교과서의 장단점 및 활용방안

학생들을 가르치다보면 학교 다니는 현역 고3들 조차도 학교에서 교과서와 익힘책을 전혀 안 보고, 정석이나 기타 짜깁기한 부교재를 쓰는 경우를 자주 본다.
수년을 지켜봐도 대한민국 교실에서 교과서와 익힘책은 그리 사랑받는 책이 아닌 모양이다.
왜 그럴까?

가끔 교재연구를 많이 하는 강사분이나 그런 분께 배운 '늦게 깨달은' 수험생들이 다시 찾는 교재가 교과서와 익힘책이다. 나중에 검토하고 나서야 "아~ 교과서가 이렇게 좋구나!"라고 깨닫는다.
물론, 그 깨달음조차 아무한테나 허락된 것도 아니다.

여기 오르비언들께 교과서에 대한 여러 질문을 받으면서, 글을 하나 써야겠다고 예전부터 생각했었다.
드디어 교과서와 익힘책의 장단점, 그리고 수준에 따른 활용법을 보기로 하자~~~출발~~

1. 교과서의 단점

단점이랄까. 수십년간 보완되고 발전된 책들이라 단점을 찾기가 쉽지는 않다.
(최근 발행된 더텍스트, 신사고, 성지출판사 제외)

상위권 학생들 중에는 교과서와 익힘책이 너무 쉽다거나, 유형연습을 하기에는 많이 부족하다고 느낄지 모른다.
벌써 교과서의 구체적 이론을 숙지한 상태이니 그렇게 말할 수도 있을 것이다..

하지만 그러한 상위권 학생들조차도 교과서와 익힘책은 이러한 용도로서 의미가 크다.

① 첫째, 자신의 머릿속에 담고 있는 복잡하고 정리되지 아니한 지식들을 교과서 목차에 따라 정리해 보길 바란다. 가령, 우리가 배우는 교과서에서 배우는 수열은 등차, 등비, 계차 이렇게 3가지 밖에 없다. 그렇기 때문에 수열, 수열의 극한 단원의 고난도 기출문항 조차도 단순히 이 3가지 수열을 벗어나지 않는다는 것을 확인할 필요가 있다. 여기저기 파편처럼 흩어진 지식들을 단순하게 정리시키는 목차는 교과서에 나와 있다. 그런 측면에서 교과서 목차는 개념을 정리하는 가장 Standard한 잣대가 된다.

② 교과서 목차에 따라 정리한 후, 하나 더 확일할 것이 있다. 자신이 알고 있는 수많은 개념들이 교과서와 익힘책의 범위 내인지 아닌지를 판단할 수 있어야 한다. 이런 것들 공부해야 하나요? 라고 질문하는 수험생이 있는데, 교과서와 익힘책 범위 내라면 당연히 숙지해야 하는 것이고, 그러한 완벽한 숙지가 있어야 수능과 수리논술에서 좋은 성적을 예상할 수 있을 것이다. 교과서와 익힘책에 있는 내용도 완벽하게 숙지하지 않고서 만점 내지는 안정적인 1등급을 기대하는 건 지나친 탐욕이다. 반면 교과외 과정이라면 일단 그러한 사실을 명확히 인식하고, 필요에 따라서 공부의 강약을 조절하는 것이 현명할 것이다.

③ 마지막으로 교과개념의 순서와 범위까지 확인하셨다면, 이러한 교과개념이 수능, 수리논술과 어떻게 연계가 되는지까지 학습해야만 공부의 완성단계에 이른다. 말 그대로 교과개념-수능-수리논술의 '연계성'을 확인하는 공부야말로 자신의 실력을 한단계 껑충 올릴 수 있는 과정이 될 것이다. 수능, 수리논술과의 연계성을 확인하는 대상은 교과서와 익힘책의 내용이지 여타의 다른 책이 될수는 없다.

2. 활용 측면에서의 장점.

문제만 나열되어 문풀연습이 주목적인 문제집과 달리, 개념서라고 부른다면 공식이 유도된 과정이나 수학적 정의 내지 정리 등이 친절하고 풍부하게 설명하고 있어야 할 것이다.
그러다 보니 책이 자연스레 두꺼워지는데, 너무 두껍다면 수험생 입장에서 보다가 지쳐 버리기 십상이다. 끝까지 학습하지 못하고 이 책, 저 책 속에서 방황하는 수험생이 현실에는 생각보다 많다.
그러한 수험생들에게 교과서와 익힘책을 정중히 바친다.

교과서와 익힘책은 빠진 내용없이 풍부히 담고 있으면서도 분량이 가장 적다는 것이 최대 장점이다.
정석, 바이블, 개념원리 같은 개념서와 비교했을 때, 두께가 확실히 얇다.
(두께가 얇다고 해서 얕보지 마라. 고등수학의 본질적인 내용은 전부 다 담고 있으며, 교과서가 담고 있는 내용 그 자체가 말 그대로 교과개념이니.)

