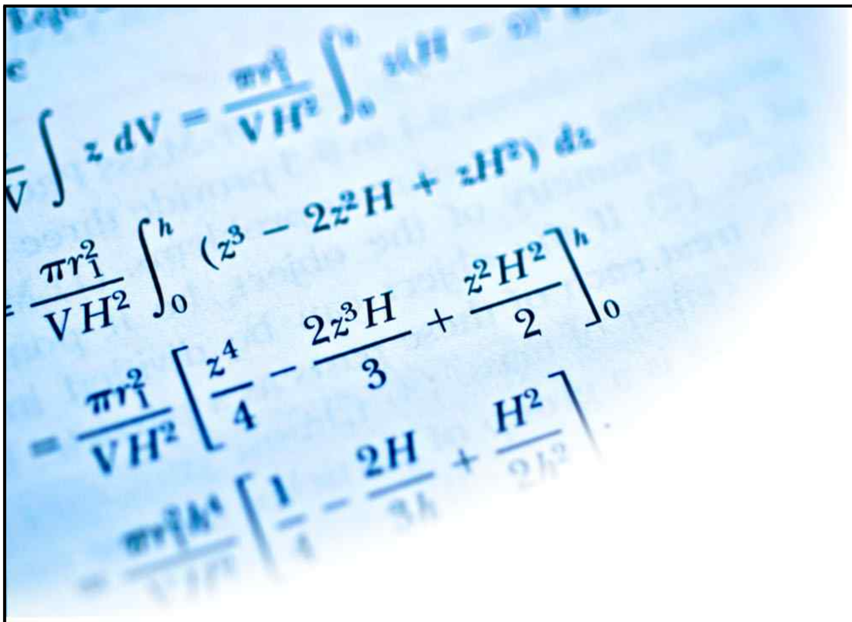
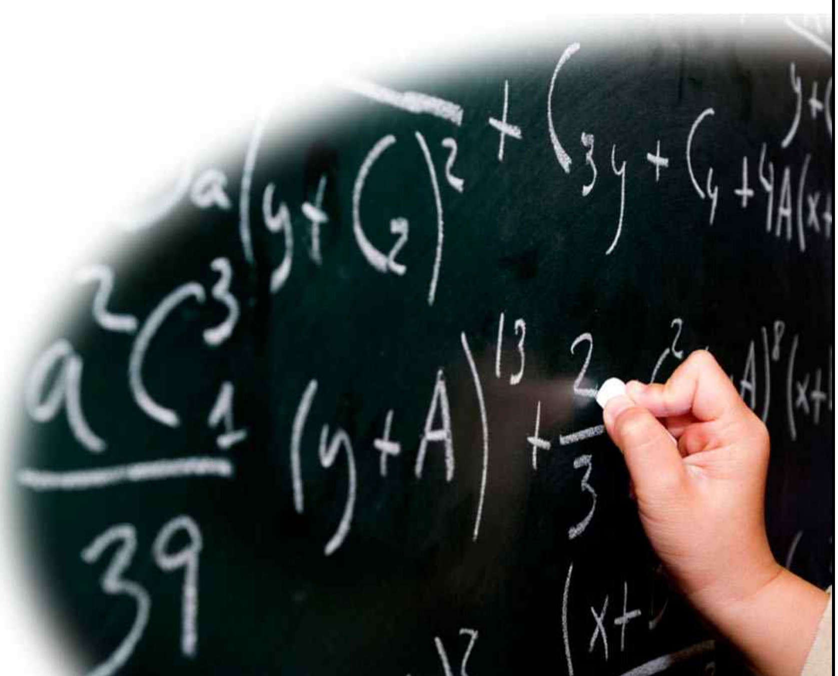


수학 시험의 기술

- 4월 모의고사, 그리고 수능



MediVa

들어가기

* 시험기간 때문에 3월 모의고사 분석을 완성하지 못했는데, 4월 모의고사가 다가오니 차라리 4월 모의고사 대비 자료를 만드는 것이 나을 것 같아서 내용을 바꿨습니다. 역시 연재 형식으로 갈 것이며, 이 파일의 내용은 『수학 시험의 기술』(쏠티북스 출간예정) 내용에 근거해서 만들어진 것임을 밝힙니다.
* 이 자료는 수리(나)형에 초점이 맞추어져 있습니다. 하지만 수리(가)형에도 해당하는 내용이므로 (가)형 분들도 참고하셔도 좋습니다.

