

* 위 문제는 오르비클래스 신동훈샘이 수험생을 위해 직접 만든 것입니다.

[EBS수능특강 p.15 **신유형** 변형]

1. 두 이차정사각행렬 A, B 가 $A^2 = E, B^2 = B$ 를 만족시킬 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, E 는 단위행렬이다.) 1)

- ㄱ. 행렬 B 가 역행렬을 가지면 $B = E$ 이다.
- ㄴ. 행렬 A 의 모든 성분의 합이 1이면, 행렬 $(A - E)^{2013}$ 의 모든 성분의 합은 -2^{2012} 이다.
- ㄷ. $(E - ABA)^2 = E - ABA$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[EBS수능특강 p.15 **신유형** 변형]

2. 영행렬이 아닌 이차정사각행렬 A 가 $A^2 = 3A$ 를 만족시킨다. 모든 자연수 n 에 대하여 행렬 $(A - E)^n$ 을 $(A - E)^n = a_n A + (-1)^n E$ (단, $a_1 = 1$)와 같이 나타낼 때, a_{10} 을 구하여라.2)

3. 영행렬이 아닌 이차정사각행렬 A 가 $A^2 = 3A$ 를 만족시킨다.

다음은 모든 자연수 n 에 대하여 행렬 $(A - E)^n$ 을

$$(A - E)^n = a_n A + (-1)^n E$$

와 같이 나타낼 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정이다. (단, E 는 단위행렬이다.)

자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} (A - E)^{n+1} &= \{a_n A + (-1)^n E\}(A - E) \\ &= a_n A^2 - a_n A + (-1)^n A + (-1)^{n+1} E \end{aligned}$$

이고, $A^2 = 3A$ 이므로

$$(A - E)^{n+1} = (2a_n + \boxed{\text{(가)}})A + (-1)^{n+1}E$$

이다. 그러므로

$$a_{n+1} = 2a_n + \boxed{\text{(가)}} \dots\dots \textcircled{가}$$

이다. 따라서 2이상인 자연수 n 에 대하여

$$a_n + a_{n+1} = 2(a_{n-1} + a_n)$$

이다. 또한 $a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$ 이므로 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n + a_{n+1} = \boxed{\text{(나)}} \dots\dots \textcircled{나}$$

$$\textcircled{가} \text{과 } \textcircled{나} \text{에 의해 } 3a_n + (-1)^n = \boxed{\text{(나)}} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } a_n = \frac{\boxed{\text{(나)}} + (-1)^{n+1}}{3} \text{ 이다.}$$

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 할 때, $f(9) \times g(5)$ 의 값은? ³⁾

[3점] [2014학년도 예비시행]

- ① -32 ② -16 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

[EBS수능특강 p.23 변형]

4. 영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B 에 대하여

$$A + B = 2E, A^2 = 3A$$

일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.)⁴⁾

■ 보기 ■

ㄱ. $B^2 = B + 2E$

ㄴ. 행렬 $A - 2E$ 의 역행렬이 존재한다.

ㄷ. 모든 자연수 n 에 대하여 행렬 $(A - B)^n$ 의 역행렬이 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[EBS수능특강 p.23 변형]

5. 두 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 $AB = BA$ 가 성립하기 위한 충분조건인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?(단, E 는 단위행렬이고, O 는 영행렬이다.)⁵⁾

ㄱ. $A^2 + AB + BA + B^2 = O$

ㄴ. $A^2 + 2BA + AB + 2B^2 = E$

ㄷ. $(A - B)^2 = B$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[EBS수능특강 p.23 변형]

6. 역행렬을 갖는 두 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 $AB=BA$ 가 성립하기 위한 충분조건인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이고, O 는 영행렬이다.)6)

[보 기]

\neg . $2AB - A^2 = E$
 \sphericalangle . $2BA - B^2 = A$
 \sqsubset . $A^2 + 2AB + 2BA + 4B^2 = E$

- ① \neg ② \neg, \sphericalangle ③ \neg, \sqsubset
 ④ $\sphericalangle, \sqsubset$ ⑤ $\neg, \sphericalangle, \sqsubset$

[EBS수능특강 p.28 **신유형** 변형]

7. 13 이하의 자연수 n 에 대하여 행렬 A_n 을

$$A_n = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos \frac{n}{4}\pi & 1 - \cos \frac{n}{4}\pi \\ 1 & -1 + \cos \frac{n}{4}\pi \end{pmatrix}$$

라 하자. x, y 에 대한 연립일차방정식 $A_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 을 만족시키는 순서쌍 (x, y) 의 개수를 $f(n)$ 이라

할 때, $\sum_{k=1}^{13} f(k)$ 의 값은?7)

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[EBS수능특강 p.29 변형]

8. 이차정사각행렬 A 에 대하여 $A^3 = O$ 일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이고, O 는 영행렬이다.)⁸⁾

■ 보기 ■

- ㄱ. 행렬 $A = O$ 이다.
- ㄴ. 행렬 $A^2 = O$ 이다.
- ㄷ. 행렬 $A^2 + E$ 의 역행렬이 존재한다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄷ
- ④ ㄱ, ㄴ
- ⑤ ㄴ, ㄷ

[EBS수능특강 p.29 **신유형** 변형]

9. 역행렬이 존재하는 두 이차정사각행렬 A, B 가 다음 조건을 만족시킬 때, 행렬 $BA^{200}B^{-1}$ 의 모든 성분의 합은? (단, E 는 단위행렬이다.)⁹⁾

- (가) $B^2 = E$
- (나) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} B = (A^2 B^{-1})^{-1}$

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

[EBS수능특강 p.29 변형]

10. 두 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 $AB = E, A^2 - A + E = O$ 가 성립할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?(단, E 는 단위행렬이고, O 는 영행렬이다.)¹⁰⁾

\neg . $A + B = E$
 \sphericalangle . $B^2 = B - E$
 \supset . $A^{100} + B^{100} = -E$

- ① \neg ② \sphericalangle ③ \neg, \sphericalangle
 ④ \sphericalangle, \supset ⑤ $\neg, \sphericalangle, \supset$

[EBS수능특강 p.37 **신유형** 변형]

11. 한 꼭짓점에서 자기 자신으로 가는 변이 없고, 두 꼭짓점 사이에 많아야 한 개의 변이 있는 그래프 G 의 꼭짓점을 A, B, C, D, E, F 라 하자. 그래프 G 의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬을 M 이라 할 때, 두 행렬 M 과 M^2 은 다음과 같다.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & A & B & C & D & E & F \\
 A & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 B & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 C & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 D & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 E & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a \\
 F & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0
 \end{array} \\
 \text{행렬 } M
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & A & B & C & D & E & F \\
 A & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 B & 1 & b & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 C & 1 & 0 & c & 1 & 0 & 0 \\
 D & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\
 E & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
 F & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d
 \end{array} \\
 \text{행렬 } M^2
 \end{array}$$

이 때, $a + b + c + d$ 의 값은?¹¹⁾

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

[EBS수능특강 p.40 변형] 2013학년도 6평 유사

12. 2보다 큰 자연수 n 에 대하여 $(-2)^{n-1}$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 a_n 이라 할 때,

