2012년 11월 고3 Uway 중앙교육 모의 대학수학능력시험 문제지

제 2 교시 수리 영역 (가형)

Uway중앙교육

1. $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{4}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin x}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ 0

3. 함수 $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

4. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 함수 $f(x)=2\sin x+2\cos x+2\sqrt{2}$는 $x=a$에서 최댓값 M을 가진다. $a\times M$의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}\pi$ ② 2π ③ $2\sqrt{2}\pi$ ④ 4π ⑤ $4\sqrt{2}\pi$

5. 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$의 점근선 중 기울기가 양수인 직선을 l이라 하자. 점 A(1, 0)과 직선 l 위의 점 P(a, b)에 대하여 직선 AP의 기울기를 $f(a)$라 할 때, $\lim_{a\to\infty} f(a)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$
③ 1 ④ $\sqrt{3}$
⑤ 3

6. 좌표공간의 두 점 A(3, 4, 5), B(0, 0, a)와 xy평면 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값이 $5\sqrt{10}$일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 5 ② 10
③ 15 ④ 20
⑤ 25

7. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ t-1 & t+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 무수히 많은 해를 갖도록 하는 두 실수 t의 값의 합은? [3점]

① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2

8. 두 사건 A, B는 서로 배반사건이고

$$0<P(A)=P(B)<\frac{1}{2}$$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $P(A\cup B)<1$
ㄴ. 두 사건 A, B는 서로 독립이다.
ㄷ. $P(A^C|B)=P(A|B^C)$

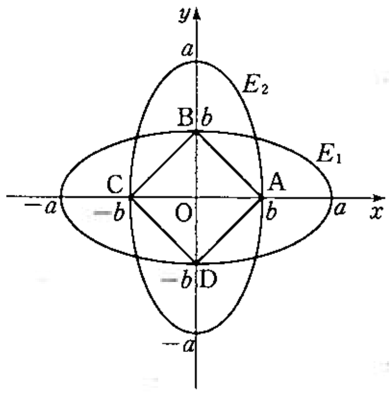
① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄴ, ㄷ

9. 그림과 같이 좌표평면에 두 타원

$$E_1 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$E_2 : \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

이 있다. 두 점 $A(b,\ 0)$, $C(-b,\ 0)$은 타원 E_1의 두 초점이고, 두 점 $B(0,\ b)$, $D(0,\ -b)$는 타원 E_2의 두 초점이다. 사각형 ABCD의 둘레의 길이가 24일 때, 두 타원 E_1, E_2의 장축의 길이의 합은? (단, $a>b>0$) [3점]



① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

10. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $a_1=1,\ a_2=2$
(나) $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

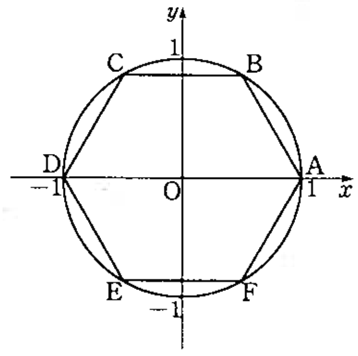
$a_{50}-a_{49}$의 값은? [3점]

① 89 ② 91 ③ 93 ④ 95 ⑤ 97

11. 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정육각형 ABCDEF가 있다. 두 일차변환 f, g를 나타내는 행렬이 각각

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

일 때, 합성변환 $f \circ g^{-1} \circ f$에 의하여 점 $A(1,\ 0)$이 옮겨지는 점은? [3점]



① B ② C ③ D ④ E ⑤ F

12. $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{10}$ 일 때, $\cos 2x$의 값은? [3점]

① $\frac{19}{20}$ ② $\frac{24}{25}$ ③ $\frac{97}{100}$ ④ $\frac{49}{50}$ ⑤ $\frac{99}{100}$

13. 다음 조건을 모두 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은? [3점]

(가) $\log(10\times 2^n)$의 지표와 $\log 4^n$의 지표는 서로 같다.
(나) $\log(10\times 2^n)$의 가수는 $\log 4^n$의 가수보다 크다.