3월 모의고사가 끝난 지 얼마 된 것 같지도 않은데 4월 모의고사다. 수능이 다가오는 소리가 들리는가? 곧 6월 모의고사라는 거대한 장벽이 기다리고 있겠지만, 그 앞에 있는 교육청 모의고사라고 해서 그리 만만하지만은 않을 것이다.

일단 명심해 둘 것은, **수능을 출제하는 교육과정평가원과 이 모의고사를 출제하는 교육청은 서로 다른 기관**이라는 것을 알아 두자. 다시 말하면, 올해 수능을 예측하고 전국에서의 내 위치를 알아보기 위한 지표로 가장 적합한 것은 교육과정평가원에서 출제하는 "6월 모의평가"와 "9월 모의평가"이며, 평가원이 아닌 교육청에서 출제하는 나머지 모의평가는 자신의 위치를 가늠하는 잣대로 사용해서는 안 된다는 것이다.

4월 모의고사를 대비한다는 것은 사실 큰 의미가 없다. 어차피 수능을 대비하는 입장에서 우리의 최종 목표는 수능이지 모의고사가 아니기 때문이다. 하지만 반대로 생각하면 4월 모의고사를 대비하는 것은 수능을 대비하는 것이나 다름없기 때문에, 4월 모의고사는 다른 의미에서 중요하다고 볼 수도 있다.

이 대비 자료에서는 2012년 수능을 치른 수험생들이 봤던 <2011년 고3 4월 모의고사>의 기출문제와 수능·평가원 기출문제를 함께 살펴보면서 4월 모의고사와 시험을 동시에 대비할 수 있도록 할 생각이다. 당장 눈앞에 닥친 시험을 생각하기보다 우리의 1년 끄트머리에 있는 마지막 최종보스, 수능을 생각하며 중간 과정 하나하나에 성실하게 임해 보도록 하자.

기출 확인하기

1. 함수의 극한과 연속성 그래프 해석하기 [2011년 4월 모의고사 21번]
2. 행렬의 성질 정오 판별하기 [2011년 4월 모의고사 11번]
3. 처음 보는 수열의 규칙 찾기 [2011년 4월 모의고사 27번]
* 공략할 기출은 변동이 있을 수 있습니다.

11. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $A-2B=E$이면 $AB=BA$이다.
ㄴ. A, B의 역행렬이 모두 존재하면 $A+B$의 역행렬이 존재한다.
ㄷ. $(AB)^2=A^2B^2$이고 A의 역행렬이 존재하면 $A^{-1}B=BA^{-1}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

교환법칙은 요주의 대상

다른 연산과 차이가 나는 행렬 연산의 대표적인 특징 2가지를 꼽으라면 다음과 같다.
(1) 일반적으로 교환법칙이 성립하지 않는다.
(2) 영인자가 존재한다. 즉, 영행렬이 아닌 두 행렬을 곱해도 영행렬이 된다.
특히, 첫 번째 특징이 수능시험에 그 모습을 자주 드러내는데, 이것은 합성함수의 교환법칙($f \circ g \neq g \circ f$)이 일반적으로 성립하지 않는다는 이치와 다르지 않다.

곱셈의 교환법칙

① 행렬의 곱셈에서는 교환법칙이 **일반적으로** 성립하지 않는다.

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$
$$(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - BA - AB + B^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$$
$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$$
$$(AB)^2 = ABAB \neq A^2B^2$$

② $AB = BA$이면 행렬의 곱셈에 대한 교환법칙이 성립한다. 즉, 위 식들의 마지막 등호가 성립한다.

