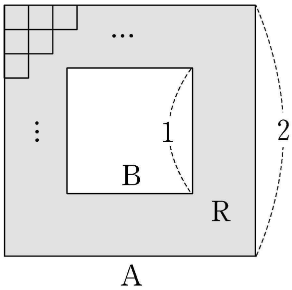
11. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 A와 한 변의 길이가 1인 정사각형 B는 변이 서로 평행하고, A의 두 대각선의 교점과 B의 두 대각선의 교점이 일치하도록 놓여있다. A와 A의 내부에서 B의 내부를 제외한 영역을 R라 하자. 2 이상인 자연수 $n$에 대하여 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형을 다음 규칙에 따라 R에 그린다.

| |
|---|
| (가) 작은 정사각형의 한 변은 A의 한 변에 평행하다.<br>(나) 작은 정사각형들의 내부는 서로 겹치지 않도록 한다. |

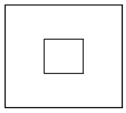
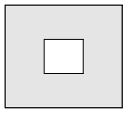
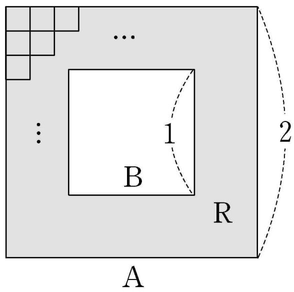
이와 같은 규칙에 따라 R에 그릴 수 있는 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형의 최대 개수를 $a_n$이라 하자. 예를 들어, $a_2=12$, $a_3=20$ 이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{a_{2n}-a_{2n-1}}=c$ 라 할 때, $100c$의 값을 구하시오.[4점]



# 최종보스 공략하기

대표적인 발견적 추론 문제이다. 문제가 길어서 어려워 보일수도 있지만 막상 풀다 보면 답은 의외로 간단하게 나올 수도 있다.

## 표현 정리하기

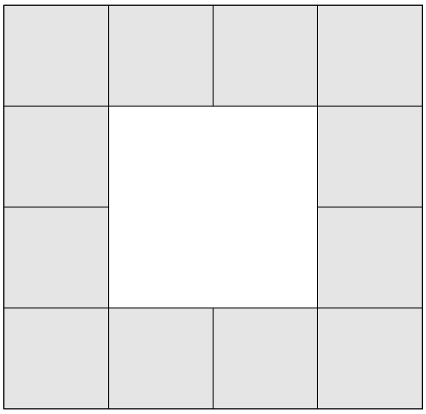
| | |
|---|---|
| 3. ① 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 A와 한 변의 길이가 1인 정사각형 B는 변이 서로 평행하고, A의 두 대각선의 교점과 B의 두 대각선의 교점이 일치하도록 놓여있다. | ① 말이 매우 길지만 결과적으로 문제에 나온 정사각형 두 개를 말하는 것이다.  |
| ② A와 A의 내부에서 B의 내부를 제외한 영역을 R라 하자. | ② 색칠한 영역을 말하고 있다.  |
| ③ 2 이상인 자연수 $n$에 대하여 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형을 다음 규칙에 따라 R에 그린다. | |
| ④ (가) 작은 정사각형의 한 변은 A의 한 변에 평행하다. (나) 작은 정사각형들의 내부는 서로 겹치지 않도록 한다. | ④ 아래 그림처럼 정사각형을 그린다는 의미이다.   |
| 이와 같은 규칙에 따라 ⑤ R에 그릴 수 있는 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형의 최대 개수를 $a_n$이라 하자. 예를 들어, $a_2=12$, $a_3=20$ 이다. | ⑤ $a_n$이 나왔다. 문제의 핵심이다. |
| ⑥ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{a_{2n}-a_{2n-1}}=c$ 라 할 때, $100c$의 값을 구하시오.[4점] | ⑥ 구하라는 내용이다. 단답형 답을 만들기 위한 극한으로 보인다. |

도형에 대한 설명은 글로만 이해하려 하기보다는 도형을 보고 바로 파악하는 것이 낫다. 대부분 도형에도 글에 나온 내용들을 그대로 표시를 해 주기 때문에, 문제를 풀다가 막히는 부분이 있으면 글을 다시 읽어 보면서 도형이 어떻게 만들어졌는지를 확인하는 것이 좋다.