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{q}{p} \text{이다. 이 때, } p+q \text{의 값을 구하시오.}^{12)}$$

[2013학년도 6월 평가원]

2보다 큰 자연수 n 에 대하여 $(-3)^{n-1}$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ 의 값은? ¹³⁾

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[EBS수능특강 p.40 변형]

13. 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(a,n)$ 이라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?(단, n 은 2이상의 자연수이다.)¹⁴⁾

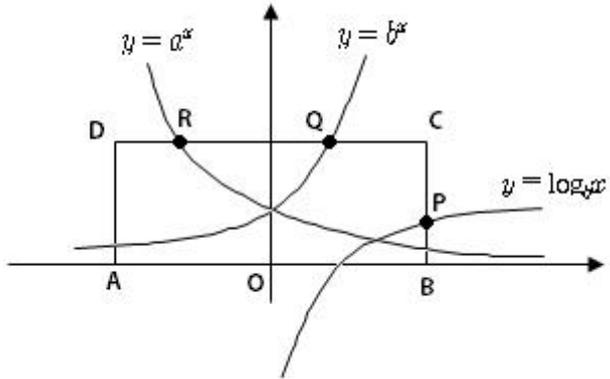
■ 보기 ■

ㄱ. $f(a, 2n) = 0$ 이면 $a < 0$ 이다.
 ㄴ. $f(a+2, 2n) = f(a, 2n-1)$ 을 만족시키는 실수 a 의 값이 존재한다.
 ㄷ. $a < 0$ 이면 $f(a, n+1) < f(a^2, n)$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[EBS수능특강 p.59 변형]

14. 두 지수함수 $y = a^x$, $y = b^x$ 의 그래프가 그림과 같다. $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 2)$, $D(-2, 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 직사각형 $ABCD$ 가 있다. $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b > \sqrt{2}$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 함수 $y = \log_b x$ 의 그래프가 변 BC 와 만나는 점을 P , 함수 $y = b^x$ 의 그래프가 변 CD 와 만나는 점을 Q , 함수 $y = a^x$ 의 그래프와 변 CD 와 만나는 점을 R 이라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? 15)



- ㉠. $ab = 1$ 이면 $\overline{CQ} = \overline{DR}$ 이다.
- ㉡. $ab < 1$ 이면 $\overline{CP} < \overline{DR}$ 이다.
- ㉢. $ab > 1$ 이면 $\overline{OP} > \overline{OR}$ 이다.

- ① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

[EBS수능특강 p.59 변형] 2013학년도 6평 변형

15. 양수 a 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 n^a 의 값을 $f(n)$ 이라 하자.

두 점 $(0, 2)$, (a, n^a) 를 지나는 직선의 기울기는 2보다 크거나 같다.

예를 들어 $f(3) = 5$ 이다. $\sum_{n=2}^{30} f(n)$ 의 값을 구하시오. 16)

[EBS수능특강 p.70 변형]

16. 양의 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 를 $f(x) = \log x - [\log x]$ 라 할 때, 부등식 $f(n) < f\left(\frac{1}{2}\right)$ 를 만족하는 1000 미만의 자연수 n 의 개수를 구하시오. 17)

[EBS수능특강 p.71 변형]

17. 양수 x 에 대하여 $\log x$ 의 가수를 $f(x)$ 라 하자. a, b 가 두 자리의 자연수일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?18)

[보 기]

ㄱ. $a < b < c$ 이면 $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} > \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$ 이다.

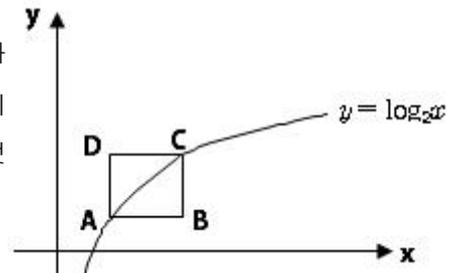
ㄴ. $f(a^3) = f(a)$ 이면 $f(a^2) = 0$ 이다.

ㄷ. $f(ab) = 0$ 이면 $f(a) = 0$ 또는 $f(b) = 0$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 정의역이 $x \geq 1$ 이고 함숫값이 $\log x$ 의 지표인 함수를 $f(x)$ 라 하자. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{n} - 2$ 가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하시오.19)

19. 오른쪽 그림과 같이 정사각형 $ABCD$ 의 두 꼭짓점 A, C 가 곡선 $y = \log_2 x$ 위에 있다. 정사각형 $ABCD$ 의 한 변의 길이를 a 라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?20)



■ 보 기 ■

- ㄱ. 한 변이 x 축 위에 있는 정사각형이 존재한다.
 ㄴ. $a = 2$ 인 정사각형은 1개 존재한다.
 ㄷ. 제 1사분면 영역 안에 $a > 1$ 인 정사각형이 있다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[EBS수능특강 p.83 **신유형** 변형]

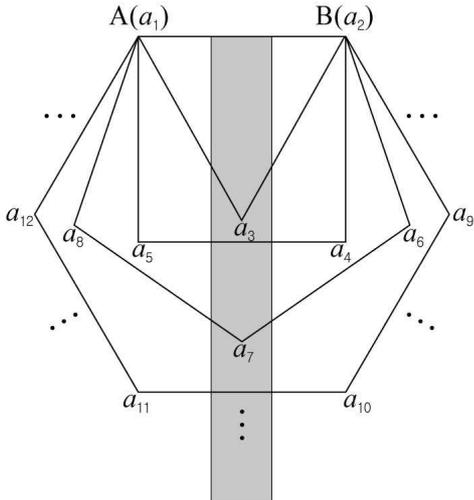
20. 자연수 n 에 대하여 곡선 $y = \log_2 x$ 의 점 $(n, \log_2 n)$ 과 곡선 $y = 2^x$ 의 점 $(\log_2 n, n)$ 을 잇는 선분에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 a_n 이라 하자. 이때 $\sum_{n=1}^{2013} a_n$ 의 값은?21)

- ① 2000 ② 2003 ③ 2006 ④ 2009 ⑤ 2012

[EBS수능특강 p.108 변형]

21. 자연수 n 에 대하여 $P(0, 4n)$ 을 지나는 직선과 원 $x^2 + y^2 = 25n^2$ 이 만나서 생기는 선분 중 길이가 정수인 것의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n^2+n)} = \frac{b}{a}$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.(단, a, b 는 서로소인 자연수이다.)22)

22. 그림과 같이 선분 AB를 한 변으로 하는 정 n 각형을 차례로 그린다. 등차수열 $\{a_k\}$ 에 대하여 선분 AB의 양 끝점에 각각 a_1, a_2 를 대응시키고, 정삼각형의 꼭짓점 중 점 A, B를 제외한 꼭짓점에 a_3 , 정사각형의 꼭짓점 중 점 A, B를 제외한 두 꼭짓점에 a_4, a_5 를 대응시킨다. 이와 같은 과정을 계속하여 정 n 각형의 꼭짓점 중 점 A, B를 제외한 꼭짓점에 시계방향으로 a_k 를 대응시키자. $a_1 + a_2 + a_3 = 3, a_2 + a_5 + a_6 + a_7 = 28$ 일 때, 어두운 부분에 배열된 숫자들 중 정십삼각형의 꼭짓점에 대응되는 수를 구하시오.²³⁾ [4점]