개념공부를 최대한 단시간에 마스터하고 싶다면 교과서와 익힘책에 먼저 복종하라~
이 책이야 말로 단기간에 교과개념을 마스터하는 가장 강력한 학습 도구라는 것을 자신있게 말할 수 있다.

일단 손에 잡은 후 그 내용이 어떻길래 이렇게 호언장담하는지 구체적으로 알아보자.

3. 교과서의 내용상 장점.

교과서가 여러 종류이나 가장 널리 보는 것은 천재교육과 미래앤출판사이다.
두 출판사 모두 좋다. 중상위권이면 미래앤, 중하위권이면 천재교육을 추천하는 바이다.
그 중 난이도가 조금 더 높은 것이 미래앤 교과서이다.
이 책으로 말씀드리자면 익힘책에서 심화설명이 대단히 잘 되어 있으며, 대단원 마무리문제에서는 수능기출 문항과 실전문항이 적절히 배치되어 있다. 더군다나 기초개념에서부터 심화개념, 실전연습에 이어 수리논술, 고난도 문항까지 연계되어, 말 그대로 기초부터 수능, 수리논술까지의 완성을 맛볼수 있는 1석 3조의 교재이다. 수리논술과 수학고수문제는 오직 미래앤교과서에만 있다.
그러한 미래앤 교과서를 중심으로 설명을 드려보겠다.

① 일상에서 발견하는 수학의 원리 = 수학탐험란

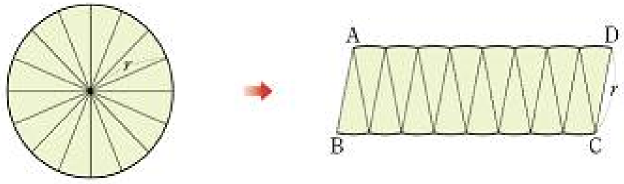
교과서를 처음 펼쳐 대단원 목차, 중단원 목차를 확인해 보면 의외로 간단하게 정리된다.
그리고 한 장을 더 넘기면 아래와 같이 “수학탐험”란이 나온다.
일상에서 발견할 수 있는 수학의 원리를 탐구하는 란이며, 학교 수행평가에도 잘 나오며, 수능이 요구하는 사고력 증진에 도움이 된다.
직접 풀어 보고 답을 맞춰 보자. 재미난 그림까지 있어서 동화책을 읽는 기분이 들 것이다.

수 | 학 | 탐 | 험

(우리 주변에서 수학의 원리를 발견하여 함께 탐구해 보자)

아르키메데스는 원의 넓이를 어떻게 구했을까?

우리가 잘 알고 있는 것처럼 원주율 π는 $\dfrac{(\text{원의 둘레})}{(\text{지름의 길이})}$로 정의된다. 따라서 반지름의 길이가 r인 원의 둘레의 길이는 $2\pi r$이다. 그렇다면 원의 넓이는 어떻게 구할까? 원의 넓이를 표현하기 위하여 새로운 수를 정의할 필요는 없을까? 원과 구에 대한 문제를 특히 좋아했던 고대 그리스의 수학자 아르키메데스는 이 문제를 원의 둘레와 반지름의 길이를 이용하여 해결하였다. 아르키메데스는 "원의 측정"에서 다음 그림과 같은 방법으로 원의 넓이를 구하였다. 다음 물음에 답하여라.



❶ 원을 16개의 부채꼴로 나누어 도형 ABCD를 만들었다. 이때, A에서 D까지 8개의 작은 부채꼴의 호의 길이의 합을 구해 보자.

② 명확한 학습목표 제시, 쉽게 설명된 생각열기

다음 장을 넘기면 가장 윗부분에 작은 글씨로 씌여진 학습목표를 먼저 확인해 보라.
정석이나 기타 교재에는 없는 목차이며, 단원에 들어가기 앞서 정확한 목표를 세우라는 의미이다.

개인적으로 아래 '생각열기' 부분이 교과서의 큰 매력 중 하나라고 본다
아래 예를 보듯이 구분구적법의 개념을 참 쉽게 예를 들어 설명하고 있다.
이런 예로서 개념의 핵심을 짚어 내다니, 정말 감탄사가 절로 나온다.

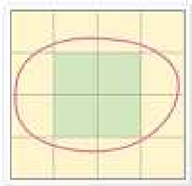
1. 구분구적법

학습 목표 | ❶구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.
배운 내용 | 수열의 극한, 무한급수

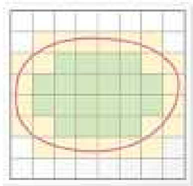
구분구적법이란 무엇인가?

| 생각 열기 |

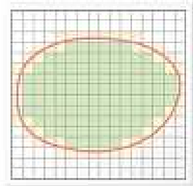
어느 안경 회사에서는 오른쪽 그림과 같은 안경을 만들려고 한다. 안경알의 넓이를 계산하기 위하여 다음 그림과 같이 모눈종이에 안경알을 그려 보았다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

위의 그림에 있는 모눈의 한 변의 길이를 각각 1 cm, 0.5 cm, 0.25 cm라고 하자.