평가원은 이렇게 써준다

- 다음 세 조건을 만족시키는 … $B^3 + 2BA^3$과 항상 같은 행렬은? (가) $AB = BA$ [2006 수능]
- ㄴ. 행렬 $A, B \in V$에 대하여 $AB = BA$가 성립한다. [2005 평가원 9월]
- ㄱ. $(A+B)^2 = (A-B)^2$이면 $AB = O$이다. [2010 수능]
- 두 이차정사각행렬 A, B가 … 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? ㄱ. $AB = BA$ [2012년 수능]

O/X 문제에서 주의할 것은 명제의 역을 이용한 낚시이다. 우리는 수학(상) 명제 단원에서 **"어떤 명제가 참이라고 해서 명제의 역이 항상 참인 것은 아니다"**라는 것을 배웠다. 즉, $p \Rightarrow q$라고 해서 $q \Rightarrow p$라는 것이 아니라는 말인데, 이렇게 기호로 써 놓으면 누구나 알지만 말로 써 놓으면 헷갈릴 수 있다.

위에서 $AB = BA$이면 행렬의 곱셈에 대한 교환법칙이 성립한다. 이라는 명제가 있다. 여기서 "$AB = BA$"를 p로 보고, "행렬의 곱셈에 대한 교환법칙이 성립한다"를 q로 보면 위 명제는 p이면 q이다. 라는 말로 바뀐다. 수학에서는 말장난을 싫어하기 때문에 명제는 90% 이상 "~이면 ~다" 라는 형태로 나오므로 p, q를 구별하기는 그리 어렵지 않다.

교과서를 읽을 때 주의할 것이, 교과서에서는 본 명제와 그 명제의 역에 대해서 명확히 구분한다는 점이다. 이를테면, 중학교 3학년 과정의 피타고라스 정리만 해도 "피타고라스 정리"와 "피타고라스 정리의 역"을 모두 서술하고 있다. 그 말은, 명제와 명제의 역이 모두 참인 경우 교과서에 명확하게 서술되어 있다는 것이고, 반대로 명제의 역이 참이 아닐 수도 있는 경우 아무 말도 하지 않는다는 것이다.

그리고는 그 말이 시험에 나온다. 한 번 봐 볼까?

<교과서에 나온 정리>
$AB=BA$이면 곱셈에 대한 교환법칙이 성립한다.
(곱셈에 대한 교환법칙이 성립하는 경우는, $(AB)^2=A^2B^2$, $(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$로 나타냄.)

시험에 낼 때 이런 식으로 물어본다.

<시험에 나올 때>
곱셈에 대한 교환법칙이 성립하면 $AB=BA$이다.
(곱셈에 대한 교환법칙이 성립하는 경우는, $(AB)^2=A^2B^2$, $(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$로 나타냄.)

그러면 이 명제는 맞을 수도 있고 틀릴 수도 있는 것인데, 수학에서는 100% 참이어야 맞다고 하기 때문에, 이 문장은 틀렸을 확률이 높다고 생각하고, 반례를 찾으면 된다. 반례는 일종의 확인사살이라고 생각하면 돈다.

그러면 한 번 반례를 찾아보자. $(AB)^2=A^2B^2$이면 $AB=BA$이라는 명제에서 반례는 어떻게 찾으면 될까?

먼저 p(~이면 앞)에 해당하는 명제에서 좌변의 식을 풀어헤쳐 보자.
$(AB)^2=ABAB$, $A^2B^2=AABB$. 곧, p는 $ABAB=AABB$라는 말이 된다.
이를 통해서 시험에서 물어보는 것을 다시 정리하면 $ABAB=AABB$라는 표현이 된다. 이것이 반례를 찾고 문제를 푸는 힌트가 된다.

정리하면 문제에서 물어보는 것은,
$ABAB=AABB$ 이면 $AB=BA$라는 것인데, 그냥 이 말이 가만히 있어도 성립하는 말인지 의심해 보면 답이 한층 가까워진다.