## 발견적 추론

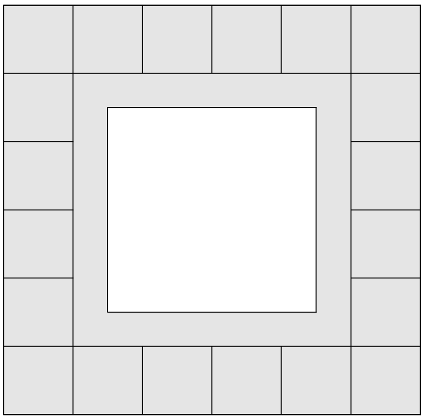
새로운 규칙이 나오고, 예가 나온 문제는 직접 해 봐야 한다. 그러면서 규칙이 나오기 때문이다. 조금 힌트가 될 만한 것은 문제에서 구하라는 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{a_{2n}-a_{2n-1}}=c$ 식인데, $a_{2n}$과 $a_{2n+1}$이 있는 것으로 보아 짝수와 홀수 일 때 규칙이 다를 것이라는 생각을 해 볼 수 있다.

일단 예로 든 것을 해 보면서 확인하는 것이 좋다. 예는 새로운 규칙을 제대로 이해하였는지 확인할 수 있는 좋은 도구이므로 적극 활용하자. 문제에서 예로 제시되는 것은 문제를 푸는 데 있어서 힌트가 될 수도 있다.



① $a_2=12$는 어떻게 나왔는가?

$a_2$는 문제에 따르면 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정사각형을 그리는 것을 말한다. 문제의 R 영역(색칠된 부분)에서 폭이 정확히 $\frac{1}{2}$이므로, 그냥 아래 그림처럼 쪼개 주면 12개가 나온다는 것을 쉽게 구할 수 있다.

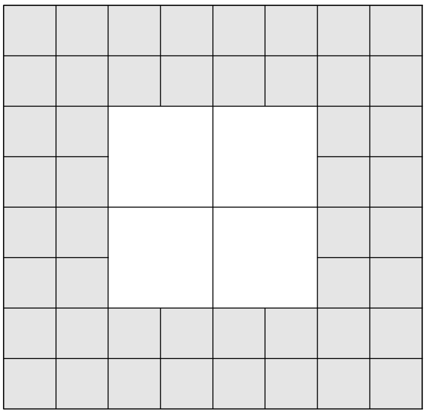


② $a_3=20$은 어떻게 나왔는가?

$a_3$는 한 변의 길이가 $\frac{1}{3}$인 정사각형을 그리는 것인데, 위와 다르게 $R$ 영역을 모두 채울 수는 없고, 어느 정도 비워 둘 수밖에 없다.
그래서 결과적으로 한 변에 6개씩만 들어가고, 그것이 네 변이 있으면 $6\times4$, 그리고 꼭지점은 한 번씩 겹치므로, 4를 빼 주어서 $6\times4-4=20$이 나온다는 것을 알 수 있다.

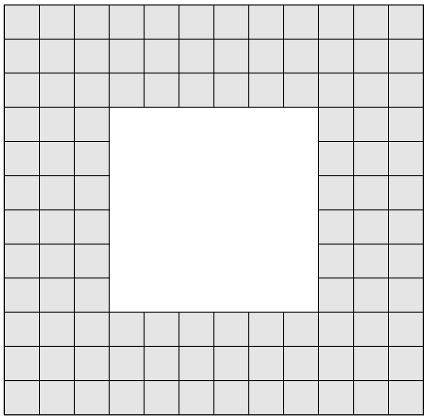
확실히 짝수일 때와 홀수일 때가 다르다는 것이 눈에 보인다. 짝수는 R 영역을 빈틈없이 다 점유하고 있지만, 홀수일 때는 어쩔 수 없이 비워둬야 하기 때문이다. 이 내용을 토대로 규칙을 찾아보도록 하자.