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

14. 온도가 80°C인 음료수 A를 온도가 -10°C로 일정한 냉동실에 넣어둘 때, 넣어둔 지 t분 후의 음료수 A의 온도를 $f(t)$(°C)라 하면 관계식

$$f(t)=-10+cp^{-kt}\ (c,\ p,\ k\text{는 상수},\ t\geq 0)$$

이 성립한다. 온도가 80°C인 음료수 A를 온도가 -10°C로 일정한 냉동실에 넣어둘 때, 넣어둔 지 15분 후의 음료수 A의 온도가 50°C가 되었다. 온도가 80°C인 음료수 A를 온도가 -10°C로 일정한 냉동실에 넣어둘 때, 넣어둔 지 30분 후의 음료수 A의 온도는? [4점]

① 10°C ② 15°C ③ 20°C ④ 25°C ⑤ 30°C

15. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\frac{n(n+1)}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

〈증명〉

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{1}=1$, (우변)$=\frac{1\cdot 2}{2}=1$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$(m은 자연수)일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}+\cdots+\sqrt{m}}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\frac{m(m+1)}{2}$$

이다. 이제, $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}+\cdots+\sqrt{m+1}}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}+\cdots+\sqrt{m+1}}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}+\boxed{(가)}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}+\cdots+\sqrt{m}}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}+\boxed{(가)}$$
$$=\frac{m(m+1)}{2}+\sqrt{m+1}\times\boxed{(나)}+\boxed{(가)}$$
$$=\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

따라서, $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에서 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

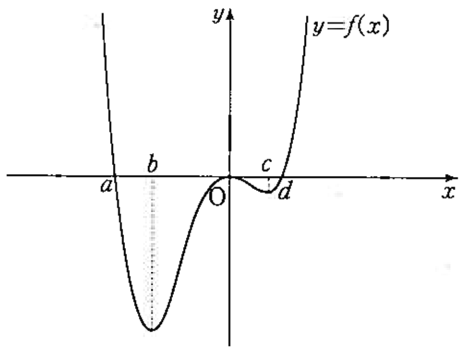
위의 증명에서 (가), (나)에 들어갈 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(8)+g(9)$의 값은? [4점]

① $12-8\sqrt{2}$ ② $12-6\sqrt{2}$ ③ $12-4\sqrt{2}$ ④ $8-6\sqrt{2}$ ⑤ $8-4\sqrt{2}$

16. 그림과 같이 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 $a<b<0<c<d$인 네 실수 a, b, c, d에 대하여

$$f(a)=f(0)=f(d)=0,\ f'(b)=f'(0)=f'(c)=0$$

을 만족시킨다.



함수 $g(x)$를 $g(x)=xf(x)$라 할 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 증가상태에 있다.
ㄴ. 함수 $g(x)$는 $x=b$에서 극값을 가진다.
ㄷ. 점 $(0, g(0))$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

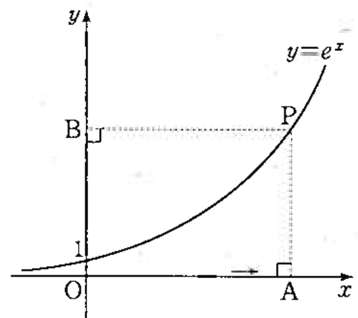
17. $0\le x\le 2$에서 정의된 함수 $f(x)=\ln(x+1)$과 연속함수 $g(x)$가 다음을 만족시킨다.

$$\begin{cases} f(x)<g(x) & (0\le x<1) \\ f(x)=g(x) & (x=1) \\ f(x)>g(x) & (1<x\le 2) \end{cases}$$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $x=0$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같을 때, $\int_0^2 g(x)dx$의 값은? [4점]

