2011학년도 대학수학능력시험 문제지

제 2 교시

수리 영역(가형)

성명		수험 번호					—				

홀수형

1. $8^{\log_4 8} \cdot \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$의 값은? [2점]

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

2. 두 행렬 A, B에 대하여, $A+B=2E$, $2A-B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$을 만족시킬 때, 행렬 A^2+AB의 모든 성분의 합은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

3. 좌표공간에서 점 $P(-1,3,0)$와 점 $A(4,1,k)$사이의 거리는 점 P와 xz평면 사이 거리의 2배이다. 양수 k의 값은? [2점]

① $\sqrt{7}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{5}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{3}$

4. 무리방정식

$$2x^2+2x-\sqrt{x^2+x-1}=5$$

의 모든 실근의 곱은? [3점]

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{9}{4}$ ④ $-\frac{13}{4}$ ⑤ $-\frac{17}{4}$

5. 포물선 $y^2=4x$ 위의 초점을 F라 하자. 점 Q가 이 포물선 위의 모든 점을 지날 때, 벡터 $\dfrac{\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OQ}|}=\overrightarrow{OA}$의 종점 A가 나타내는 도형의 길이는? [3점]

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

6. 어느 시험에서는 서로 다른 4개 과목 A, B, C, D에 각각 2개의 수준으로 구성된 8개의 선택과목이 있다. 다음 조건을 만족시키도록 선택과목 3개를 택하는 경우의 수는? [3점]

수준 \ 과목	A	B	C	D
수준1	A1	B1	C1	D1
수준2	A2	B2	C2	D2

(가) 각 과목 당 하나의 수준만 선택할 수 있다.
(나) 수준 2에 해당하는 선택과목 중에서 적어도 하나를 선택한다.

① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

7. 등급제에서 대학수학능력시험 1등급 커트라인의 기준은 원 점수 a에 대한 상위 누적백분위 $f(a)$가 다음과 같은 식을 만족시킨다.

$f(a+1)<4<f(a)$

표준점수제에서는 등급제를 기준으로 하여 계산한 1등급 커트라인에서 표준점수 증발이 일어나지 않는 경우 최종 1등급 커트라인은 a이지만, 표준점수 증발이 일어나게 되면 최종 1등급 커트라인은 $a-1$과 같아진다. 다음은 표준점수제를 시행하던 어느 해 학생들의 대학수학능력시험 성적 분포에 대하여, 전문 입시기관 O가 추정한 내용의 일부를 나타낸 것이다.

(가) $f(a+1)<4<f(a)$를 만족하는 a를 확률변수 X라 하면,
$P(X=89)=\frac{1}{3}$, $P(X=88)=\frac{2}{3}$

(나) 88, 89점에서 표준점수 증발이 일어날 확률은 각각 $\frac{1}{10}$로 동일하다.

(다) 따라서 최종 1등급 커트라인이 88점일 확률이 k로 가장 높다.

k는? [3점]

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{19}{30}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{11}{15}$

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x & (x<-1) \\ 0 & (x=-1) \\ 1 & (-1<x<1) \\ (x-1)^2-1 & (x\ge 1) \end{cases}$$

에 대하여, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

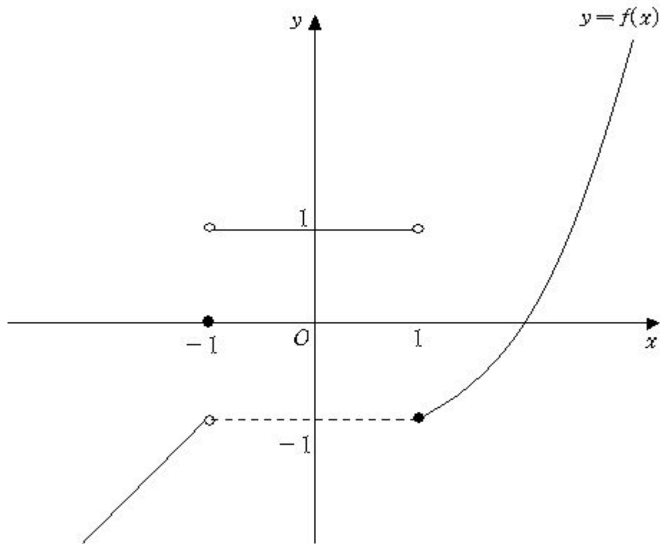
<보 기>

ㄱ $\lim_{x\to -1-0} f(f(x)) = \lim_{x\to -1+0} f(f(x))$

ㄴ 함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄷ 함수 $x|f(x-a)|$가 실수 전체에서 연속이 되도록 하는 상수 a는 없다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



