9월 모의고사 문항 분석

21. 좌표평면에서 두 함수

$$f(x)=6x^3-x,\quad g(x)=|x-a|$$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [4점]

① $-\frac{11}{18}$　② $-\frac{5}{9}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ $-\frac{4}{9}$　⑤ $-\frac{7}{18}$

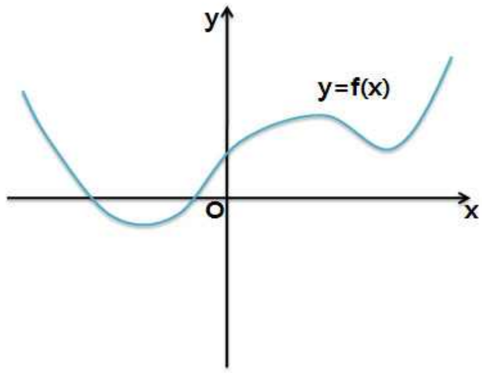
이 문제는 미적분 유형 중에서 가장 어려웠다고 생각되는 문제이다. 방정식과 미분 문제는 그래프를 정확히 해석할 수 있어야 하므로 어려운 편인데, 이 문제 역시 그래프를 심층적으로 이해할 수 있어야 했던 문제로 정형화된 유형에만 익숙해져 온 학생이라면 해결하기 쉽지 않을 수 있다. 이 문제를 통해서 미분법의 주요 내용들을 다시 한 번 확인하고 그래프 문제를 전반적으로 다시 다뤄 볼 필요가 있을 것 같다.

Warming Up

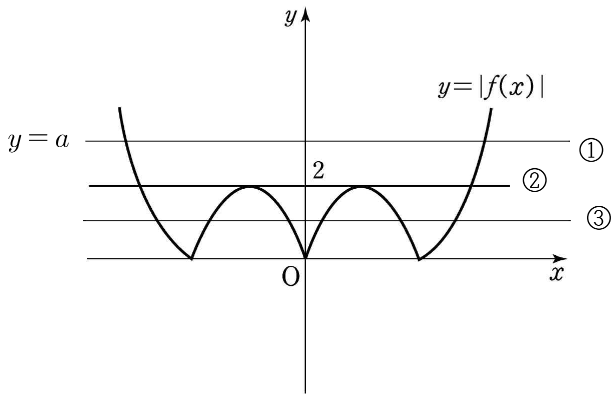
이 문제는 그래프를 자유자재로 다룰 수 있어야 풀 수 있는 문제이기 때문에 그래프에 대한 기본적인 내용들을 다시 한 번 점검해 볼 필요가 있을 것 같다.

1. $y=f(x)$의 그래프가 아래와 같다.

이 그래프를 이용하여, (1) $y=|f(x)|$와 (2) $y=f(|x|)$의 그래프를 그리시오.



2. 오른쪽 그래프를 이용하여, $|f(x)|=1$, $|f(x)|=2$, $|f(x)|=3$의 해의 개수를 구하고, 왜 그렇게 생각하였는지 ①, ②, ③ 중에 하나로 답하시오.



개념 재확인

Warming Up 문제는 어렵지 않지만, 중요한 내용을 담고 있기 때문에 천천히, 차분히, 세심하게 읽어 보도록 하자.

1. 절댓값 기호가 들어간 함수의 그래프 그리기

고1 때 해봤겠지만, 할 때마다 헷갈리는 내용 중에 하나이다. 이번에 절댓값 기호가 들어간 함수의 그래프를 그리는 것이 나왔으므로, 복습해 보도록 하자.

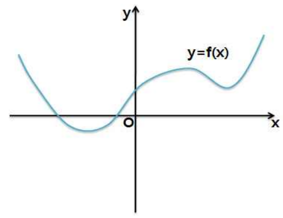
절댓값 기호가 들어간 함수의 그래프 그리기

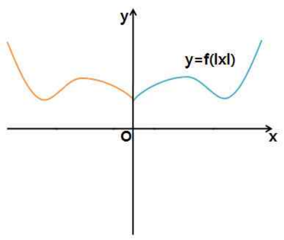
① $y=f(|x|)$ ➡ $x \geq 0$인 $y=f(x)$를 그린 후 y축에 대하여 대칭으로 그린다.