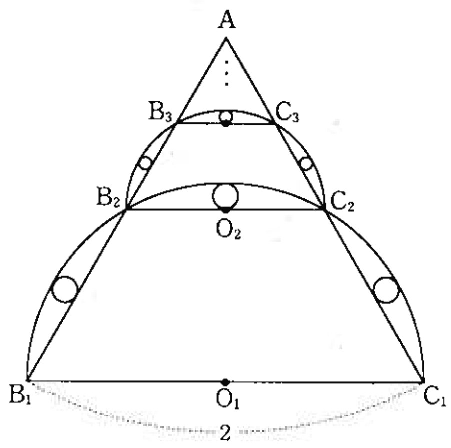
① $-1+2\ln 3$ ② $-2+3\ln 3$
③ $\ln 3$ ④ $1+2\ln 3$
⑤ $2+3\ln 3$

18. 그림과 같이 좌표평면 위에서 점 P가 점 $(0, 1)$을 출발하여 곡선 $y=e^x$ 위를 움직일 때, 점 P에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. 점 A가 x축 위를 매초 2의 일정한 속도로 움직일 때, 점 P가 출발한 지 5초가 되는 순간, 사각형 OAPB의 넓이의 시간(초)에 대한 변화율은? (단, O는 원점이고, 점 P는 출발 후 제1사분면 위에 있다. 또, e는 자연로그의 밑이다.) [4점]



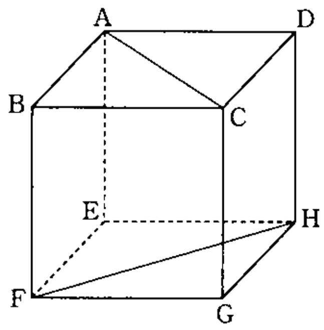
① $20e^9$ ② $20e^{10}$
③ $22e^9$ ④ $22e^{10}$
⑤ $24e^{10}$

19. 한 변의 길이가 2인 정삼각형 AB_1C_1이 있다. 그림과 같이 선분 B_1C_1을 지름으로 하는 반원 O_1이 두 선분 AB_1, AC_1과 만나는 점을 각각 B_2, C_2라 하자. 세 호 B_1B_2, B_2C_2, C_2C_1과 세 현 B_1B_2, B_2C_2, C_2C_1으로 이루어진 세 활꼴에 내접하는 원 중에서 반지름의 길이가 가장 큰 원을 세 활꼴의 내부에 각각 하나씩 그리고, 이 세 원의 둘레의 길이의 합을 l_1이라 하자. 또, 선분 B_2C_2를 지름으로 하는 반원 O_2가 두 선분 AB_2, AC_2와 만나는 점을 각각 B_3, C_3이라 하자. 세 호 B_2B_3, B_3C_3, C_3C_2와 세 현 B_2B_3, B_3C_3, C_3C_2로 이루어진 세 활꼴에 내접하는 원 중에서 반지름의 길이가 가장 큰 원을 세 활꼴의 내부에 각각 하나씩 그리고, 이 세 원의 둘레의 길이의 합을 l_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 l_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]



① $(2-\sqrt{3})\pi$ ② $2(2-\sqrt{3})\pi$
③ $3(2-\sqrt{3})\pi$ ④ $4(2-\sqrt{3})\pi$
⑤ $5(2-\sqrt{3})\pi$

20. 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 ABCD−EFGH에 대하여 선분 AC를 지름으로 하는 구와 선분 FH를 지름으로 하는 구가 있다. 이 두 구의 내부의 공통 부분의 부피는? [4점]



① $\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)\pi$

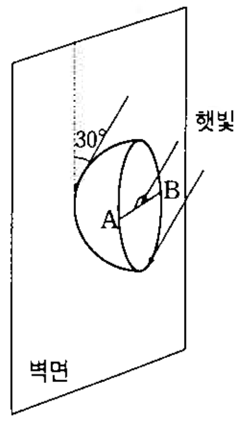
② $(2\sqrt{2}-2)\pi$

③ $\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}-\frac{10}{3}\right)\pi$