먼저 짝수일 때는 간단하다.



$n=4$

$12\times 4=48$



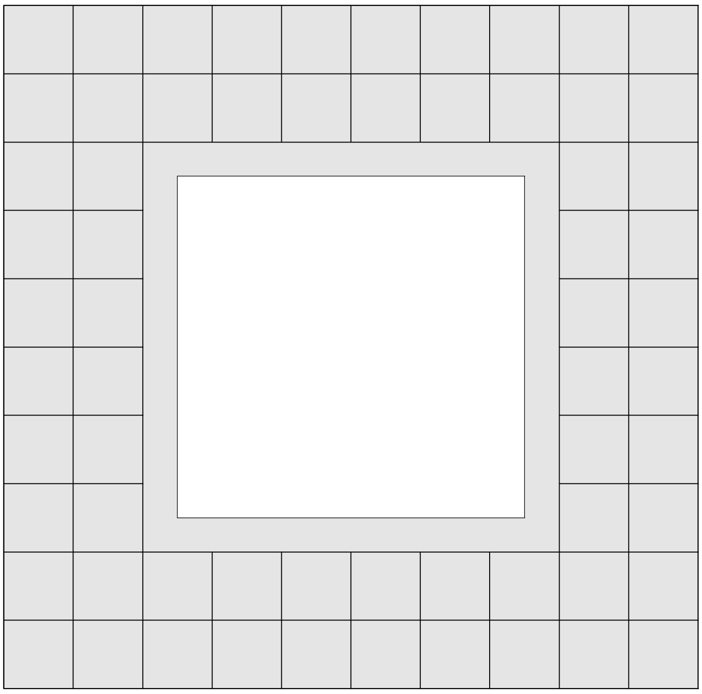
$n=6$

$12\times 9=108$

앞에서 만들어진 12개를 쪼개 가면 되기 때문이다. 즉 $n=4$인 경우는 한 변의 길이가 $\frac{1}{4}$이므로 $n=2$일 때의 정사각형에 4개씩 들어가게 된다. 따라서 처음에 있던 정사각형 12개마다 4개씩이므로 $12\times 4$개가 들어가게 된다. 마찬가지로 $n=6$인 경우도 $n=2$일 때의 정사각형에 9개씩 들어가므로 $12\times 9$개가 들어간다.

이를 일반화해보면, $a_{2m}=12\times m^2$이 된다. (혼동을 막기 위해 $n$ 대신 $m$을 썼다.) 처음 $a_n$에서 $n=2$일 때 있던 12개의 정사각형을 쪼개가는 수만큼 정사각형의 수가 증가한다는 의미이다.

문제는 홀수일 때이다.



$n=5$일 때

($n=7$일 때는 왜 안 그려주시나요 이러면 화낼 거다. 표가 너무 커짐)

$n=5$일 때도 R 구역을 완벽하게 채울 수 없다. 역시 빈 칸이 남게 된다.

가장 바깥쪽 층의 한 변에 10개,
그 안쪽 층에 8개가 있다. 따라서 총 네 변이고, 모서리 중복을 빼 주면

$10\times 4-4+8\times 4-4$
= $64$
가 $a_5$의 값이 된다.

그러면 $a_7$부터는 어떻게 셀까?

일단 가장 바깥 쪽 층의 한 변에 몇 개가 들어갈 지 생각해 보아야 한다. 한 변의 길이가 $\frac{1}{7}$이므로, 큰 사각형의 한 변에는 $2 \div \frac{1}{7} = 14$개가 들어가게 된다. 그 다음 층에는 두 개씩 줄어든 12개가 한 변이 될 테고, 그 다음에는 10개로 이루어진 층이 있을 것이다. 네 번째 층을 만들려면 위에서부터 $\frac{1}{7} \times 4$의 두께가 되는데, R 구역의 폭이 $\frac{1}{2}$ 이므로 네 번째 층은 불가능하다.