23. 실수 전체에서 정의된 함수 $f(x) = 2x - 1$ 에 대하여 $\{a_n\}$ 을

$$a_1 = 3, a_{n+1} = (f \circ f \circ f)(a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

으로 정의할 때, $\sum_{k=1}^{30} \frac{1}{\log_2(a_k - 1)\log_2(a_{k+1} - 1)} = \frac{q}{p}$ 이다. 이 때, $p + q$ 의 값을 구하시오.²⁴⁾

[EBS수능특강 p.121 **신유형** 변형]

24. 자연수 n 에 대하여 상용로그 $\log 2^n$ 의 지표를 a_n 이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$ 을

$$b_n = \begin{cases} 2 & (a_{n+1} > a_n) \\ 0 & (a_{n+1} = a_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

으로 정의한다. $\sum_{k=1}^{200} b_k$ 의 값은?

(단, $\log 2 = 0.3010$ 이다.)²⁵⁾

[EBS수능특강 p.118 변형] 2013학년도 수능 유사

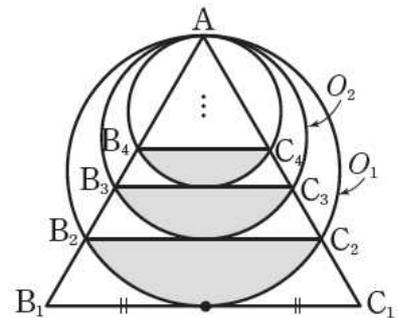
25. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 4$ 이고, $a_{n+1} = n \cdot 2^n + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k}$ ($n \geq 1$)을 만족시킬 때, a_7 을 구하시오. ²⁶⁾

26. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $0 < a_n < \pi$
- (나) $a_{n+1} \neq \frac{a_n}{2}$ 이고 $\cos 2a_{n+1} = \cos a_n$ 이다.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{q}{p}\pi$ 일 때, $10p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)²⁷⁾

27. 그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 AB_1C_1 이 있다. 점 A 를 지나고 선분 B_1C_1 의 중점에서 선분 B_1C_1 과 접하는 원 O_1 이 두 선분 AB_1 , AC_1 과 만나는 점을 각각 B_2 , C_2 라 하자. 또, 점 A 를 지나고 선분 B_2C_2 의 중점에서 선분 B_2C_2 와 접하는 원 O_2 가 두 선분 AB_2 , AC_2 와 만나는 점을 각각 B_3 , C_3 이라 하자. 같은 방법으로 원 O_n 과 점 B_{n+1} , C_{n+1} 을 정해나갈 때, 원 O_n 의 내부와 사다리꼴 $B_nC_nC_{n+1}B_{n+1}$ 의 내부의 공통 부분의 넓이를 S_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{p\pi - q\sqrt{3}}{7}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p , q 는 자연수이다.)²⁸⁾



- * EBS 수능특강 신유형, 고난도 변형문제 강좌를 수강하고자 하는 사람은 오르비클래스에 접속하세요.
- * 수1, 수2, 적통, 기백 각 약점 및 고난도 주제를 정리하고 하는 사람은 오르비클래스 신동훈샘의 “킬러문항 집중탐구 강좌”를 추천합니다. <http://class.orbi.kr/group/3/info>

1) 정답 : ㉔

$$\neg. B^2 = B \text{의 양변에 } B^{-1} \text{을 곱하면 } B^{-1}B^2 = B^{-1}B \quad \therefore B = E \text{(참)}$$

ㄴ. 조건 (가)에서 $A^2 = E$ 이므로

$$(A - E)^2 = A^2 - 2A + E = -2(A - E) = E - 2A + E$$

$$(A - E)^3 = (A - E)^2(A - E) = -2(A - E)(A - E) = 2(A - E)^2 = (-2)^2(A - E)$$

$$(A - E)^4 = (A - E)^3(A - E) = (-2)^2(A - E)(A - E) = (-2)^2(A - E)^2 = (-2)^3(A - E)$$

⋮

$$(A - E)^{2013} = (-2)^{2013}(A - E) = 2^{2012}(A - E)$$

이때, 조건에서 행렬 A 의 모든 성분의 합이 1이고, 단위행렬 E 의 모든 성분의 합은 2이므로 행렬 $A - E$ 의 모든 성분의 합은 $1 - 2 = -1$ 이다.

따라서 행렬 $(A - E)^{2013}$ 의 모든 성분의 합은 -2^{2012} 이다.

$$\ni. (E - ABA)^2 = E - 2ABA + (ABA)^2$$

이 때, $(ABA)^2 = (ABA)(ABA) = ABA^2BA = ABEBA = AB^2A = ABA$ 이므로

$$(E - ABA)^2 = E - 2ABA + ABA = E - ABA \text{(참)}$$

이상에서 옳은 것은 \neg, \ni, \ni 이다.

2) 정답 : 341

자연수 n 에 대하여

$$(A - E)^{n+1} = \{a_n A + (-1)^n E\}(A - E) = a_n A^2 - a_n A + (-1)^n A + (-1)^{n+1} E \text{이고, } A^2 = 3A \text{이므로}$$

$$(A - E)^{n+1} = \{2a_n + (-1)^n\} A + (-1)^{n+1} E \text{이다.}$$

$$\text{그러므로 } a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n \text{ 이다.}$$

$$\text{양변을 } 2^{n+1} \text{으로 나누면 } \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \text{ 이므로}$$

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

$$\therefore a_{10} = 341$$

3) 정답 : ㉑

자연수 n 에 대하여

$$(A - E)^{n+1} = \{a_n A + (-1)^n E\}(A - E)$$

$$= a_n A^2 - a_n A + (-1)^n A + (-1)^{n+1} E$$

$$= 3a_n A - a_n A + (-1)^n A + (-1)^{n+1} E (\because A^2 = 3A)$$

$$= (2a_n + (-1)^n) A + (-1)^{n+1} E$$

$$= a_{n+1} A + (-1)^{n+1} E$$

이다. 그러므로 $a_{n+1} = 2a_n + \boxed{(-1)^n}$ ㉠

이다. 따라서 2 이상인 자연수 n 에 대하여

$$a_n + a_{n+1} = 2(a_{n-1} + a_n) \text{ 이다.}$$

또한 $a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$ 이므로 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 은 초항이 2, 공비가 2 인 등비수열이다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n + a_{n+1} = \boxed{2^n}$ ㉡

이다. ㉠ 과 ㉡ 에 의해 $3a_n + (-1)^n = \boxed{2^n}$

이다. 따라서 $a_n = \frac{\boxed{2^n} + (-1)^{n+1}}{3}$ 이다.