❶ 위의 각 그림에서 안경알의 내부 및 경계선을 지나는 정사각형들의 넓이의 합을 M, 안경알 안에 완전히 포함되는 정사각형의 넓이의 합을 m이라고 할 때, $M-m$의 값을 구해 보자.

❷ 모눈 눈금의 한 변의 길이를 0.1 cm, 0.01 cm, …과 같이 점점 작게 할 때, $M-m$의 값이 어떤 값에 가까워질지 이야기해 보자.

| 생각 전개 |

❶

	[그림 1]	[그림 2]	[그림 3]
M	16	11	10
m	4	5	6.75
$M-m$	12	6	3.25

❷ $M-m$의 값이 0으로 가까워짐을 알 수 있다.

| 생각 다듬기 |

모눈의 한 변의 길이를 점점 작게 하면 M과 m의 값은 각각 실제 안경알의 넓이에 가까워진다.

예를 하나 더 들어 보겠다. 학생들이 가장 어려워하는 부분 중 하나인 통계 단원의 표본평균의 분포이다. 표본평균, 표본분산, 표본표준편차의 정의를 마찬가지로 쉬운 예를 통해 설명하고 있다.

표본비율의 분포는 어떻게 될까?

| 생각 열기 |

대통령 선거 기간 중에 어느 여론 조사 기관에서 갑 후보에 대한 지지율을 조사하였다. A 지역에 거주하는 주민 중에서 임의로 선택된 400명 중 212명이 갑 후보를 지지하였고, B 지역에 거주하는 주민 중에서 임의로 선택된 260명 중 140명이 갑 후보를 지지하였다. 조사자들을 대상으로 두 지역에서 갑 후보를 지지하는 비율을 각각 구해 보자.

| 생각 전개 |

| 생각 다듬기 |

표본에서 후보를 지지하는 비율은 $\frac{(\text{지지자의 수})}{(\text{표본의 크기})}$ 이다.

이러한 생각열기-생각전개-생각다듬기 란을 거쳐 그 아래 설명부분을 읽어 보면 해당단원의 본질적인 개념이 자연스럽게 이어진다. 물처럼 흐르는 자연스런 논리 전개를 느낄 수 있는 이유는 이 책이 교과서이기 때문이다.

③ 친절한 개념설명

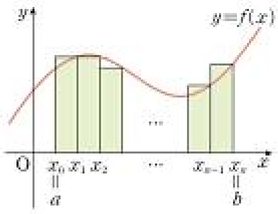
개념 설명부분은 꼼꼼히 영어 지문 분석하듯이 분석하길 바란다.
그런 다음 자신이 안 보고서 손으로 직접, 그리고 전부 서술할 수 있어야 한다.
증명은 수능에 안 나온다고 생각하고 넘어가서는 안된다.
수능은 공식의 결과보다는 공식을 유도하는 과정에 쓰이는 사고를 요구한다.
그렇기 때문에 증명문제는 반드시 주관식처럼 숙지하고, 그 사고과정을 연습해야 하는 것이다.

이때, 오른쪽 그림과 같이 각 소구간의 오른쪽 끝에서의 함숫값이 세로의 길이인 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

이다.



익힘책 p34

여기서 $n \to \infty$이면 S_n은 구하는 도형의 넓이 S에 한없이 가까워진다.

$$\therefore S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

일반적으로 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

가 항상 존재한다. 이때 이 극한값을 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\int_a^b f(x)dx$$

교과서에 써 있는 정적분의 정의를 그대로 설명하고, 서술할 수 있어야 한다.

정적분의 정의

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \ \left(\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x \right)$$

적분과 미분의 관계

함수 $f(t)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $a \le x \le b$일 때, $S(x) = \int_a^x f(t)dt$이면

$S'(x) = f(x)$

정적분의 기본 정리

구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

마찬가지로 정적분의 정의 - 적분과 미분과의 관계- 정적분의 기본정리를 개념의 상호 이해 속에 이해하고 정리하고 숙지하길 바란다.

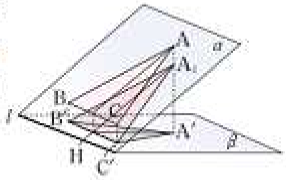
그 정도가 아니면 개념에 대한 정확한 숙지라고 볼 수 없다.

이과 학생들을 대상으로 한 가지 예를 더 들어보겠다.