$ABAB=AABB$는 $AB=BA$라는 표현을 품고 있다. 즉, $A\,BA\,B=A\,AB\,B$라는 말이다. 이런 "**유사성**"을 빨리 발견하고 발견하지 못하고가 명제 문제를 풀 수 있느냐 없느냐, 나아가 어려운 문제를 풀 수 있느냐 없느냐(쉽게 말하면 고수와 중수)를 가른다.

저렇게 두고 보면 결과적으로 p에서 q로 가기 위해서는 식 좌우의 A, B를 모두 없애야 하고, 그 때 필요한 것이 "역행렬"이다. 만약, 역행렬을 쓸 수 없는 경우가 되면, 저 문장은 말이 되지 않을 확률이 높다. 여기까지 왔으면 반례 찾는 것이 훨씬 수월하다. 시간이 없어서 찍는 경우가 되어도, 이 명제를 틀린 것으로 바르게 찍을 수가 있는 것이다.

반례를 찾는 것은 약간의 연습이 필요한데, 역행렬이 존재하지 않는 경우라면 가장 간단한 행렬을 가지고 생각하는 것이 좋다. 유용하게 활용되는 행렬들은 다음과 같다.

① $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

특히 ②번의 행렬이 반례로 나올 가능성이 높다. 이 문제도 그러하다.

$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$라고 하고, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$라고 해 보자. 직접 계산해보면

$A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$이 된다. 그러면

p에 해당하는 명제인 $AABB=ABAB$는 성립한다.
왜냐하면
(좌변) $AA=A^2=O$이므로 $AABB=O$
(우변) $BA=O$이므로 $ABAB=O$
이기 때문이다.
그런데 $AB=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$이므로, $AB\neq BA$이다.
이런 결과가 나온 경우는, 역행렬이 존재한다는 조건이 빠졌기 때문이다.

비슷한 내용이지만 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$는 상황이 다르다. 왜냐하면 식을 전개하면 $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+BA+AB+B^2$가 되고 우변이 $A^2+2AB+B^2$이므로, 이 식 자체에서 $AB=BA$가 된다. 그러므로 비슷한 내용이지만, $(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$이면, $AB=BA$는 맞다.

기술을 요약하면 다음과 같다.

행렬의 성질 정오 판별 기술

① 우리가 정확히 알고 있는 명제의 역이 나왔을 때는 거짓일 확률이 높다.
② 거짓이라는 의심이 들어서 반례를 찾을 때는 p에서 q로 식을 만들어가는 과정을 생각한다.
③ p에서 q로 가는 과정 중에서 필요한 조건이 있는지 생각해보고, 필요한 조건을 뺀 상태에서 반례를 찾는다. (급하면 이 과정을 생략하고 과감히 틀렸다고 찍어도 된다.)

일반적으로 교환법칙이 성립하지 않는다고 했는데, 이 말은 성립하는 경우도 있다는 것이다. 교환법칙이 성립하는지 성립하지 안하는지는 문제에 따라 달라지므로 그때그때 확인해야 하지만 그나마 시험에 자주 출제되는 내용을 정리하면 다음과 같다. 모두 외울 필요는 없지만 색칠한 것만큼은 알고 있는 것이 좋다.

예외적으로 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하는 경우
① $AE=EA=A$, $A(kE)=(kE)A=A$, $AO=OA=O$
② $AA^{-1}=A^{-1}A=E$
③ $ABC=E$이면 $ABC=BCA=CAB=E$이다.
④ $AB=kE$이면 $BA=AB=kE$이다.
⑤ $A+B=kE$, $xA+yB=E$일 때 $BA=AB$이다.
⑥ $A^mA^n=A^nA^m$
⑦ 다음과 같이 성분이 특이한 형태의 두 행렬의 경우 교환법칙이 성립한다.
ⓐ $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$ ⓑ $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}$ ⓒ $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4\\4&3\end{pmatrix}$
ⓓ $A=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x&-y\\y&x\end{pmatrix}$일 때 $AB=BA=\begin{pmatrix}ax-by&ay-bx\\bx+ay&-by+ax\end{pmatrix}$
⑧ 역행렬과 교환법칙(A^{-1}, B^{-1}가 존재하고 $AB=BA$일 때)
ⓐ $A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ ⓑ $A^{-1}B=BA^{-1}$ ⓒ $AB^{-1}=B^{-1}A$