4) 답 ㉤

ㄱ. $A + B = 2E$ 에서 $A = 2E - B$

$A^2 = 3A$ 에서 $(2E - B)^2 = 3(2E - B)$, $B^2 - B - 2E = 0$

$\therefore B^2 = B + 2E$ (참)

ㄴ. $A^2 - 3A = 0$ 에서 $(A - 2E)(A - E) = 2E$

$\therefore (A - 2E)^{-1} = \frac{1}{2}(A - E)$ (참)

ㄷ. $A - B = A - (2E - A) = 2(A - E)$

위 (ㄴ)에서 $(A - E)^{-1} = \frac{1}{2}(A - 2E)$ 이므로 $(A - B)$ 의 역행렬은 존재한다.

따라서 $(A - B)^n$ 의 역행렬 존재. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

5) [정답] ㉤

ㄱ. (거짓) $A^2 + AB + BA + B^2 = O \Leftrightarrow (A + B)^2 = O$

(반례) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이라 하면 $(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = O$ 이 성립하지만

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore AB \neq BA$

따라서 충분조건이 아니다.

ㄴ. (참) . $A^2 + 2BA + AB + 2B^2 = E$ 을 정리하면 $(A + 2B)(A + B) = E$

즉, 행렬 $A + B$ 는 행렬 $A + 2B$ 의 역행렬이므로 $(A + B)(A + 2B) = (A + 2B)(A + B)$

$\therefore AB = BA$ 따라서 충분조건이다.

ㄷ. (참) $(A - B)^2 = B$ 에서 양변의 오른쪽에 $(A - B)$ 를 곱하면 $(A - B)^3 = B(A - B)$

$(A - B)^2 = B$ 에서 양변의 왼쪽에 $(A - B)$ 를 곱하면 $(A - B)^3 = (A - B)B$ 이다.

따라서 $B(A - B) = (A - B)B$ 이므로 $AB = BA$ 이다.

6) [정답] ㉡

ㄱ. (참) $2AB - A^2 = E$ 에서 $A(2B - A) = E$ 이므로 $A(2B - A) = (2B - A)A = E$ 이다. (아래 참고 내용)

따라서 $2AB - A^2 = 2BA - A^2$ 이므로 $AB = BA$

<참고> $AX = E$ 이면 $\det(AX) = \det(A)\det(X) = 1$ 이므로 A^{-1} 존재한다.

따라서 $AX = E$ 의 양변에 A^{-1} 를 곱하면 $X = A^{-1}E$

$$\therefore XA = A^{-1}A = AX = E$$

ㄴ. (참) $2BA - B^2 = A$ 의 양변의 오른쪽에 A^{-1} 를 각각 곱하면

$$2B - B^2A^{-1} = E$$

$$B(2E - BA^{-1}) = E$$

따라서 $B(2E - BA^{-1}) = (2E - BA^{-1})B = E$

$$2B - B^2A^{-1} = 2B - BA^{-1}B$$

$$\therefore B^2A^{-1} = BA^{-1}B$$

$$\therefore BA^{-1} = A^{-1}B \text{ 이므로 } AB = BA$$

ㄷ. (거짓) $A^2 + 2AB + 2AB + 4B^2 = E \iff (A + 2B)^2 = E$

$(A + 2B)^2 = E$ 으로부터 $AB = BA$ 를 도출하는 것은 불가능.

즉, $(A + 2B)^2 = E$ 이라고 해서 $AB = BA$ 이라는 보장은 없다. 따라서 반례 존재.

(반례) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 이라 하면 $(A + 2B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E$ 가 성립하지만

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore AB \neq BA$$

그러므로 $AB = BA$ 가 성립하기 위한 충분조건인 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

7) 답 ③

$$\text{행렬 } A_n = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos \frac{n}{4} \pi & 1 - \cos \frac{n}{4} \pi \\ 1 & -1 + \cos \frac{n}{4} \pi \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \left(\sqrt{2} \cos \frac{n}{4} \pi \right) \left(-1 + \cos \frac{n}{4} \pi \right) - \left(1 - \cos \frac{n}{4} \pi \right) \cdot 1 = \sqrt{2} \cos^2 \frac{n}{4} \pi - (\sqrt{2} - 1) \cos \frac{n}{4} \pi - 1 \\ &= \left(\sqrt{2} \cos \frac{n}{4} \pi + 1 \right) \left(\cos \frac{n}{4} \pi - 1 \right) \end{aligned}$$

$\det(A) = 0$ 인 경우에는 연립일차방정식 $A_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 이 나타내는 두 직선이 평행하므로 연립일차방정식의 해는 존재하지 않는다.

한편, $\det(A) \neq 0$ 인 경우에는 행렬 A_n 의 역행렬이 존재하므로 연립일차방정식은 오직 한 쌍의 해를 갖는다.

(i) $\det(A) = 0$ 인 경우

$$\cos \frac{n}{4} \pi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 또는 } \cos \frac{n}{4} \pi = 1$$

$$\cos \frac{n}{4} \pi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 에서 } \frac{n\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, 2\pi + \frac{3\pi}{4}, 2\pi + \frac{5\pi}{4} \text{ 이므로 } f(3) = f(5) = f(11) = f(13) = 0$$

$$\cos \frac{n}{4} \pi = 1 \text{ 에서 } \frac{n\pi}{4} = 2\pi \text{ 이므로 } f(8) = 0$$

(ii) $\det(A) \neq 0$ 인 경우

$$\cos \frac{n}{4}\pi \neq -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 이고 } \cos \frac{n}{4}\pi \neq 1$$

$$\therefore f(1) = f(2) = f(4) = f(6) = f(7) = f(9) = f(10) = f(12) = 1$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \sum_{k=1}^{13} f(k) = 8$$

8) 답 ⑤

$$\det(A^3) = \{\det(A)\}^3 = 0 \text{ 이므로 } \det(A) = ad - bc = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{라 두면 } ad - bc = 0 \text{ 이므로 케일리-해밀턴 정리에 의해 } A^2 = (a+d)A \dots \textcircled{1}$$

$$O = A^3 = (a+d)A^2 = (a+d)^2 A$$

$$\therefore a+d=0 \text{ 또는 } A=O$$

ㄱ. $A^3 = O$ 이면 $a+d=0$ 이거나 $A=O$ 이다.