예제 1

두 평면 α, β가 직선 l에서 만나고 두 평면이 이루는 각의 크기는 θ이다. 평면 α에 포함되는 삼각형 ABC의 넓이가 S이고 변 BC가 교선 l과 평행할 때, 삼각형 ABC의 평면 β 위로의 정사영의 넓이는 $S\cos\theta$임을 보여라.

풀이 세 점 A, B, C의 평면 β 위로의 정사영을 각각 A′, B′, C′이라 하고 삼각형 ABC를 평행이동하여 변 BC가 선분 B′C′이 되게 하면 오른쪽 그림에서



$$\triangle ABC \equiv \triangle A_1B'C'$$

점 A_1에서 직선 B′C′에 내린 수선의 발을 H라고 하면 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{A'H} \perp \overline{B'C'}$이고, $\overline{A'H}$는 $\overline{A_1H}$의 정사영이므로

$$\overline{A'H} = \overline{A_1H}\cos\theta$$

$$\therefore \triangle A'B'C' = \frac{1}{2}\overline{B'C'}\cdot\overline{A'H} = \frac{1}{2}\overline{B'C'}\cdot\overline{A_1H}\cos\theta$$

$$= S\cos\theta$$

문제 1 예제 1에서 삼각형의 어느 한 변도 교선 l과 평행하지 않을 때에도 삼각형 ABC의 평면 β 위로의 정사영의 넓이는 $S\cos\theta$임을 보여라.

정사영 공식 $S' = S\cos\theta$은 누구나가 알고 있으나, 이 공식을 증명하라고 하면 대다수가 못한다.
하지만 이 공식의 유도과정으로 수능기출의 모든 고난도 문항들을 설명할 수 있다.

즉, 고난도 기출문제의 해결 구조가 위 정사영 공식의 유도 과정이라는 것이다.
떡 찍어내는 떡틀이 바로 저 놈이라는 뜻이다.
신샘의 킬러문항 집중탐구 - 기벡강좌나 여름에 있을 공도벡단기특강에서 확인시켜 드리겠다.

그러니 이러한 증명과정을 완벽히 이해-정리-숙지하지 않고서야 제 아무리 어려운 문제를 풀려고 낑낑거린들 해결될 리가 만무하다.
모든 교과서에는 정사영 공식 유도과정이 실려 있지만, 기본정석에는 실려 있지 않다는 점 참고!

④ 개념의 확장 “한 걸음 더”

단원 제일 마지막 귀퉁이에는 항상 “한걸음 더”라는 란이 있는데, 위에서 배운 교과개념을 확장시킨 것이다.

한 걸음 더

|추론하기/의사소통/문제해결/문제만들기|

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=(-1)+1+(-1)+\cdots+(-1)^n+\cdots$의 합이 존재하는지 토론해 보아라.

|익힘책 p. 181|

* 무한급수의 정의를 알고 있는지를 확인하는 질문이다.

한 걸음 더

|추론하기/의사소통/문제 해결/문제 만들기|

오른쪽 계산 과정에서 잘못된 곳을 찾고, 그 이유를 말하여라.

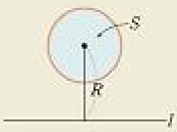
$$\int_{-1}^{3}\frac{1}{x^2}dx=\left[-x^{-1}\right]_{-1}^{3}=-\frac{1}{3}-1=-\frac{4}{3}$$

* 정적분의 기본정리를 적용시킬 수 있는 전제 조건은 피적분함수가 연속이어야 한다는 점을 확인

한 걸음 더

|추론하기/의사소통/문제 해결/문제 만들기|

오른쪽 그림과 같이 직선 l의 한 쪽에 넓이가 S인 도형이 있다. 이 도형의 무게중심에서 직선 l까지의 거리를 R라고 하자. 이때, 이 도형을 직선 l의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피 V는 $V=(2\pi R)S$라고 한다. 원을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 구하는 문제를 만들고 위의 사실을 이용하여 해결해 보자.



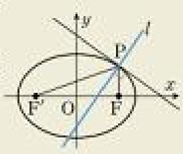
* 파푸스 굴단정리! 정적분을 이용하여 회전체의 부피를 구하는 개념을 확인하고, 위 결론과 비교해 보시라~ 고대 수시논술에 출제된 적도 있다. 이런 내용이 교과서에 있다는 사실을 모르는 경우가 태반이다. 파푸스 굴단정리가 교과외 과정이니 아니니 라는 논의는 집어 치시라~

한 걸음 더

|추론하기/의사소통/문제해결/문제만들기|

초점이 F, F′인 타원 $x^2+2y^2=4$ 위의 점 $P(\sqrt{2}, 1)$에서의 접선에 수직이고 $P(\sqrt{2}, 1)$을 지나는 직선 l은 $\angle F'PF$를 이등분함을 보여라.