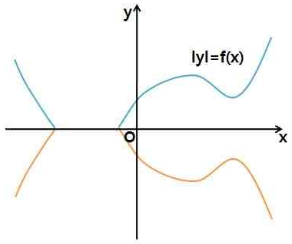
② $|y|=f(x)$ ➡ $y \geq 0$인 $y=f(x)$를 그린 후 x축에 대하여 대칭으로 그린다.

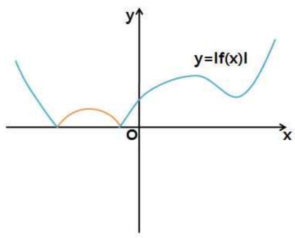
③ $y=|f(x)|$ ➡ x축 아래 부분을 접어 올린다.

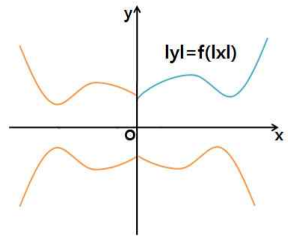
④ $|y|=f(|x|)$ ➡ 제1사분면을 그린 후 나머지 사분면은 제1사분면을 대칭이동하여 그린다.











특히 ③, ④에 대해서 알아 두는 것이 좋다. ③번은 수능에도 자주 나오는 그래프 그리는 방법이며, 함수에 절댓값이 씌워지면 이것저것 고려할 것이 많아져서 어려워지기 때문에 그래프 그리는 법은 반드시 알아야 한다. ④번은 정사각형이나 마름모 같은 도형을 그려줄 때 가끔 사용되기 때문에 알아 두는 것이 좋다.

절댓값 기호를 푸는 원칙은 항상 절**댓값 기호 안이 0보다 크거나 같은지, 0보다 작은지를 따지는 것**부터 시작된다. (0은 대부분이 경우 어느 쪽에 붙여도 큰 문제는 없다) 마찬가지로 절댓값 기호가 붙은 함수의 그래프를 그릴 때도, 절댓값 기호 안이 0이 되는 지점을 반드시 찾아 주어야 한다.

이런 방식으로 그래프를 그릴 때 중요한 것은 $y=f(|x|)$의 경우, 모든 x에 절댓값이 붙은 것으로 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후에 한번에 대칭이동 시키는 식으로 그릴 수 있지만, $y=x^2+|x|+1$과 같이, 절댓값 기호가 일부 x에만 붙어 있는 경우는 $x \geq 0$, $x<0$으로 경우를 쪼개서 그려 주어야 한다는 사실을 잊지 말자.

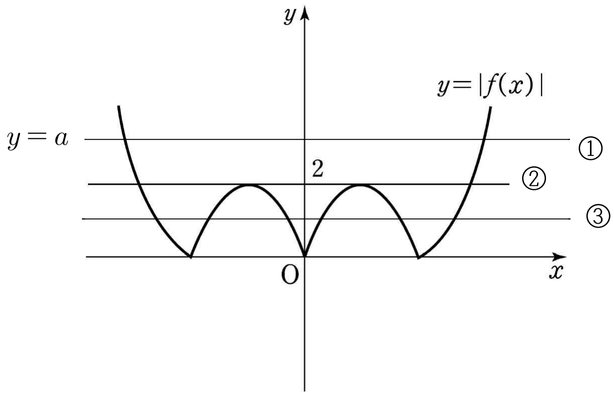
2. 방정식과 그래프

절댓값 기호가 그래프와 연관하여 나오는 문제는 대부분이 방정식과도 문제가 연관된 경우가 많다. 우리는 여기서 방정식과 그래프를 연결하는 중요한 명제 하나를 알고 가야 한다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(a,\ b)$에서 만난다. $\Leftrightarrow$ $f(a)=g(a)=b$

그래프		방정식
$y=f(x)$, $y=g(x)$	➡	$f(x)=g(x)$
두 곡선이 점 A에서 만난다. 두 곡선의 교점의 개수가 n개이다.		점 A의 x좌표가 방정식의 해이다. 방정식을 만족하는 실근의 개수는 n이다.