이렇게 생각해보면 한 변의 길이가 $\frac{1}{2m+1}$인 정사각형은 가장 바깥층에 $2 \times (2m+1)$개가 들어가고, 점점 들어가는 수가 2개씩 줄어들면서 $m$개의 층을 쌓게 될 것이다. 즉,

<table>
<tr><td rowspan="3">$m$개</td><td>가장 바깥 층</td><td>$4(4m+2)-4$</td></tr>
<tr><td colspan="2">공차가 8인 등차수열</td></tr>
<tr><td>그 안쪽</td><td>$4(4m)-4$</td></tr>
</table>

을 이루고 있다. 그러면 등차수열의 합 공식을 사용하면

> 첫째항이 $a$, 공차가 $d$, 제 $n$항이 $l$인 등차수열의 제 $n$항까지의 합을 $S_n$이라고 하면
> $S_n = \frac{n(a+l)}{2}$, $S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

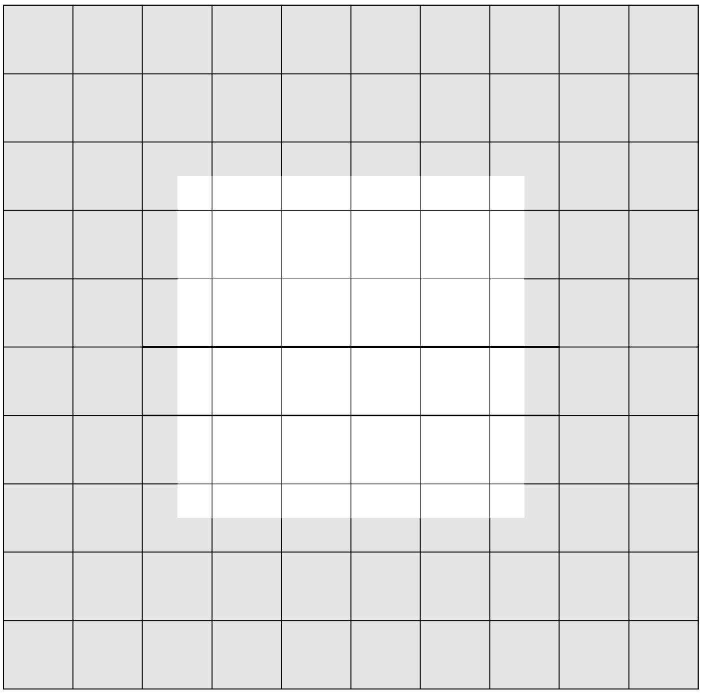
공차 8, 항수 $m$개, 첫 번째 항 $4(4m+2)-4$

$$S = \frac{m\{2(16m+4)-(m-1) \cdot 8\}}{2} = \frac{m\{24m+16\}}{2} = 12m^2 + 8m$$

이 된다.

따라서 $a_{2m+1} = 12m^2 + 8m$이 된다.

* 또는 이렇게 생각할 수도 있다.



$a_5$에서 가장 바깥 변에는 10개의 사각형이 있으므로 총 $10^2 = 100$개의 사각형이 있는데, 그 중에서 흰색 부

분과 겹치는 $6^2$개의 사각형을 빼면 $10^2-6^2=64$개가 된다. 이런 식으로 생각하면

$a_{2m+1}=\{2(2m+1)\}^2-\{2(2m+1-m)\}^2=4(4m^2+4m+1-m^2-2m-1)=12m^2+8m$

아무튼 직접 나열하면서 정사각형을 어떻게 셀 지를 생각한다면 일반화하여 일반항을 구할 수 있다.

따라서 $a_{2m}=12m^2$, $a_{2m+1}=12m^2+8m$이라고 결과가 나왔다.

이를 이용하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{a_{2n}-a_{2n-1}}=c$ 의 값을 구할 수 있다.

$a_{2n}=12n$, $a_{2n+1}=12n^2+8n$, $a_{2n-1}=12(n-1)^2+8(n-1)=12n^2-16n+4$

대입하여 계산하면 $c=\frac{1}{2}$가 나온다. 문제에서는 $100c$의 값을 구하라고 했으므로 답은 50.