익힘책 p. 56



* 이차곡선과 빛의 반사에 관한 성질이다. 일명, 초점반사! 초점반사는 모든 2차곡선에 나오는 성질인데, 교과서에도 등장~ EBS 문제에도 상당히 많이 들어가 있지만 모르고 푼다는 사실!

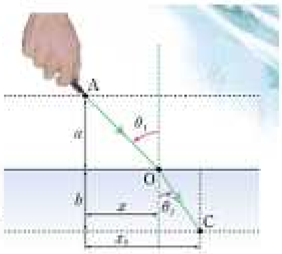
이렇듯 기초개념에서 심화개념까지 소개되어 있다는 점에 놀라울 뿐이다.
그러니 여러 분들은 교과서의 구석구석까지 한 글자도 빠짐없이 확인하시길 바란다.

⑤ 풍부한 읽기 자료~수학으로 보는 세상

심화개념에서 한 걸음 더 나아가서 수리논술의 배경지식까지 될 수 있는 부분도 설명되어 있다.

| 수학으로 보는 세상 |

최단 경로를 찾아라!



오른쪽 그림처럼 한 지점 A에서 나온 빛이 수면 위의 한 지점 O를 지나 물 속에 있는 다른 지점 C에 이르는 최단 경로를 알아보자.

공기 중에서의 빛의 속도를 v_1이라고 하면 빛이 A에서 O에 이르는 시간 t_1은

$$t_1 = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}$$

이다. 또, 물 속에서의 빛의 속도를 v_2라고 하면 빛이 O에서 C에 이르는 시간 t_2는

$$t_2 = \frac{\sqrt{(x-x_0)^2+b^2}}{v_2}$$

이다. 따라서 총 소요 시간은

$$t_1+t_2 = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(x-x_0)^2+b^2}}{v_2}$$

$y = t_1+t_2$라고 하면

$$y' = \frac{2x}{2v_1\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{2(x-x_0)}{2v_2\sqrt{(x-x_0)^2+b^2}}$$

y가 최솟값을 가지는 경우는 $y'=0$일 때이므로

$$y' = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\overline{AO}}+\frac{1}{v_2}\frac{(x-x_0)}{\overline{CO}} = \frac{1}{v_1}\sin\theta_1 - \frac{1}{v_2}\sin\theta_2 = 0$$

따라서 $\dfrac{\sin\theta_1}{v_1} = \dfrac{\sin\theta_2}{v_2}$

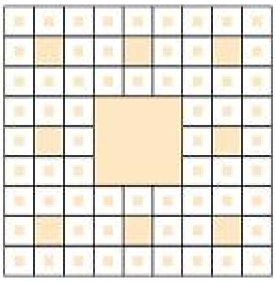
가 성립할 때, 총 소요 시간은 최소가 된다. 이를 스넬의 법칙(Snell's law)이라고 한다.

미분편 극대, 극소, 최대, 최소 단원 제일 마지막에 최소시간의 원리= 스넬의 법칙이 소개되어 있습니다. 미분의 응용문제이기도 하면서, 교과서에 실린 이 내용이 수리논술에 출제된 경우도 여러 번 있었다. (한양대 2010학년도, 경희대 2008학년도, 성균관대 2009학년도, 인하대 2008학년도 수리논술 출제) 교과서의 읽기 자료를 수리논술 시험장에서 그대로 만난다면 어떤 느낌이 들지 상상해 보시라~
이래서 교과서가 좋다는 거다.

⑥ 창의적 문제해결력

창의적 문제 해결력

한 변의 길이가 9인 정사각형 모양의 종이에 다음과 같이 무늬를 만든다.



① 가로와 세로를 각각 3등분하여 각 변과 평행하게 선분을 긋고 중앙의 정사각형에 색칠을 한다.

② 색칠하지 않은 정사각형 8개를 각각 9개의 합동인 정사각형으로 나누고 중앙의 정사각형에 색칠을 한다.

③ 이와 같이 색칠하지 않은 정사각형을 각각 9개의 합동인 정사각형으로 나누고 중앙의 정사각형에 색칠하는 작업을 계속한다.

위의 그림은 3번 시행한 결과이다. 이와 같이 정사각형을 나누고 색칠하는 작업을 한없이 반복할 때, 다음 물음에 답하여라.[6]

❶ n번째에 새롭게 색칠되는 정사각형의 개수를 구하여라.

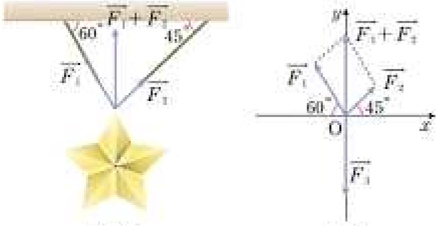
❷ n번째에 새롭게 색칠되는 부분의 넓이를 a_n이라고 할 때, a_n의 값을 구하여라.