웬만한 고난도 문제에서는 빠지지 않고 등장하는 관계이며, 이 내용을 모르면 손을 댈 수가 없는 문제가 매우 많다.



이 그래프를 확인해 보자. 이 그래프는 많은 것을 알려 주고 있다. (x축에 평행한 직선이 여러 개인 것은 $y=a$를 **이동**시키면서 생각할 수 있다는 것을 보여준다.)

$y=|f(x)|$의 그래프와 $y=a$의 그래프의 교점의 개수는 a의 값에 따라서 달라지고 있다. 문자가 여러 개 나와서 헷갈릴 수 있으니 차분히 생각해 보아야 한다. ①은 a가 2보다 큰 경우를 나타내고 있다. 이때 $y=|f(x)|$와 $y=a$의 그래프는 두 점에서 만나며, $|f(x)|=a$의 해의 개수는 2개가 된다. $a=2$인 경우는 ②번이며, 이 경우는 접하고 있기 때문에 방정식이 해의 개수는 4개이며. ③의 경우는 $0<a<2$인 경우로, 6개의 점에서 만나고 있기 때문에 해의 개수가 6개가 된다.

이렇게 a의 값에 따라서 방정식의 해의 개수가 변한다. a의 값에 따라서 그래프가 이동하기 때문에, a는 대부분 그래프를 그릴 수 있는 중요한 점들이 된다. **직선이라면 y절편이나 기울기가 될 수 있고, 원이라면 중심** 등이 될 수가 있을 것이다. 이 때, **해의 개수가 변하는 점들은 문제에서 중요한 점이 될 것**이다. 이 점들은 주로 **접점**이 되는 경우가 많다, 문제에서 "이 방정식의 해의 개수를 $f(a)$라고 정의할 때" 라고 해의 개수를 함수로 정의한다면, 반드시 이 점들을 확인할 필요가 있다.

이제 문제풀이로 가 보도록 하자.

꼼꼼한 문제풀이

문제에서 묻는 것은 아래와 같다.

① $f(x)=6x^3-x$, $g(x)=|x-a|$ 의 그래프가
② 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는
③ 모든 실수 a의 값의 합

그래프가 '서로 다른 두 점'에서 만난다는 것은 $6x^3-x=|x-a|$의 해가 2개라는 것으로도 생각할 수 있다. 그러면 우리는 문제풀이를 위한 두 가지 전략을 세울 수 있을 것이다.

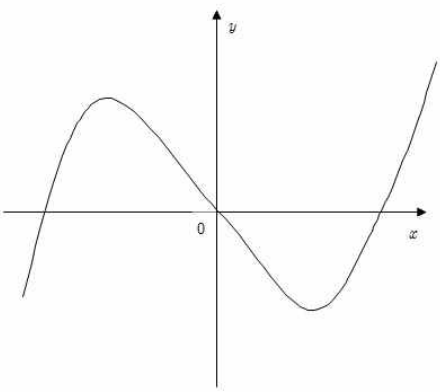
1. 그래프를 그리고, a를 바꾸어 가면서 교점의 개수를 확인하는 방법
2. 방정식을 세우고, 절댓값 기호를 풀고 방정식의 해의 개수를 조사하는 방법

절댓값 기호가 있는 문제에서는 1번의 방법이 효과적인 경우가 많기 때문에, 1번 방법으로 풀어 볼 것이다.