9. 재수(再修)에 성공할 확률과 비례하는 재수성공지수 P 는 하루 중, 텔레비전을 시청하는 평균시간 T와, 공부를 시작하는 달 M을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

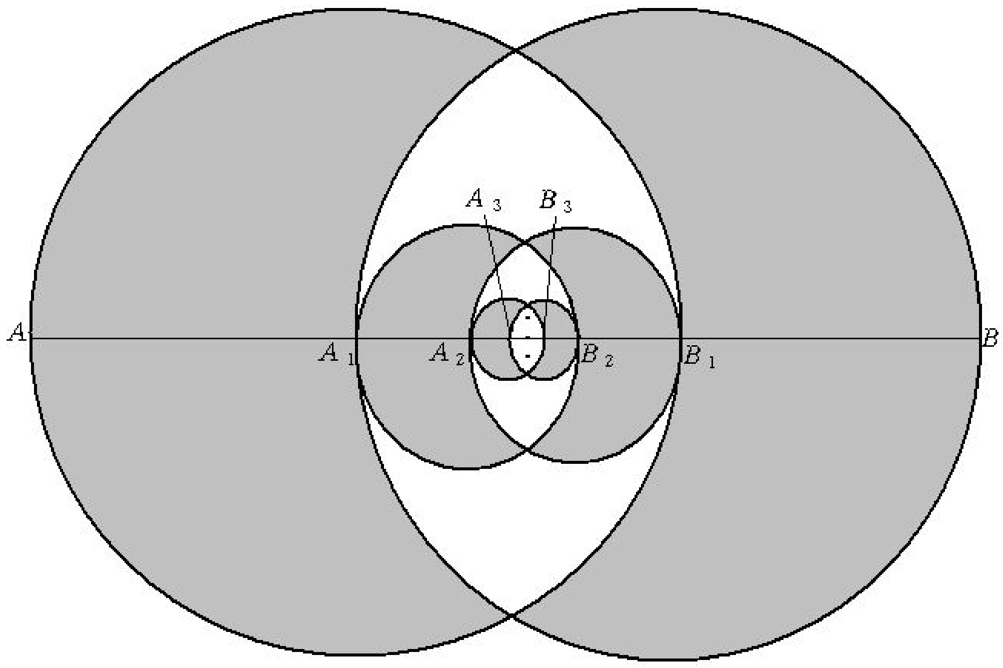
$$P=45+\frac{45\log(\sin T\pi+1.5)}{M}$$

(단, $0\le T\le \frac{3}{2}$, $1\le M\le 10$)

1월부터 공부를 시작하면서 텔레비전을 하루 평균 1시간 30분씩 시청하는 재수생 A와, 5월부터 공부를 시작하면서 텔레비전을 하루 평균 30분씩 시청하는 재수생 B에 대하여, 재수성공지수 P는 B가 A보다 a점 더 높다. a는? (단, $\log 2=0.3$으로 계산한다.) [3점]

① 16.2 ② 17.1 ③ 18 ④ 18.9 ⑤ 19.8

10. 그림과 같이 길이가 3인 선분 AB가 있다. 선분 AB의 삼등분점 A_1, B_1을 중심으로 하고 선분 A_1B_1을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 영역을 제외한 부분의 넓이를 S_1이라 하자. 선분 A_1B_1의 삼등분점 A_2, B_2을 중심으로 하고 선분 A_2B_2을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 영역을 제외한 부분의 넓이를 S_2이라 하자. 선분 A_2B_2의 삼등분점 A_3, B_3을 중심으로 하고 선분 A_3B_3을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 영역을 제외한 부분의 넓이를 S_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 넓이 S_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]

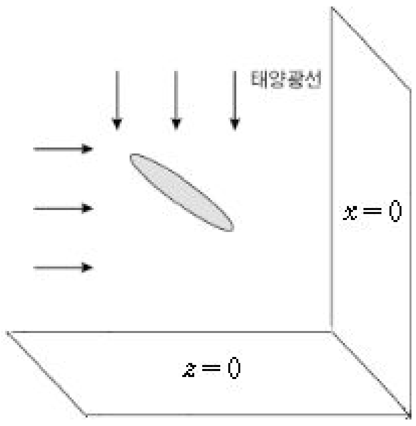


① $\frac{3}{4}\pi+\frac{9}{16}\sqrt{3}$ ② $\frac{3}{4}\pi+\frac{9}{8}\sqrt{3}$

③ $\frac{3}{4}\pi+\frac{9}{4}\sqrt{3}$ ④ $\frac{3}{2}\pi+\frac{9}{16}\sqrt{3}$

⑤ $\frac{3}{2}\pi+\frac{9}{8}\sqrt{3}$

11. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원판과 두 평면 $x=0, z=0$ 이 있다. 태양광선이 각 평면과 수직인 방향으로 비출 때, 원판에 의해 평면 $x=0$에 생기는 그림자의 넓이와, 평면 $z=0$에 생기는 그림자의 넓이는 각각 S, $2S$이다. S의 최댓값은? (단, 원판의 두께는 무시한다.) [4점]