그런데 $a+d=0$ 인 경우, $A \neq O$ 이어도 된다. (거짓)

ㄴ. $a+d=0$ 인 경우, ①식에 대입하면 $A^2 = O$ 성립

$A=O$ 인 경우, 항상 $A^2 = O$ (참)

ㄷ. $A^3 = O$ 에서 $A^4 = O$ 이므로

$$A^4 - E = -E \Leftrightarrow (A^2 + E)(A^2 - E) = -E$$

$$\Leftrightarrow (A^2 + E)(E - A^2) = E$$

$$\therefore (A^2 + E)^{-1} = E - A^2$$

따라서 행렬 $A^2 + E$ 의 역행렬이 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

9) 답 ②

$$\text{조건 (가)에서 } B^2 = E \text{ 이므로 } B^{-1} = B \dots \textcircled{1}$$

$$\text{한편, } (A^2 B^{-1})^{-1} = B(A^2)^{-1} \text{ 이므로 조건 (나)에서 } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} B = B(A^2)^{-1} \dots \textcircled{2}$$

②의 양변의 오른쪽에 B^{-1} 를 각각 곱하여 정리하면

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = B(A^2)^{-1} B^{-1} = (BA^2 B^{-1})^{-1}$$

$$\text{그런데 } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \text{ 이고,}$$

$$(BA^2 B)^{-1} = - \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \text{ 이므로 } BA^2 B = - \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

한편, $BA^2 B = BA^2 B^{-1}$ 이고 $BA^{200} B^{-1} = (BA^2 B^{-1})^{100}$ 이므로

$$BA^{200} B = (BA^2 B^{-1})^{100} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{100\pi}{3}\right) & -\sin\left(-\frac{100\pi}{3}\right) \\ \sin\left(-\frac{100\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{100\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \text{ 이므로}$$

행렬 $BA^{200}B^{-1}$ 의 모든 성분의 합은 $2\cos\left(\frac{100\pi}{3}\right) = 2\cos\frac{4\pi}{3} = -1$

10) [정답] ⑤

ㄱ. (참) $A^2 - A + E = O$ 의 양변의 오른쪽에 B 를 각각 곱하면

$$A^2B - AB + B = O$$

이때, $AB = E$ 이므로 $A - E + B = O \quad \therefore A + B = E$

ㄴ. (참) $A = E - B$ 이므로 $A^2 - A + E = E - 2B + B^2 - E + B + E = 0$

$$B^2 - B + E = O \text{ 이므로 } B^2 = B - E$$

ㄷ. (참) $A^2 - A + E = O$ 의 양변에 $(A + E)$ 를 곱하면

$$(A + E)(A^2 - A + E) = O$$

$$A^3 = -E, \quad A^6 = E$$

마찬가지로 $B^2 - B + E = O$ 이므로 $B^3 = -E, \quad B^6 = E$

$$A^{100} + B^{100} = -A - B = -E$$

11) 답 ③

행렬 M^2 의 (5, 5) 성분이 2 이므로 꼭짓점 E에 연결된 변의 개수가 2이다.

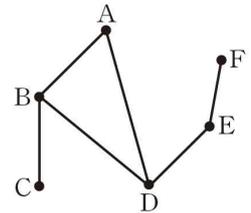
따라서 행렬 M 의 제 5행의 모든 성분의 합은 2 이므로 $a = 1$ 이다.

또한, 꼭짓점 B에 연결된 변의 개수가 3 이므로 $b = 3$

꼭짓점 C에 연결된 변의 개수가 1 이므로 $c = 1$

꼭짓점 F에 연결된 변의 개수가 1 이므로 $d = 1$

$$\therefore a + b + c + d = 1 + 3 + 1 + 1 = 6$$



12) 정답 : 25

n	$(-2)^{n-1}$	a_n
3	4	1
4	-8	0
5	16	1
6	-32	0

$$\therefore a_{2k+1} = 1, \quad a_{2k} = 0$$

$$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^7} + \dots = \frac{1}{3^3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{27} \times \frac{9}{8} = \frac{1}{24} \text{ 이므로 } p + q = 25$$

13) ①

$n \geq 3$ 에서 $(-3)^{\frac{n-1}{n}} = (-3) \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{-3}}$ 이 실수이므로 $n = 2k + 1$ 일 때, $a_n = 1$

$n = 2k + 2$ 일 때, $a_n = 0$ (단, k 는 자연수)

$$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{6}$$

14) 답 ⑤

임의의 실수 a 에 대하여 a 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수는 다음과 같다. ($x^n = a$ 의 실근의 개수)

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 짝수	2	1	0
n 이 홀수	1	1	1

ㄱ. $2n$ 은 짝수이므로 $f(a, 2n) = 0$ 이면 $a < 0$ 이다.

ㄴ. $2n - 1$ 은 홀수이므로 임의의 실수 a 에 대하여 $f(a, 2n - 1) = 1$

즉, $f(a + 2, 2n) = 1$ 이어야 하므로 $a + 2 = 0 \therefore a = -2$

ㄷ. (i) n 이 홀수일 때, $f(a, n + 1) = 0$, $f(a^2, n) = 1$ 이므로 $f(a, n + 1) < f(a^2, n)$ 성립

(ii) n 이 짝수일 때, $f(a, n + 1) = 1$, $f(a^2, n) = 2$ 이므로 $f(a, n + 1) < f(a^2, n)$ 성립

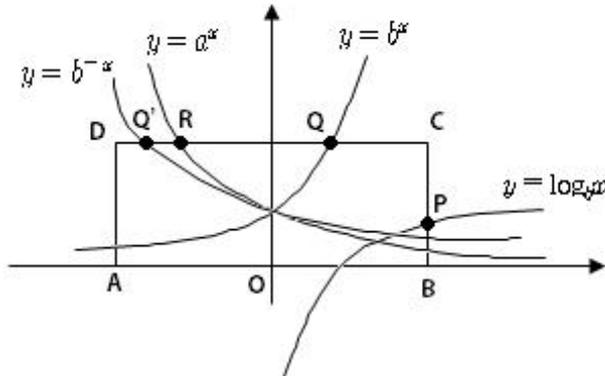
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

15) [정답] ③

ㄱ. $b = \frac{1}{a}$ 이므로 $b^x = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

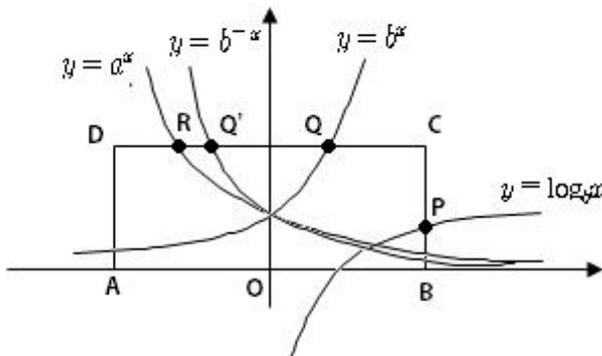
따라서 $y = b^x$ 와 $y = a^x$ 은 y 축 대칭이므로 $\overline{CQ} = \overline{DR}$ (참)

ㄴ. $ab < 1$ 이므로 $0 < a < \frac{1}{b} < 1$ 이므로 $y = b^{-x}$ 그래프는 아래와 같다.



따라서 $\overline{CP} = \overline{CQ} = \overline{DQ'} < \overline{DR}$ (참)

ㄷ. $ab > 1$ 이므로 $1 > a > \frac{1}{b}$ 이므로 $y = b^{-x}$ 그래프는 아래와 같다.