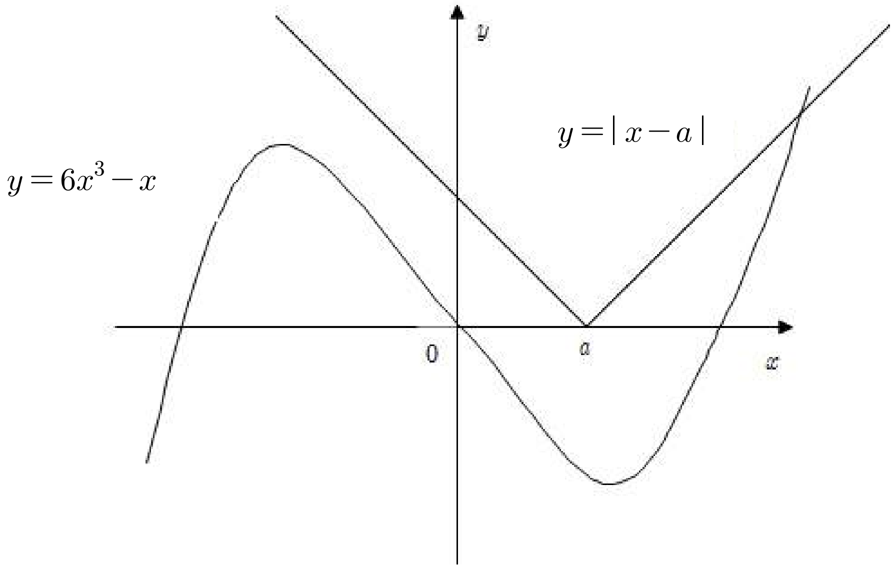
>> 그래프를 이용한 풀이

그래프를 이용한 풀이는 **"해의 개수"를 확인할 때 매우 유용**하다. 많은 경우 우리는 그래프의 정확한 해를 구하지 못하고 해의 개수만 구할 수 있다. 이를테면 $x=\log_2 x$ 같은 방정식에서 우리는 고등학교 과정에서 해를 구할 수 없다. 그렇기 때문에 그래프를 그리고 해를 구하는 것이다. 그래프를 그리는 경우, 정의역이나 공역에 범위가 있는 것도 쉽게 고려할 수 있어서 매우 편리하다.

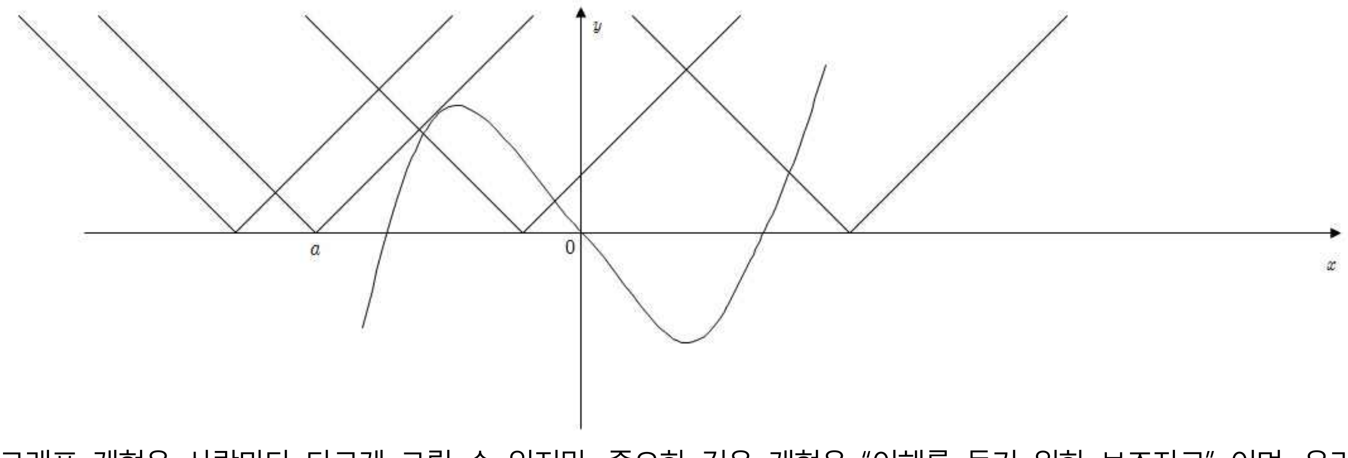
그러면 먼저 $f(x)=6x^3-x$의 그래프를 그려 보도록 하자. 극점을 구하기 전에 간단히 식을 인수분해하면 $f(x)=x(6x^2-1)$로, $x=0,\ x=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}$으로 x축과 만나는 세 개의 점을 쉽게 찾을 수 있기 때문에, 이를 통해서 그래프의 개형을 그리고, 그 다음에 필요에 따라서 극대점이나 극소점을 찾는 것이 좋을 것 같다. 물론 문제에 따라서 x축과의 교점을 찾지 않고 바로 극점을 구해서 가는 경우도 있는데, 이 경우 교점을 찾는 것은 그 점이 의미가 있어서기보다는 **그래프가 대략적으로 어떻게 생겼는지를 확인하기 위해서**이다. 그래프는 오른쪽처럼 생겼으며, 교점은 표시하지 않았고, 원점은 표시했다.