① $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{5}\pi$
④ $\frac{\sqrt{6}}{6}\pi$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{7}\pi$

12. 행렬 A의 모든 성분들의 곱을 $f(A)$라 할 때, 2×2행렬을 원소로 하는 집합 S, T 가 다음과 같다.

$$S=\left\{ \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \mid pq\neq0,\ p^2\neq q^2 \right\},\quad T=\{ A \mid f(A)=f(A^{-1}) \}$$

집합 $S\cap T$의 원소 B에 대하여, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ $f(B)>-\frac{1}{4}$

ㄴ 임의의 원소 B에 대하여 B^2는 집합 $S\cap T$의 원소이다.

ㄷ 집합 $S\cap T$의 원소 중에는 $5P\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$을 만족시키는 P가 있다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 다음 표는 과속 탐지 카메라가 설치되어있는 고속도로 어느 지점을 통과하는 차량들의 평균 속력 및 표준편차를 주행 방향에 따라 나타낸 것이다.

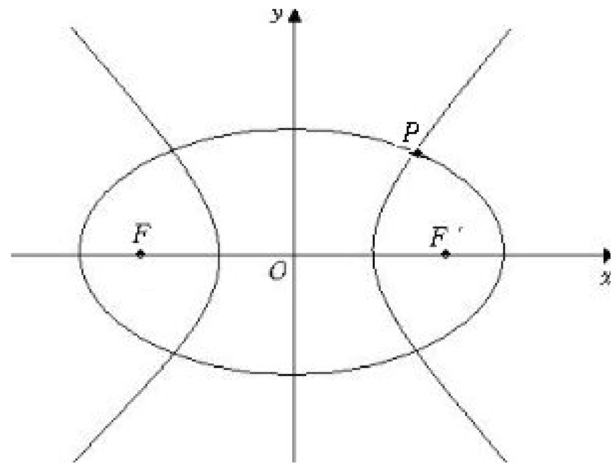
주행 방향	평균속력	표준편차
상행	$96km/h$	$12km/h$
하행	$97km/h$	$10km/h$

이 지점을 지나는 차량의 순간 속력이 $120km/h$ 이상인 경우에 과속 탐지 카메라가 작동한다. 상행선 위에서 달리던 차량 A와 하행선 위에서 달리던 차량 B가 과속 탐지 카메라가 설치되어있는 지점을 동시에 통과하는 순간 과속 탐지 카메라가 1회 작동하였다. 이 때, 단속된 차량이 A였을 확률은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,
$P(0 \le z \le 2) = 0.48$, $P(0 \le z \le 2.3) = 0.49$ 로 계산한다.) [3점]

① $\frac{99}{136}$ ② $\frac{99}{140}$ ③ $\frac{11}{16}$ ④ $\frac{99}{148}$ ⑤ $\frac{99}{152}$

14. 그림과 같이 좌표평면에서 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$와 중심이 O인 타원 t가 다음 조건을 만족시킨다. 이 때, 타원 t의 단축의 길이는? [4점]

(가) 두 곡선은 초점 F, F'을 공유한다.
(나) 두 곡선의 교점들 중 제 1사분면 위의 점을 P라 할 때, $\overline{OP} = \overline{OF'}$



① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

15. 2이상의 자연수 n에 대하여, n자리 수들 중 임의로 1개를 선택하였을 때 그 수의 각 자릿수의 합이 9일 확률을 $P(n)$이라 하자. 다음은 $\lim_{n\to\infty} P(n)$의 값을 중복조합을 이용하여 구하는 과정을 나타낸 것이다.