❸ 정사각형을 나누고 색칠하는 작업을 한없이 반복할 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.

* 수열의 극한 파트에서 프렉탈 구조도 소개되어 있다.

창의적 문제 해결력

별 모양의 장식이 [그림 1]과 같이 천장에 매달려 있고, 왼쪽 줄과 오른쪽 줄은 천장과 각각 60° 와 45° 의 각을 이루고 있다. 이때, 두 줄이 장식을 당기는 힘의 합력과 장식의 무게가 평형을 이룬다. 왼쪽 줄과 오른쪽 줄이 장식을 당기는 힘을 각각 $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$라 하고, 장식이 두 줄을 당기는 힘을 $\overrightarrow{F_3}$이라고 할 때, 세 벡터를 좌표평면 위에 나타내면 [그림 2]와 같다. 다음 물음에 답하여라.



[그림 1] [그림 2]

.

❶ 세 힘 $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ 사이의 관계식을 구하여라.

❷ 세 힘 $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$의 크기를 각각 a, b, c라고 할 때, 세 힘 $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$을 각각 성분으로 나타내어라.

❸ $c=10$일 때, ❶ ❷를 이용하여 a, b의 값을 구하여라.

* 벡터 파트에서는 소위 “라미의 정리”도 소개되어 있다~

⑦ 잘 정리된 심화설명과 보충설명!

여러 분들이 공부하면서 어려워 하는 부분에 대해 익힘책의 심화설명과 보충설명이 친절한 선생님의 역할을 대신 하고 있다. 이 만큼 정리가 잘 된 책도 드물다.

|심|화|설|명|

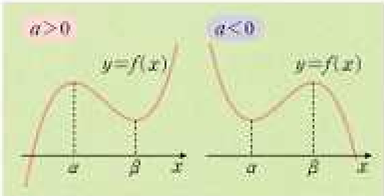
삼차 · 사차함수의 그래프의 개형

교과서 p.183

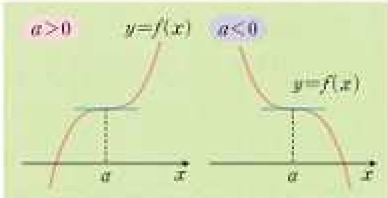
[1] 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프의 개형

이차방정식 $f'(x)=0$의 실근의 개수에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있다.

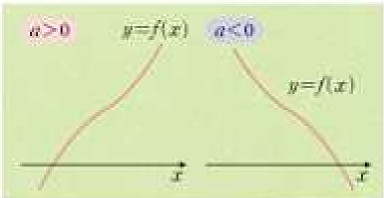
(1) 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha<\beta)$를 갖는 경우



(2) 중근 α를 갖는 경우



(3) 허근을 갖는 경우



|보|충|설|명|

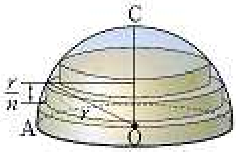
구분구적법으로 구의 부피 구하기

교과서 p.35

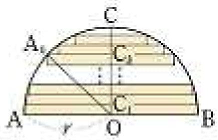
반지름의 길이가 r인 구의 부피를 구분구적법으로 구해 보자.

[그림 1]과 같이 반구의 반지름 $\overline{\mathrm{OC}}$를 n등분하고 각 분점 C_1, C_2, $\cdots$, C_{n-1}을 지나서 밑면에 평행한 평면으로 잘라 $(n-1)$개의 원기둥을 만든다.

[그림 2]와 같이 아래에서 k번째에 있는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이 $\overline{\mathrm{C}_k\mathrm{A}_k}$를 구해 보자.



[그림 1]



[그림 2]

$\triangle \mathrm{OC}_k\mathrm{A}_k$에서

$$\overline{\mathrm{OA}_k}=r,\ \overline{\mathrm{OC}_k}=\frac{k}{n}r$$

이므로

$$\overline{\mathrm{C}_k\mathrm{A}_k}=\sqrt{r^2-\left(\frac{k}{n}r\right)^2}=\frac{r}{n}\sqrt{n^2-k^2}$$

이다.

따라서 k번째에 있는 원기둥의 부피는

$$\pi\times\frac{r^2}{n^2}(n^2-k^2)\cdot\frac{r}{n}$$

이므로 $(n-1)$개의 원기둥의 부피의 합 V_n은

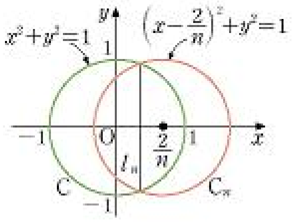
$$V_n=\frac{r}{n}\left\{\frac{(n^2-1^2)r^2}{n^2}\pi+\frac{(n^2-2^2)r^2}{n^2}\pi+\cdots+\frac{\{n^2-(n-1)^2\}r^2}{n^2}\pi\right\}$$

이런 부분까지 꼼꼼히 학습했을 때 진정한 내공이 쌓이는 법이다.