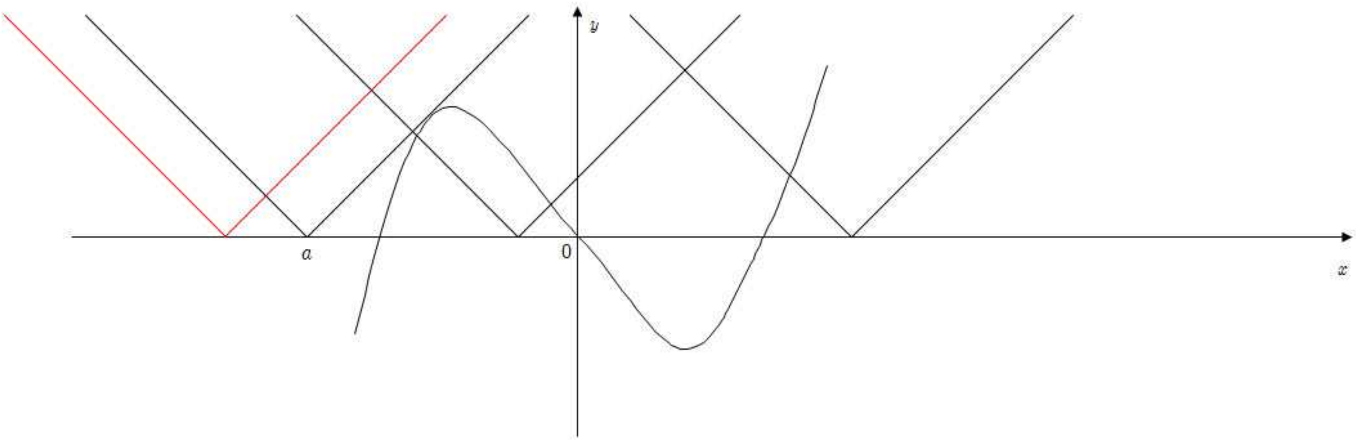
개형을 찾은 다음에, $g(x)=|x-a|$의 그래프를 그려 보도록 하자. 앞에서 절댓값 기호가 있는 그래프를 그리는 방법을 소개했는데, $y=|x-a|$와 같은 경우는 $x=a$를 기준으로 그래프가 꺾인 쐐기 모양의 형태라고 개형을 알아 두는 것이 좋다. 앞에서 그린 $f(x)=x(6x^2-1)$의 개형과 함께 표시하면 아래와 같다.



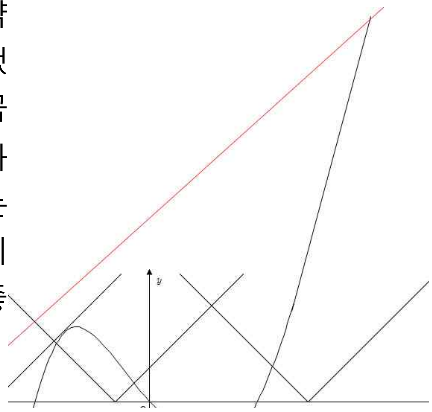
그래프를 확인하였으니 a를 바꾸어 가면서 교점의 개수를 확인해 보도록 하자. **이 때 주의할 것은** $y=6x^3-1$ **은 곡선이기 때문에, 직선과 곡선의 접점에 대해서도 생각해 보아야 한다는 점이다.** 그래프를 간단히 그리는 것은 좋지만, 반드시 의미 있는 점들은 제대로 나타낼 수 있도록 생각을 하고 그려야 하는 것이 중요하다.