<증명>

1) n자리 수에 대하여, 자릿수 k에 해당하는 숫자를 a_k라 하면, $\sum_{k=1}^{n} a_k = 9$

2) 1부터 n자리까지의 각 자리 수를 0부터 9까지 수들 중 임의로 하나씩 선택하여 구성하면서, 모든 자리에 놓인 수들의 합이 9가 되도록 배열하는 경우의 수는 ${}_nH_9$

3) 각 자리 수들의 합이 9인 모든 n자리 수의 개수는 2)에서 구한 경우의 수에서, $a_n=0$이 되는 경우를 제외한 값과 같으므로 1), 2)에 의해 ${}_nH_9 - {}_{n-1}H_9$

4) 한 편, 자릿수가 n인 자연수의 개수는 $9 \cdot 10^{n-1}$이므로

$$P(n) = \frac{{}_nH_9 - {}_{n-1}H_9}{9 \cdot 10^{n-1}} = \frac{10}{9!} \cdot \boxed{(가)}$$

5) 이 때, 임의의 자연수 n에 대하여

$$0 < \frac{P(n+1)}{P(n)} = \boxed{(나)} < 1$$

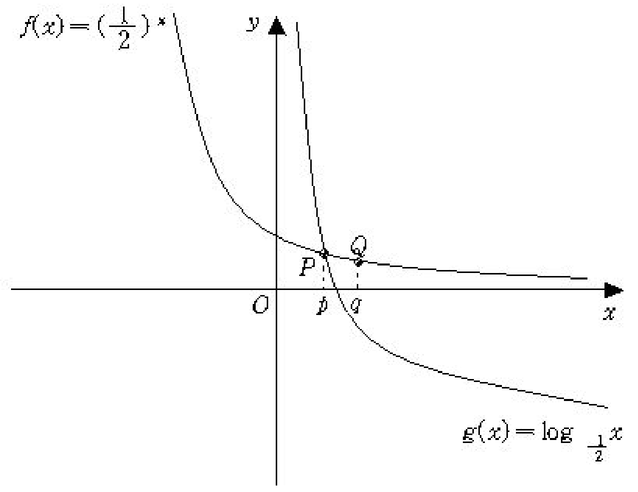
이 성립한다.

따라서 1)~5)에 의해 $\lim_{n\to\infty} P(n) = 0$이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식의 곱을 $f(n)$이라 할 때, $\frac{f(8)}{f(7)}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{7}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

16. 함수 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$에 대하여, 방정식 $f(x) = |g(x)|$의 두 실근을 각각 $p, q\,(p<q)$라 하자. 그래프 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위의 두 점 $P\left(p, \frac{1}{2^p}\right)$, $Q\left(q, \frac{1}{2^q}\right)$에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ 직선 $y=x$는 점 P를 지난다.

ㄴ $p < \frac{2}{3}$

ㄷ $2p - q < 2^{-q}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(0\le t\le 5)$ 에서의 속도 $v(t)$가 다음과 같다.

$$v(t)=\begin{cases} 4t & (0\le t<1) \\ -2t+6 & (1\le t<3) \\ t-3 & (3\le t\le 5) \end{cases}$$

$0\le x\le 3$인 실수 x에 대하여 점 P 가 시각 $t=x$에서 $t=x+2$까지 움직인 거리를 $f(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ $f(0)<f(1)$

ㄴ $f(0)+f(2)=\int_0^4 v(t)dt$

ㄷ $f(x)$는 구간 $(0,1)$에서 극점이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

18. 함수 $f(x)=(x+a)(x-2a)^2+a\,(a>0)$의 극솟값이 2일 때, 극댓값을 구하시오. [3점]

19. x에 대한 분수부등식

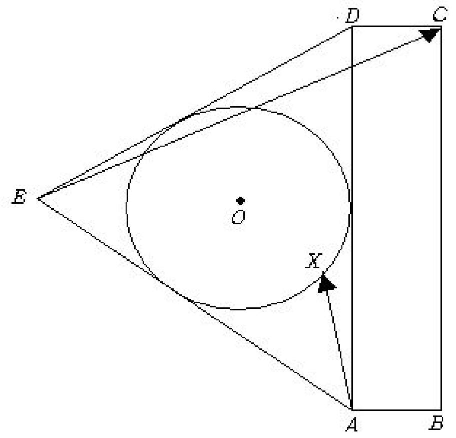
$$\frac{1}{x+1}+\frac{k}{x-k}\le -1$$

을 만족시키는 정수 x의 개수가 4가 되도록 하는 음의 정수 k의 값을 α라 하자. α^2의 값을 구하시오. [3점]

20. 곡선 $y=(x-1)^{\frac{1}{4}}$과 두 직선 x축, $x=5$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킨 회전체의 부피를 $\frac{q}{p}\pi$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

21. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=1$이 평면 $x+y+z=a$와 만나서 생기는 원을 C라 하자. 원 C위의 임의의 두 점 P, Q에 대하여, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\geq-\frac{1}{4}$을 만족시키는 상수 a^2의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p, q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