⑧ 수능기출도 포함된 대단원 마무리하기

교과서 익힘책 연습문제에는 수능기출문제까지 포함되어 있다.
익힘책에 실려 있는 몇 개의 수능문항을 소개해 본다.

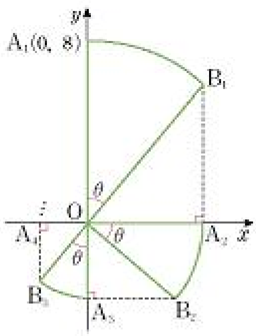
4 $n \ge 2$인 자연수 n에 대하여 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 C를 x축의 방향으로 $\frac{2}{n}$만큼 평행이동한 원을 C_n이라고 하자. 원 C와 원 C_n의 공통현의 길이를 l_n이라고 할 때 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(nl_n)^2}$의 값은?



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

* 2008학년도 수능기출.

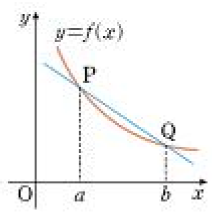
6 오른쪽 그림과 같이 원점 O와 점 $A_1(0, 8)$을 이은 선분 OA_1을 반지름으로 하고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OA_1B_1을 그린다. 점 B_1에서 x축에 내린 수선의 발을 A_2라 하고, 반지름이 선분 OA_2이고, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 점 B_2에서 y축에 내린 수선의 발을 A_3이라 하고, 반지름이 선분 OA_3이고, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OA_3B_3을 그린다. 이와 같이 시계 방향으로 x축과 y축에 번갈아 수선의 발을 내리는 과정을 계속하여 얻은 부채꼴 OA_nB_n의 호 A_nB_n의 길이를 l_n이라고 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = 12\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다.)



① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

* 2006학년도 수능기출.

1 오른쪽 그림은 연속함수 $y=f(x)$의 그래프와 이 그래프 위의 서로 다른 두 점
P$(a,\ f(a))$, Q$(b,\ f(b))$를 나타낸 것이다. 함수 $F(x)$가 $F'(x)=f(x)$를 만족시킬 때, 보기에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

ㄱ. 함수 $F(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 증가한다.

ㄴ. $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$는 직선 PQ의 기울기와 같다.

ㄷ. $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-f(b)\}dx \le \frac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}$

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

* 2005학년도 수능기출.

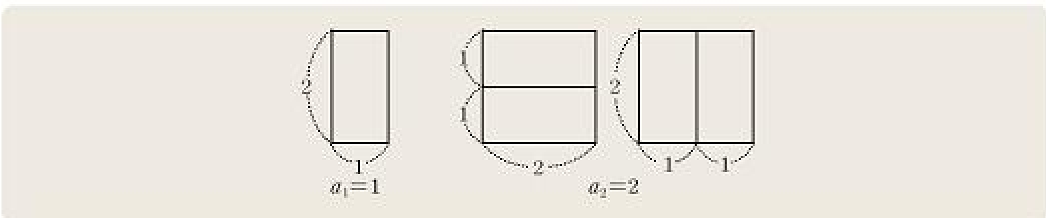
⑨ 출발 수리논술~

수리논술을 두려워 하는 수험생이 꽤 많다.
익힘책 대단원 가장 마지막에 출발, 수리논술란에 대단원별로 1문항씩 실려 있다.
수학1- 4문항, 미통기 4문항, 수2- 4문항, 적통 3문항, 기벡 4문항 이 정도이다.
이 내용만 싹~ 정리해도 수리논술을 처음 공부하는 수험생으로서는 성공적이다.

교과 개념-수능-수리논술과 직접적으로 연계된 주제부터 정리한다면, 수리논술을 처음 공부하는 수험생 치고 손쉽고도 가장 성공적으로 공부하는 것이다. 교과개념-수능-수리논술의 '연계성'을 파악하는 것이 입시의 가장 중요한 부분 중 하나이며, 항상 내가 수업시간에 강조하는 부분이기도 하다.

출발! 수리 논술

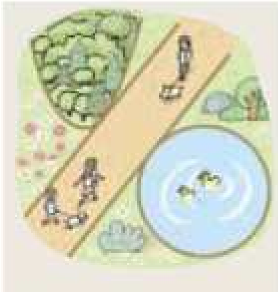
두 변의 길이가 각각 1, 2인 직사각형 모양의 색종이를 이어 붙여서 가로가 n, 세로가 2인 직사각형을 만드는 가짓수를 a_n이라고 하자. 예를 들어, $a_1=1$, $a_2=2$일 때, 다음 물음에 답하여라.[1]



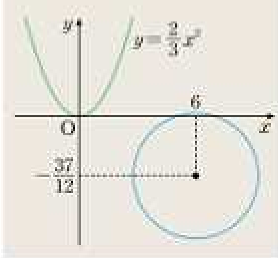
(1) a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 사이의 관계식을 구하여라.
(2) (1)에서 구한 관계식을 이용하여 a_{10}의 값을 구하여라.