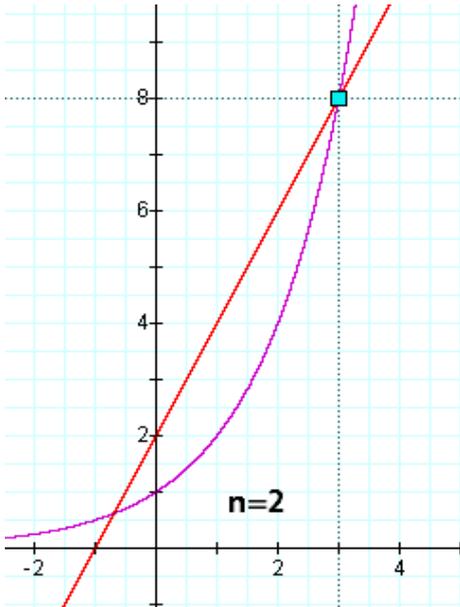
따라서 $\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OQ'} < \overline{OR}$ (거짓)

16) 정답 : 99

$$\frac{n^a - 2}{a - 0} \geq 2 \text{ 이므로 } n^a \geq 2a + 2$$

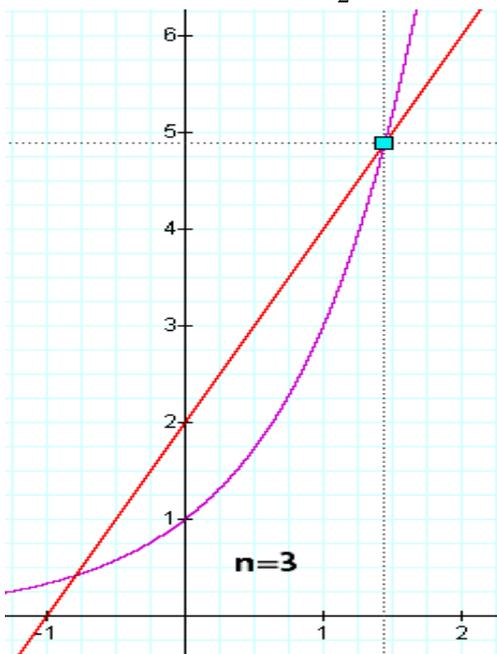
두 함수 $y = n^x$, $y = 2x + 2$ 에서 밑 n 이 커지면 두 함수의 교점의 y 좌표는 점점 작아진다.

$$n = 2 \text{ 일 때, } 2^a \geq 2(a+1) \quad \therefore a \geq 3, 2^a \geq 8 \text{ 이므로 } f(2) = 8$$

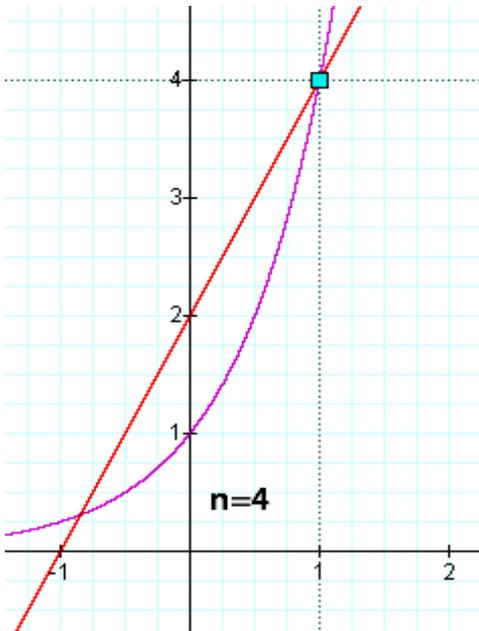


$n = 3$ 일 때,

$$3^a \geq 2(a+1) \text{ 에서 } a = \frac{3}{2} \text{ 이면 우변 } 3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3} = 5.4, \text{ 좌변 } = 2\left(\frac{3}{2} + 1\right) = 5 \text{ 이므로 } f(3) = 5$$



$$n = 4 \text{ 일 때, } 4^a = 2^{2a} \geq 2(a+1) \quad \therefore a \geq 1, 4^a \geq 4 \text{ 이므로 } f(4) = 4$$



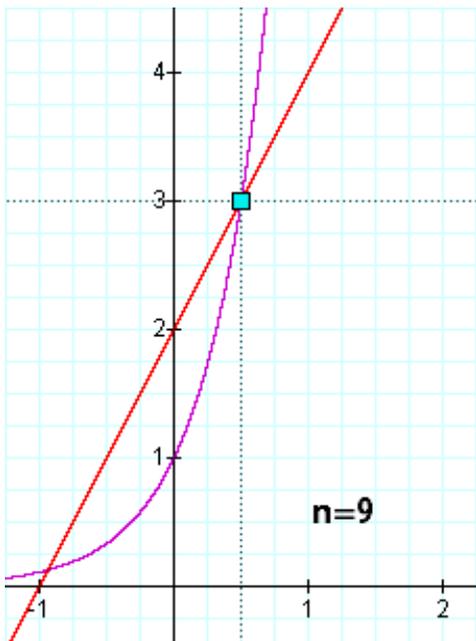
n 커지면 $n^x = 2(x+1)$ 의 근 x 과 $y = n^x$ 값 모두 작아진다.

이 때, $y = 2(x+1)$ 에서 $y = 3$ 일 때, $x = \frac{1}{2}$

교점의 좌표가 $(\frac{1}{2}, 3)$ 일 때 부등식 $n^{\frac{1}{2}} \geq 2a+2=3$ 의 해집합은 $n \geq 9$

$$\therefore f(4) = \dots = f(8) = 4$$

$$f(9) = f(10) = \dots = f(30) = 3$$



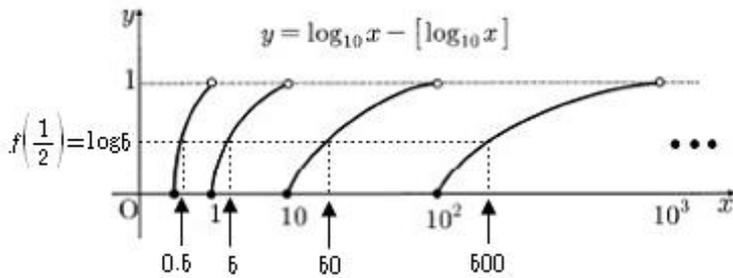
$$\sum_{n=2}^{30} f(n) = 8 + 5 + 4 \times 5 + 3 \times 22 = 99$$

17) [정답] 444

$f(\frac{1}{2})$ 은 $\log \frac{1}{2}$ 의 가수이므로

$$\log \frac{1}{2} = -\log 2 = -1 + (1 - \log 2) = -1 + \log \frac{10}{2} = -1 + \log 5 \quad \text{에서} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \log 5$$

상용로그의 가수 그래프 : $y = \log_{10} x - [\log_{10} x]$



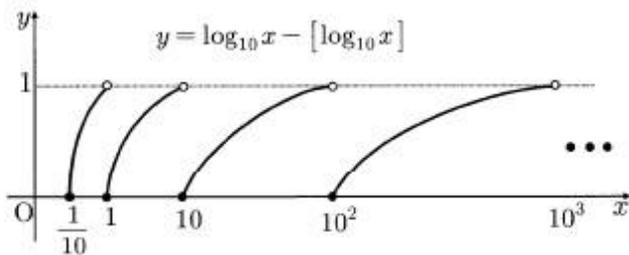
$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log 5$ 와 가수가 같으므로 숫자배열이 같은 수를 찾으면 0.5, 5, 50, 500, ... 이다.

