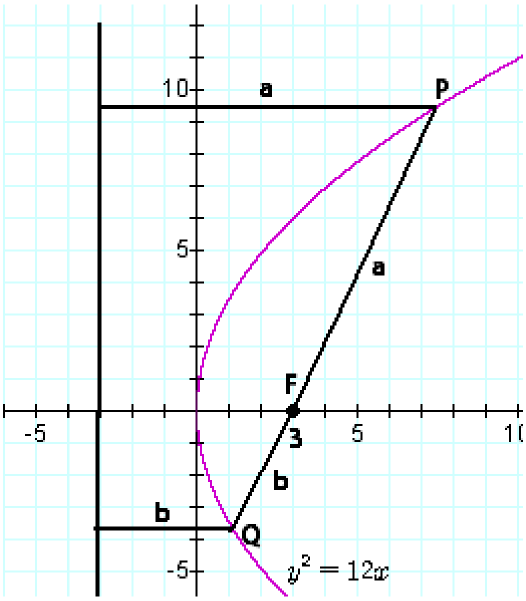
점 $A(x_1,\ y_1)$에서의 접선 $y_1y=8(x+x_1)$ 이므로 y절편 $\left(0,\ \frac{8x_1}{y_1}\right)$

점 $B\left(\frac{x_1}{3},\ \frac{8x_1}{y_1}\right)=(X,\ Y)$ 라 하면

$x_1=3X$, $y_1=\frac{24X}{Y}$ 이고, $y_1^2=16x_1$에 대입하면

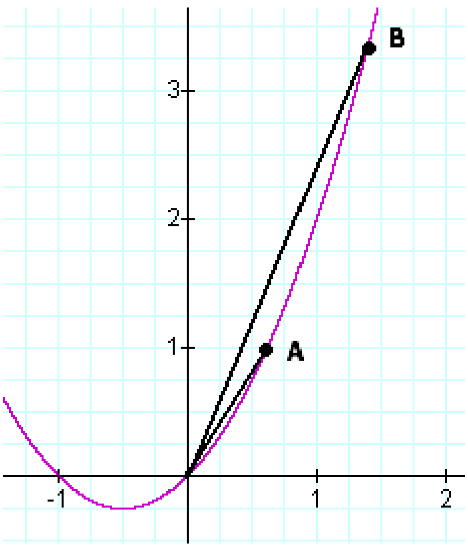
$\therefore \left(\frac{24X}{Y}\right)^2=16\cdot 3X$

$\therefore Y^2=12\cdot X$



두 점 P, Q의 x좌표의 값의 합은 $(\overline{PF} - 3) + (\overline{QF} - 3) = 20 - 6 = 14$

30) 정답 : 109



$$k = \frac{1}{2} \cdot t \cdot (t^2 + t) - \frac{1}{2} \cdot s(s^2 + s) - \int_s^t (x^2 + x)dx$$

$$= \frac{1}{2}(t^3 + t^2) - \frac{1}{2}(s^3 + s^2) - \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_s^t = \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{6}s^3$$

$$\therefore t^3 = s^3 + 6k$$

$(s, t) \sim (1, 0)$거리의 제곱의 값을 $f(s)$라 하면,

$$(s-1)^2+t^2=(s-1)^2+\left(s^3+6k\right)^{\frac{2}{3}}=f(s)$$

$s=\dfrac{2}{3}$ 일 때 거리가 최소이므로 $f'\left(\dfrac{2}{3}\right)=0$ 이 된다.

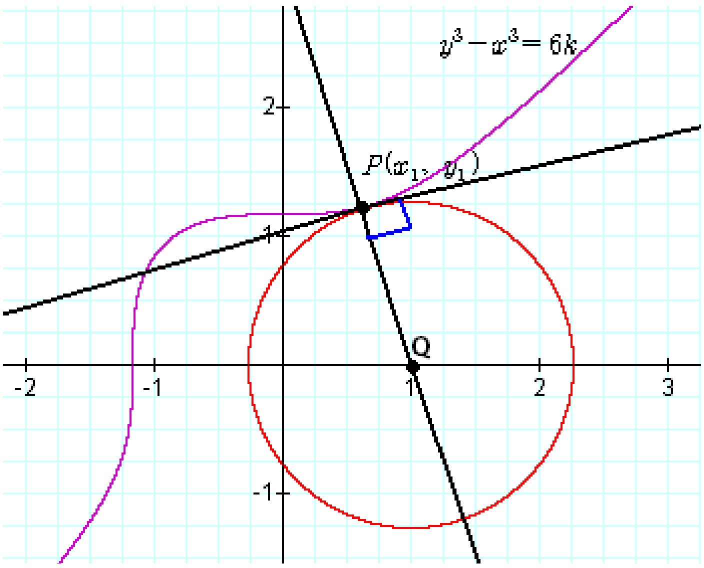
따라서 $\quad f'(s)=2(s-1)+\dfrac{2}{3}(s^3+6k)^{-\frac{1}{3}}\cdot 3\cdot s^2$

$f'\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{8}{27}+6k\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{4}{3}=0$ 에서 $\left(\dfrac{8}{27}+6k\right)^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}$ 이다.

$\dfrac{8}{27}+6k=\dfrac{64}{27}$ 이고, $\quad 6k=\dfrac{64-8}{27}=\dfrac{56}{27}$ 이므로 $\quad k=\dfrac{56}{27}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{28}{81}$

$\therefore p+q=109$

[보충설명]



그림에서 점 $Q(1,0)$에서 가장 가까운 곡선 C위의 점을 $P(x_1,y_1)$ 이라 하면 그림에서처럼 원과 곡선 C가 접하게 된다.
그러므로 법선이 점 $Q(1,0)$을 지난다.

$y^3-x^3=6k$를 미분하면 $3y^2\dfrac{dy}{dx}-3x^2=0 \qquad \therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{y^2}$

따라서 법선의 방정식은 $y-y_1=-\dfrac{y_1^2}{x_1^2}(x-x_1)$이고, 문제 조건에서 $x_1=\dfrac{2}{3}$이다.

여기에 $(1,0)$을 대입하고 정리하면 $y_1=\dfrac{4}{3}$

$$\therefore k=\frac{y_1^3-x_1^3}{6}=\frac{28}{81}$$