출발! 수리 논술

숲과 호수 사이를 지나는 산책로를 만든다.



[1] 여러분이 살고 있는 동네에 숲과 호수로 이루어진 근사한 공원이 조성되었다고 하자. 환경에 대한 인식이 새로워진 요즈음에는 자연 환경을 살린 공원이 많이 생겨나고 있다. 새로 조성되는 이 공원 역시 숲과 호수를 중심으로 환경 친화적인 공원이 되게 하려고 한다. 오른쪽 그림과 같이 숲과 호수는 얼마간 떨어져 있는데, 그 사이에 산책로를 만들고자 한다.
새로 만드는 길은 직선 모양이고 가능하면 폭이 넓어야 하지만 숲과 호수를 침범해서는 안 된다.



[2] 새로 만드는 산책로의 폭을 결정하기 위해 숲과 호수의 영역의 경계선을 좌표평면 위에 나타내어 보기로 하였다. 숲의 영역의 경계선을 나타내는 식을 구하였더니 $y=\frac{2}{3}x^2$을 얻을 수 있었다. 한편, 호수는 중심의 좌표가 $\left(6,\ -\frac{37}{12}\right)$이고 지름의 길이가 6.5 m 인 원 모양인 것으로 조사되었다.

위의 제시문을 바탕으로 새로 조성되는 산책로의 폭을 결정하여라.2)

[답안 작성] 이 단원에서 배운 내용을 바탕으로 자신의 생각을 논리적으로 적어 봅시다.

마지막, 도전! 수학고수

증명문제라거나 쉬운 단답형 수리논술 문제 수준이다. 수능 4점 고난도 문항을 준비하거나, 수리논술을 처음 시작하는 수험생에게 추천한다.

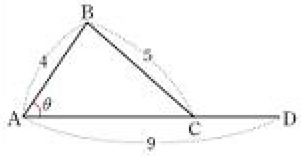
도전! 수학 고수

1 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족할 때, 일반항 a_n을 구하여라.2)

(가) $a_1=3,\ a_2=5$
(나) $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

도전! 수학 고수

1 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=5$, $\overline{AD}=9$, $\angle BAC=\theta$이다. θ가 변함에 따라 점 C가 선분 AD 위를 움직일 때, $\lim_{\theta \to 0}\frac{\overline{CD}}{\theta^2}$의 값을 구하여라.6)



결론 ①, 지금 개념 공부를 하고 있는 수험생이라고 한다면,
정석이나 교과서 처럼 풍부한 설명을 담긴 책이 아닌 짜깁기한 교재밖에 없다면 반성하시고,
지금이라도 늦지 않았으니 교과서와 익힘책에 충성하시길 바란다.

결론 ②, 인강이나 수능기출을 공부하는 수험생이라면 간간히 모르는 부분을 찾는 용도로 미래앤교과서와 익힘책을 추천하는 바이다.

결론 ③, 수리논술을 준비하고자 하는 수험생들은 교과서와 익힘책에 나와있는 모든 정리와 공식을 직접 손으로 증명해 보고 정리하길 추천드리고, 미래앤 익힘책에 나와 있는 수리논술과 수학고수도 같이 정리하길 바란다.

결론 ④, 개념을 어느 정도 공부하였다 하더라도, 혼자 이해하기 어려운 심화내용이나 고난도 수능기출은 있기 마련인데, 그런 경우는 최소분량의 알찬 강좌로 도움받길 권한다. 신동훈샘의 킬러문항 집중탐구 강좌는 그런 목적에 최적으로 부합하는 강좌이니 강력 추천하는 바이다.
http://class.orbi.kr/class/20/

결론 ⑤, EBS수특을 6평 이전까지 풀고 신유형과 고난도 유형만 반복해서 풀어보시라~~
신샘이 신유형, 고난도 문항을 변형시켜 배포할테니 다운받아 풀어 보길 추천드린다.
EBS강좌도 조만간 오픈할 예정임.

이상의 내용을 파일로도 첨부하였으니 프린트해서 다시 한 번 꼼꼼히 읽어 보고 본인의 공부방향을 한단계 업그레이드 시키길 바란다.

* 장문의 글을 쓰느랴 손가락이 많이 혹사 당했다.
  나의 수고를 알아 준다면, "좋아요" 한번씩 누르고 가시길....

이상, 미래 Teacher 고난샘, 신동훈이었습니다 . http://class.orbi.kr/group/3/info