그래프 개형은 사람마다 다르게 그릴 수 있지만, 중요한 것은 개형은 “이해를 돕기 위한 보조자료” 이며, 우리는 개형에서 의미를 갖는 점을 항상 생각하고 있어야 한다. a를 이동시키다 보면 위 경우처럼 교점이 바뀌는 것을 볼 수 있는데, 이런 문제에 익숙하지 않은 학생이라면 여기서 심각한 실수를 할 수 있다.



이 상황에서 빨간색 그래프와 곡선의 교점의 개수는 몇 개인가? 여기서 만약 "0개"라고 말했다면, 내가 우려한 그 상황에 해당한다. 개형은 앞에서도 말했지만 이해를 돕기 위한 수단일 뿐이다. 우리는 이 문제에서 나오고 있는 곡선이 $+\infty$, $-\infty$쪽으로 무한히 뻗어나간다는 것을 알아야 한다. 다시 말하면 빨간색의 경우는 오른쪽과 같이 그래프를 "끝까지" 그렸을 때 언젠가는 만나게 된다는 것이다. 이런 의미 없는 그래프를 그리기 위해서 지면을 낭비하는 것은 의미 있는 행동이 아니며, 평소 문제풀이 시 주의를 하는 것이 좋다.



아무튼 다시 위로 돌아가면 빨간색 경우는 그래프가 한 점에 만나는 것을 알 수가 있으며, 바로 그 오른쪽의 접하는 경우부터 두 점에서 만나는 것을 확인할 수 있을 것이다. 이 문제는 단순히 교점 확인 문제가 아니고 a 값을 구해서 더해야 하는 문제이므로 우리는 개형을 통해서 $y=|x-a|$의 그래프의 오른쪽 부분, 즉 $y=x-a$가 곡선과 접하는 접점을 구하고, 이를 통해서 a를 구하는 식으로 문제를 풀어가야 한다는 것을 알 수 있었다.

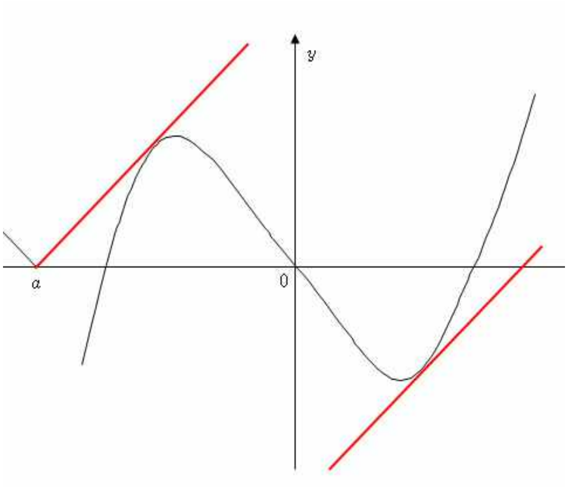
그러면 접점을 구해야 하는데, $y=x-a$의 그래프에서 직선의 기울기는 1이므로, $y=6x^3-x$을 미분한 다음, 기울기가 1이 되는 점을 찾으면 될 것이다.

따라서 미분을 하면 $y=18x^2-1$이 나오며 이 값이 1이 되어야 하므로

$$18x^2-1=1 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{3}$$

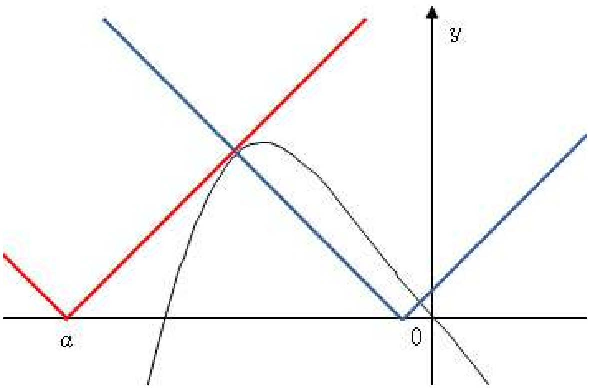
으로 접점의 x좌표는 $\pm\frac{1}{3}$이라는 것을 알 수 있다.