이때 가수가 $\log 5$ 보다 작은 수들은

- ① 한 자리수 : 1, 2, 3, 4
 - ② 두 자리수 : 10, 11, 12, ..., 49
 - ③ 세 자리수 : 100, 101, 102, ..., 499
- 따라서 구하는 개수는 $4 + 40 + 400 = 444$ 개다.

18) [정답] ③

ㄱ. 상용로그의 가수 그래프 : $y = \log_{10} x - [\log_{10} x]$



함수 $f(x)$ 는 위로 볼록하므로 $a < b < c$ 이면 $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} > \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$ 이다. (참)

ㄴ. 상용로그의 가수가 같으므로 두 자연수 a, a^3 은 숫자배열이 같다.

세제곱해서 숫자배열이 같은 두자리 자연수는 10뿐이다. $\therefore a = 10$

따라서 $\log a^2 = \log 10^2$ 이므로 $f(a^2) = 0$ 이다. (참)

ㄷ. $f(ab) = 0$ 이면 $ab = 10^n$ 이다.

두 수의 곱이 10의 거듭제곱꼴이라고 해서, a 또는 b 가 10의 거듭제곱꼴이라고 볼수는 없다. (거짓)

(반례) $a = 20, b = 50$ 일 때, $ab = 10^3$ 이므로 $\log ab = \log 10^3 = 3$ 에서 $f(ab) = 0$ 이지만 $f(a) = \log 2 \neq 0, f(b) = \log 5 \neq 0$ (거짓)

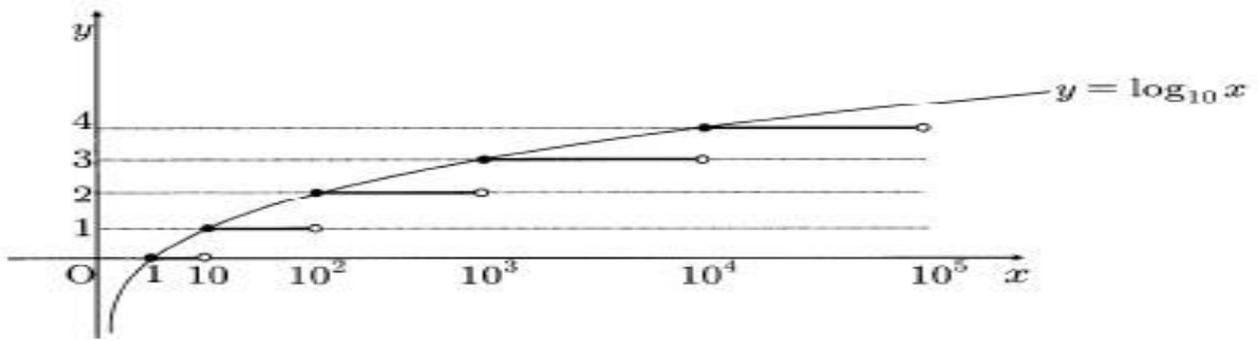
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

19) 정답: ⑤

$$f(x) = [\log x]$$

$$[\log x] = k \text{ (} k \text{는 정수) 라 하면, } k \leq \log x < k+1 \quad \therefore 10^k \leq x < 10^{k+1}$$

$f(x) = [\log x]$, $y = \frac{x}{n} - 2$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



자연수 n 의 최소일 때, 직선의 기울기 $\frac{1}{n}$ 은 최대가 된다.

직선 $y = \frac{x}{n} - 2$ 이 $(10, 1)$ 을 지날 때부터 $(10, 0)$ 을 지나기 전까지 $y = f(x)$ 와 교점이 2 가 된다.

지나는 점의 좌표	기울기 $\frac{1}{n}$	n
$(10, 1)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{10}{3}$
$(10, 0)$	$\frac{1}{5}$	5
$(100, 2)$	$\frac{1}{25}$	25

따라서 교점의 개수가 2개가 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

20) 답 ㉓

점 A 의 x 좌표를 t 라 하면 정사각형 $ABCD$ 의 각 꼭짓점의 좌표는 $A(t, \log_2 t)$, $B(t+a, \log_2 t)$, $C(t+a, \log_2(t+a))$, $D(t, \log_2(t+a))$

이때, 정사각형의 한 변의 길이가 a 이므로

$$\log_2(t+a) - \log_2 t = a,$$

$$\log_2\left(1 + \frac{a}{t}\right) = a$$

$$2^a = 1 + \frac{a}{t} \quad \therefore t = \frac{a}{2^a - 1}$$

ㄱ. $\log_2 t = 0$ 일 때, $t = 1$, 이때 $a = 1$

따라서 $t = 1$ 일 때 두 꼭짓점 A, B 가 x 축 위에 있으므로 한 변이 x 축 위에 있는 정사각형이 존재한다.

$$\text{ㄴ. } a = 2 \text{ 일 때, } t = \frac{2}{2^2 - 1} = \frac{2}{3}$$

따라서 $a = 2$ 인 정사각형은 1개 존재한다.

$$\text{ㄷ. } t = \frac{a}{2^a - 1} \text{ 에서 } a > 1 \text{ 이면 } 2^a - 1 > a \text{ 이므로 } 2^t = \frac{a}{2^a - 1} < 1 \quad \therefore t < 1$$

따라서 $a > 1$ 인 정사각형은 제1사분면 영역 안에 있지 않다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21) 정답 ②

$(n, \log_2 n)$ 과 $(\log_2 n, n)$ 을 잇는 직선의 방정식은 $y = -x + n - \log_2 n$

따라서 선분 위의 점 중 x, y 좌표가 모두 정수인 점은 $\log_2 n$ 이 정수일 때이므로 $n = 2^k$ 일 때이다.

즉, $n = 2^k$ 일 때, $a_n = 2^k - k + 1$ 이고 $n \neq 2^k$ 일 때, $a_n = 0$ 이다. (k 는 음이 아닌 정수)

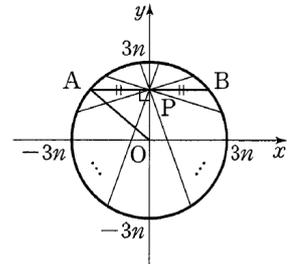
선분에 있는 점의 개수 a_n 은 $\log_2 n \leq x \leq n$ 즉 $k \leq x \leq 2^k$ 에 있는 정수 x 의 개수와 같으므로
 $a_n = 2^k - k + 1$

$1 \leq n \leq 2013$ 일 때 $0 \leq k \leq 10$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{2013} a_n = \sum_{k=0}^{10} (2^k - k + 1) = \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} - \frac{10 \times 11}{2} + 11 = 2003$$

22) 답 : 9

점 $P(0, 4n)$ 을 지나는 직선이 원과 만나는 점을 A, B 라 하자.
 현 AB 의 길이는 원의 지름일 때 최대이고, 이때의 현 AB 의 길이는 $\overline{AB} = 5n$ 현 AB 의 길이는 원의 지름과 수직으로 만날 때, 최소이고, 이때의 현 AB 의 길이는 $\overline{AB} = 3n$



$$\therefore 6n \leq \overline{AB} \leq 10n$$

한편, 점 P 를 중심으로 현 AB 를 회전시키면 $6n$ 과 $10n$ 사이의 모든 실수를 길이로 하는 현이 2번씩 나타나므로 현의 길이가 $6n, 10n$ 인 것이 각각 1개, 현의 길이가 $6n+1, 6n+2, \dots, 10n-1$ 인 것이 각각 2개이다.