22. 평면에서 그림과 같이 $\overline{AD}=2\sqrt{3}$이고, $\overline{CD}=1$ 인 직사각형 $ABCD$와 정삼각형 EAD가 있다. 점 X가 정삼각형 EAD에 내접하는 원 O 위를 움직일 때, 두 벡터의 합 $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{AX}$의 크기가 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle EOP=\Theta$일 때, $\sin^2\Theta=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



23. 어떤 자연수 k에 대하여, 수열 a_n과 b_n을

$a_1=k$, $a_{n+1}-a_n$={ a_n의 각 자리수의 합}
b_n={ a_n을 9로 나누었을 때의 나머지}

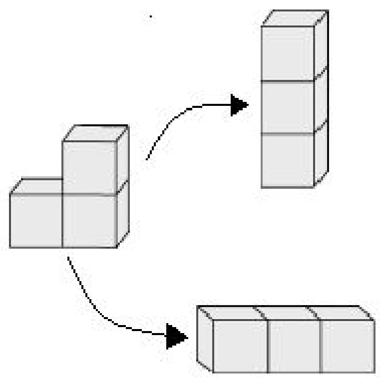
라 정의하면, b_1, b_3, b_5는 순서대로 공차가 0이 아닌 등차수열을 이룬다. b_{2013}은 a또는 b이다. ab의 값을 구하시오. [4점]

24. 최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(0)=0$, $f'(-1)<0$ 인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t 에 대하여 집합 S를

$S=\{\,a \mid$ 함수 $f(x)-tx$가 $x=a$에서 극값을 갖는다.$\}$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=0$과 $t=16$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

25. 자연수 n에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이 1열에 1개, 2열에 2개, 3열에 3개... n열에 n개 쌓여있다. 모든 열에 쌓여있는 블록의 개수가 같아지도록 최소의 블록만을 이동시킬 때, 이동하지 않는 블록의 개수를 a_n이라 하자.
예를 들어, $n=2$일 때 1열 1층에 있는 블록을 2열의 2층 블록 위에 옮겨서 모든 열이 3층이 되도록 옮기거나, 2열의 2층에 있는 블록을 1열 혹은 2열 1층 블록 옆에 옮겨서 모든 열이 1층이 되게 하는 경우로서, 이 때 2개의 블록은 그대로 둔 채 1개만 옮기면 되므로 $a_2=2$이고, 마찬가지로 $a_3=5$, $a_4=7$이 된다.



$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+2}-a_{2n+1}}{a_{2n+1}-a_{2n}}=a$$

일 때, $100a$의 값을 구하시오. [4점]

미분과 적분

26. $\sec\frac{\Theta}{2}=3$일 때, $\tan\Theta$의 값은? (단, $0<\Theta<\frac{\pi}{2}$) [3점]

① $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$ ② $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$ ③ $-\frac{4\sqrt{2}}{5}$
④ $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $-4\sqrt{2}$

27. 곡선 $y=\ln(xe^{8x^2})$의 변곡점에서 접하는 직선의 기울기는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

28. 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$가 있다.
모든 실수 x에 대하여 $f(\frac{\pi}{4}-x)=f(\frac{\pi}{4}+x)$이고,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x f'(x)\,dx=k\ (k\neq0)$$

일 때, $f(0)$의 값을 k로 나타낸 것은? [3점]

① $\frac{k}{4}$ ② $\frac{k}{2}$ ③ k ④ $2k$ ⑤ $4k$

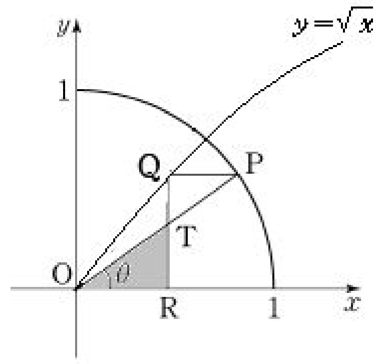
29. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여, $\int_0^3 f(x)dx$의 최댓값은? [4점]

(가) 극소점은 $(0,\ 0)$이다. (나) $0<a<b$이면, $f(b) \le f(a)$이다. (다) 구간 $(0,2)$에서 $f(x)=\dfrac{(x-a)}{(x-a)^2+1}+b$

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

단답형

30. 좌표평면에서 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\Theta(0<\Theta<\frac{\pi}{4})$라 하자. 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 Q라 하고, 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 R라 하자. 선분 OP와 선분 QR의 교점을 T라 할 때, 삼각형 ORT의 넓이를 $S(\Theta)$라 하자. $\lim_{\Theta \to 0}\frac{S(\Theta)}{\Theta^p}=q$일 때, $16pq$의 값을 구하시오. (단, $p>0$, $q>0$) [4점]



* 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.