여기서 의문이 들 것이다. 앞에서 그린 개형을 보니 접점의 x좌표는 $-\frac{1}{3}$이 되어야 할 것인데, 왜 우리는 $+\frac{1}{3}$이라는 것까지 얻었을까?



그 이유는 왼쪽 그림을 보면서 생각하면 알 수 있다. 우리가 접점을 구할 때 $f'(x)=1$로, 접선의 기울기가 1인 지점을 모두 찾았다. 이 때 우리가 생각하는 함수가 절댓값 기호가 있는 함수라는 사실은 고려되지 않았다. 그렇기 때문에 당연히 답으로 나오는 것은 왼쪽처럼 두 가지가 나오는 것이며 그 중에서 우리가 취해야 할 것은 음수인 $x=-\dfrac{1}{3}$이다. 이것은 a의 값이 아니고 교점의 x좌표이기 때문에, $f(x)=6x^3-x$에 대입하여 교점의 좌표인 $\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9}\right)$를 구하고, 이 점을 $y=|x-a|$의 그래프가 지나기 때문에 대입하여 a를 구하면

$$\frac{1}{9}=\left|-\frac{1}{3}-a\right| \Rightarrow \frac{1}{9}=\left|\frac{1}{3}+a\right| \Rightarrow \frac{1}{3}+a=\pm\frac{1}{9} \Rightarrow a=-\frac{4}{9},\ -\frac{2}{9}$$



가 되는 것이다. 이것도 값이 2개가 나오는데, 그것은 왼쪽 그림처럼 빨간색과 파란색의 두 가지 경우가 나오기 때문으로 우리는 빨간색 경우만 생각해야 하기 때문에 $a=-\dfrac{4}{9}$가 옳은 a이다.

이 문제는 출제자가 의도한 것인지는 몰라도, 여기까지만 구해서 $a=-\dfrac{4}{9}$라고 답을 골라도 맞게 된다. 약간 이상하게 생각했을 사람들은 a를 모두 더하라고 문제에서 나왔는데, 막상 구해진 답은 1개 뿐이라는 게 이상할 수 있었을 것이다. 사실 a는 2개가 나오며, 답이 $a=-\dfrac{4}{9}$인 것은 나머지 $a=0$이었기 때문이다. $a=0$인 점은 개형만 생각해서는 쉽게 생각하기가 어려운데 어떻게 구해야 하는 것일까?

이 답은 지금까지의 풀이과정을 다시 생각해보면 구할 수 있다. 우리가 지금까지 구한 것은 $y=|x-a|$와 곡선의 **"오른쪽" 부분이 접하는 경우**다. 하지만, 그것은 대충 개형으로 그린 것으로부터 생각한 것이기 때문에 우리는 **"왼쪽" 부분**에 대해서도 생각해 볼 필요가 있겠다. 즉, $f'(x)=-1$인 경우도 생각을 해 보아야 하는 것이다.

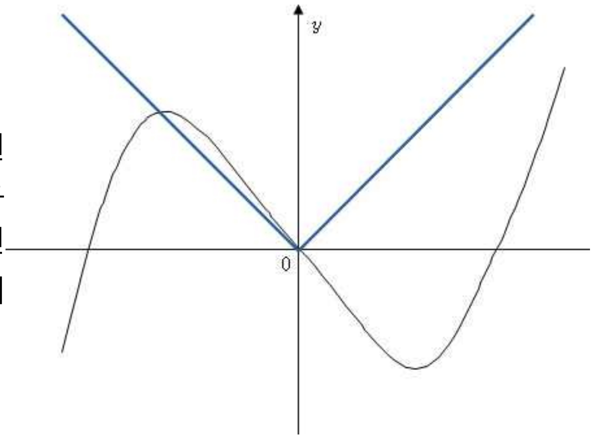
사실 시험장에서 여기까지 생각했어야 올바른 풀이다. 답만 맞았다고 좋아할 것이 아니다.