④ $\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}-\frac{8}{3}\right)\pi$

⑤ $\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}-2\right)\pi$

21. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 밑면의 지름으로 하는 반구가 벽면에 접하면서 고정되어 있다. 햇빛이 벽면과 30°의 각을 이루고 지름 AB에 수직으로 비칠 때, 벽면에 생기는 반구의 그림자의 넓이는? (단, 반구의 밑면은 벽면과 평행하고, 반구의 그림자는 모두 벽면에만 생긴다.) [4점]



① 4π

② $(2+2\sqrt{3})\pi$

③ $4\sqrt{2}\pi$

④ 6π

⑤ $(2+4\sqrt{3})\pi$

단 답 형

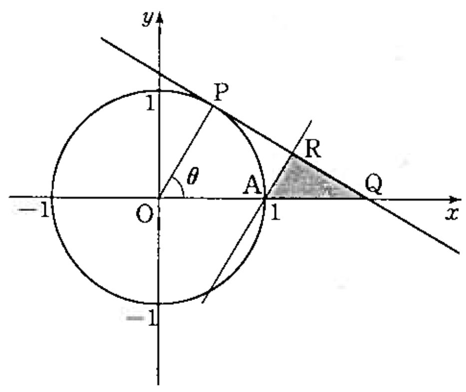
22. 다항식 $2\left(2x+\frac{1}{2}\right)^{10}$의 전개식에서 x^4의 계수를 구하시오. [3점]

23. x에 대한 분수부등식 $\frac{x-a^2}{(x-a)(x-2a)} \le 0$을 만족시키는 자연수 x의 개수가 55일 때, 자연수 a의 값을 구하시오. [3점]

24. 좌표공간에서 평면 $3x+y-4z=100$과 zx평면의 교선을 l이라 하자. 직선 l 위의 점 P에 대하여 선분 OP의 길이의 최솟값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [3점]

25. 서로 다른 3개의 상자에 같은 종류의 구슬 15개를 모두 넣을 때, 홀수 개의 구슬이 들어가는 상자가 오직 1개가 되도록 하는 방법의 수를 구하시오. (단, 빈 상자는 없도록 하고, 구슬은 서로 구별하지 않는다.) [3점]

26. 그림과 같이 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, 점 A(1, 0)을 지나고 직선 OP와 평행한 직선이 직선 PQ와 만나는 점을 R라 하자. 또, $\angle\mathrm{POA}=\theta$라 할 때, 삼각형 AQR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $40\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값을 구하시오. (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]



27. 어느 단축 마라톤 대회에 출전한 참가자들의 기록은 평균 30분, 표준편차 4분인 정규분포를 따른다고 한다. 기록이 30분 이하인 참가자들 중에서 임의로 한 참가자를 택할 때, 이 참가자의 기록이 24분 이상일 확률은 p이다. $100p$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [4점]

〈표준정규분포표〉

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.19
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48

28. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=4$이고 $\angle\mathrm{B}=90°$인 직각이등변삼각형 ABC에 대하여 삼각형 ABC를 포함하는 평면 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$

(나) $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}})$

이때, $|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]

29. 한 개의 동전을 두 번 던져서 두 번 모두 앞면이 나오면 1점을 얻고, 뒷면이 적어도 한 번 나오면 2점을 얻는 게임이 있다. 이 게임을 4번 할 때, 7점을 얻을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 실수 x에 대하여 x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$로 나타내자.
$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2^n}+\frac{1}{10^{10}}\right]=S$일 때, $|S|$의 값을 구하시오.
(단, $\log 2=0.3010$으로 계산한다.) [4점]

♣ 확인 사항
답안지에 필요한 사항을 정확히 기입(표기)하였는지 확인하시오.