기출 공략하기

11. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $A-2B=E$이면 $AB=BA$이다.
ㄴ. A, B의 역행렬이 모두 존재하면 $A+B$의 역행렬이 존재한다.
ㄷ. $(AB)^2=A^2B^2$이고 A의 역행렬이 존재하면 $A^{-1}B=BA^{-1}$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 써준 것을 알고 있으면 쉽게 풀렸겠지만, 모르는 상태에서 접근해 보자.
$A-2B=E$에서 $AB=BA$와의 관계를 지으려면 왼쪽 식에서 AB와 BA를 모두 만들어 낼 수 있어야 한다.

$A-2B=E$에서 AB를 만들어 내려면, 식의 오른쪽에 모두 B를 곱하면 된다.
즉, $AB-2B^2=B$인 것이다.
반대로 BA를 만들어 내려면 식의 왼쪽에 B를 곱하자.
$BA-2B^2=B$
색칠한 두 식은 이 문제에서는 항상 맞는 내용이므로, 이 두 식은 마음대로 이용할 수 있다. 두 식에서 AB, BA를 제외한 부분은 모두 동일하므로, 위 식에서 아래 식을 빼면
$AB-BA=O$ 빼면 즉, $AB=BA$ → **참**

ㄴ. A, B의 역행렬이 모두 존재하면, $A+B$의 역행렬이 존재한다고 한다.
여기서도 눈치가 조금 필요한데, 역행렬이라는 것은 "곱셈"에 관계된 성질이고, $A+B$는 덧셈이다. 그러면 서로 다른 영역이기 때문에 틀렸을 것이라고 의심해 볼 수 있다.

그렇게 결론을 내면 반례는 금방 나온다. 역행렬이 존재하지 않는 대표적인 경우가 O이므로, O를 만들면 된다. 앞에서 설명을 안했는데 반례를 찾는 것은 간단하다.

반례를 찾는 기술
"p이면 q이다"의 반례는
p를 만족하지만 q가 아닌 것을 찾으면 된다.

따라서 둘 다 역행렬이 존재하지만 더하면 역행렬이 없는 경우를 생각하면 되는데, 역행렬이 없는 간단한 경우가 O이므로 O를 만들면 된다.

그러면 $A=E$, $B=-E$인 경우를 쉽게 찾을 수 있다. $A+B=O$이므로 A, B는 역행렬이 존재하지만 $A+B$는 역행렬이 존재하지 않는다. → **거짓**

ㄷ. $(AB)^2 = A^2B^2$이고 A의 역행렬이 존재하면 $A^{-1}B = BA^{-1}$이다.

앞에서 상당히 길게 설명했는데, ㄷ번 보기에는 역행렬 존재한다는 말이 나오므로 훨씬 풀기 쉽다.
$(AB)^2 = A^2B^2$를 풀면 $ABAB = AABB$이고 이번에는 A의 역행렬이 존재하므로
$BAB = ABB$라고 할 수 있다. 하지만 B의 역행렬에 대한 말이 없으므로 $BA = AB$까지는 갈 수 없다.
여기서 눈치를 채고 거짓이라고 생각은 해 두자. 그리고 반례를 찾아보자.

A의 역행렬이 존재해야 하니까, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 정도로 만들어 두자. (반례로 쓰기에 E는 너무 독특한 것일 확률이 높다.) 그리고 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 정도로 앞에서 썼던 것(역행렬이 없는 경우) 중에 하나를 써 보자. 그러면 $(AB)^2 = A^2B^2$이 되고, A의 역행렬도 존재하지만, $A^{-1}B = BA^{-1}$은 성립하지 않는다. 이 반례 말고도 B를 아까 써 준 목록 중에서 적당히 잘 고르면 반례를 몇 개 더 찾을 수 있다. 사실 눈치가 빠르면 반례를 찾지 않고도 ㄷ을 거짓으로 바로 볼 수 있지만. **→ 거짓**

답 : ①