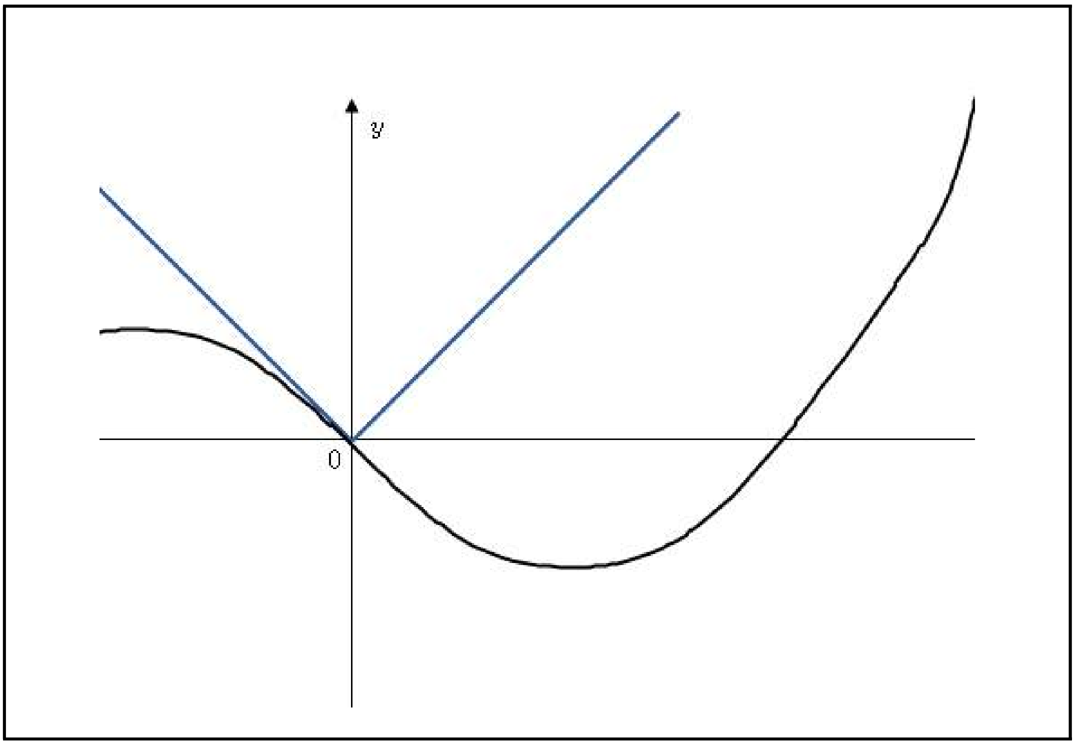
다시 문제로 돌아가 $f'(x)=-1$인 점을 확인해 보도록 하자.

$18x^2-1=-1$

$\Rightarrow\ x=0$

이 경우 $x=0$이 나오는데, 그래프를 그려 보면 오른쪽처럼 뭔가 '접하지 않는 것'처럼 보이는 그래프가 나오는데, 그것은 우리가 **그래프의 개형**을 그렸기 때문이고, 정확히 그래프를 그린다면 제대로 된 그래프는 실제로 아래 그래프와 같이 $x=0$에서만 미세하게 접하는 경우처럼 될 것이다.





따라서 접점의 x좌표는 0, 접점을 구하면 $(0,\ 0)$이고, 이를 $y=|x-a|$에 대입하면 $a=0$이 나온다.

아마 수능에서는 이런 미세한 내용이 답을 결정하는 중요한 선지 중 하나로 나올 수 있을 것 같아 보인다. 개형에서는 확인하기가 어렵지만, **개형을 통해서 답을 구하는 과정을 생각하고, 그것을 식으로 정확히 풀면서 개형으로 확인하기 어려운 점까지 식으로 구하는 것**이 이 문제 풀이의 핵심이라고 할 수 있다.

답 : ④ $-\dfrac{4}{9}$

* 자연계열의 학생이라면 $(0,\ 0)$이 변곡점이라는 것을 알 수 있을 것이다. 즉, $f''(x)=36x$로 $x=0$에서 그래프의 볼록성이 바뀌므로 $x<0$에서는 위로 볼록, $x>0$에서는 아래로 볼록이 되어서 위 그림처럼 접하게 되는 것을 좀 더 쉽게 확인할 수 있을 것이다.