따라서 자연수 n 에 대하여 길이가 정수인 현 AB 의 개수는 $2 + 2\{10n - 1 - 6n\} = 8n$ (개)

즉, $f(n) = 8n$ 이므로 $f(n^2 + n) = 8(n^2 + n) = 8n(n+1)$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n^2 + n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8n(n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{8} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\therefore a + b = 8 + 1 = 9$$

23) 정답 123

등차수열 $\{a_k\}$ 의 공차를 d 라 하면 $3a_1 + 3d = 3, 4a_1 + 16d = 28$

$a_1 = -1, d = 2$ 이고, $a_n = -1 + 2(n-1) = 2n - 3$

어두운 영역에 배열된 수열 $a_3, a_7, a_{15}, a_{27} \dots$ 을 $\{a_{b_k}\}$ 라 하면

$$b_k = 3 + \sum_{l=1}^{k-1} 4l = 2k(k-1) + 3 \text{ 이고}$$

a_3	a_7	a_{15}	a_{27}	...	a_{b_k}
3각형	5각형	7각형	9각형	...	13각형

정십삼각형에서 어두운 부분에 대응되는 항은 $k=6$ 일 때이고, 이 때 $b_k=2 \cdot 6 \cdot 5+3=63$

따라서 $a_{63}=2 \times 63-3=123$

24) 답 121

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (f \circ f \circ f)(a_n) = f(f(f(a_n))) = f(f(2a_n - 1)) \\ &= f(4a_n - 3) = 8a_n - 7 \end{aligned}$$

$$a_{n+1} = 8a_n - 7 \text{을 변형하면} \quad a_{n+1} - 1 = 8(a_n - 1)$$

수열 $\{a_n - 1\}$ 이 공비가 8인 등비수열이므로

$$a_n - 1 = (a_1 - 1) \cdot 8^{n-1} = 2 \cdot 8^{n-1} = 2^{3n-2}$$

$$\therefore a_n = 2^{3n-2} + 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{30} \frac{1}{\log_2(a_k - 1)\log_2(a_{k+1} - 1)} &= \sum_{k=1}^{30} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{30} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{88} - \frac{1}{91}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{91}\right) = \frac{30}{91} \end{aligned}$$

25) 정답 : 120

$$b_{200} = \begin{cases} 2 & (a_{201} > a_{200}) \\ 0 & (a_{201} = a_{200}) \end{cases}$$

$\log 2^{201}$ 의 지표가 a_{201} 이고, $\log 2^{201} = 201 \times \log 2 = 201 \times 0.3010 = 60.5010$ 이므로

2^{201} 은 61자리의 자연수이다.

$1 \leq k \leq 60$ 인 모든 자연수 k 에 대하여 2^n 이 k 자리의 수이고, 2^{n+1} 이 $k+1$ 자리의 수인 자연수 n 이 반드시 하나씩 대응한다.

따라서 $a_{n+1} > a_n$ 을 만족하는 자연수 n 의 개수는 60이므로 $b_n = 1$ 을 만족하는 자연수 n 의 개수는 60이고, 나머지 n 에 대해서는 $b_n = 0$ 이다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{200} b_k = 60 \times 2 = 120$$

26)

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n=1) \\ n(2^{n-1} + 1) & (n \geq 2) \end{cases}, \quad a_7 = 455$$

27) 답 32

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \text{라 하면} \quad \cos 2A = \cos A \quad \therefore 2A = 2\pi - A \quad \therefore A = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore 10p + q = 30 + 2 = 32$$

[별해]

$0 < a_n < \pi, 0 < 2a_{n+1} < 2\pi$ ($\because 0 < a_{n+1} < \pi$)이고 $2a_{n+1} \neq a_n$ 이므로

$$\cos 2a_{n+1} = \cos a_n \Leftrightarrow 2a_{n+1} = 2\pi - a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \pi$$

이때, $a_{n+1} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2\pi}{3}\right)$ 이므로

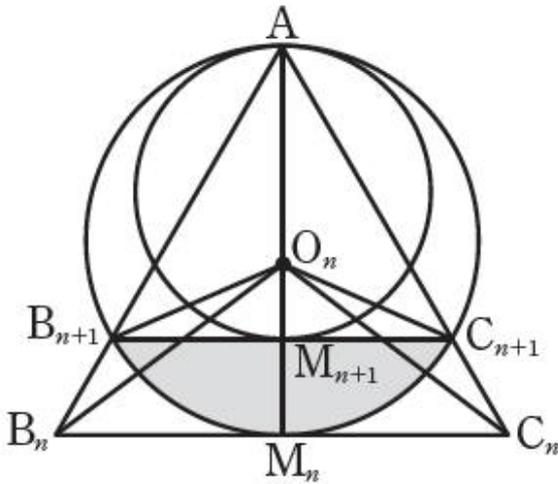
수열 $\left\{a_n - \frac{2\pi}{3}\right\}$ 은 첫째항이 $a_1 - \frac{2\pi}{3}$, 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다.

따라서 $a_n - \frac{2\pi}{3} = \left(a_1 - \frac{2\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로 $a_n = \left(a_1 - \frac{2\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2\pi}{3}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ 이므로 } \therefore 10p + q = 30 + 2 = 32$$

28) 답 21

선분 $B_n C_n$ 의 중점을 M_n 이라 하고, n 번째 그린 원의 중심을 O_n 이라 하자.



$$\overline{AM_1} = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \text{ 이므로 } \frac{1}{2} \times \overline{AM_1} = \frac{3}{2} \text{ 이다.}$$

정삼각형 $AB_{n+1}C_{n+1}$ 은 원 O_n 에 내접하므로 $\angle B_{n+1}O_nC_{n+1} = \frac{2}{3}\pi$,

$$\textcircled{1} S_1 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\pi}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

$$\textcircled{2} \text{ 무한등비급수의 공비} = \left(\frac{\overline{AM_2}}{\overline{AM_1}}\right)^2 = \left(\frac{\overline{AO_1} + \overline{O_1M_2}}{3}\right)^2 = \left(\frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{4}}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{12\pi - 9\sqrt{3}}{16}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{12\pi - 9\sqrt{3}}{7}$$

$$\therefore p + q = 12 + 9 = 21$$