[기출문제] 해설

$$f(x) = \begin{cases} l\sin x + C_1 & (0<x<\frac{\pi}{2}) \\ m\sin x + C_2 & (\frac{\pi}{2}<x<\pi) \\ n\sin x + C_3 & (\pi<x<\frac{3}{2}\pi) \end{cases}$$

에서 $f(0)=0$, $f(\frac{3}{2}\pi)=1$을 대입하면 $C_1=0$, $C_3=n+1$이고

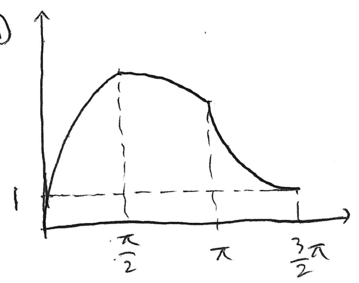
$x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$에서 연속임을 이용하면 $l=m+C_2$, $C_2=n+1$.

$\therefore l=m+n+1$.

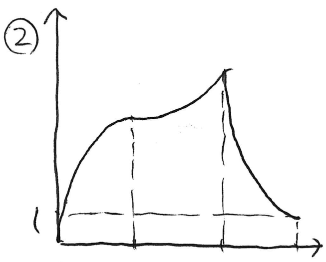
$f(x)$의 그래프는 $(0,\frac{\pi}{2})$에서는 $\sin x$를 l배,

$(\frac{\pi}{2},\pi)$에서는 $\sin x$를 m배,

$(\pi,\frac{3}{2}\pi)$에서는 $\sin x$를 n배 한 다음 연속이 되게 이으면 된다.



or

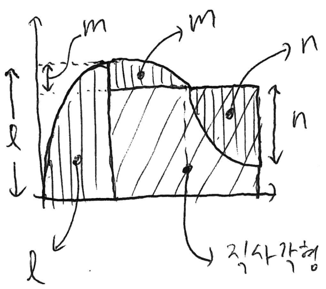


정적분 값이 최대가 되어야 한다는 데서 기본적으로 l, m, n의 부호는

① $l>0$, $m>0$, $n>0$ 또는

② $l>0$, $m<0$, $n>0$ 으로 정해진다.

넓이는 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$ 임을 이용해 간단히 다음과 같이 구한다.



직사각형 넓이: $\pi(n+1)$

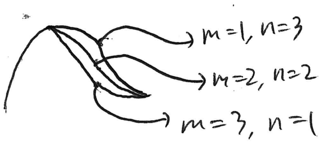
전체 넓이: $l+m+\pi(n+1)-n = l+m+(\pi-1)n+\pi$

② 의 경우에도 구해보면 식은 똑같이 $l+m+(\pi-1)n+\pi$ 가 나온다.

마지막에는 논리를 사용해 l, m, n을 결정한다. ($l=m+n+1$ 과 $|l|+|m|+|n|\le 10$ 이용)

①에서 $l=m+n+1 \rightarrow l\ge 6$ 이면 $m+n\ge 5$, $l+m+n>10$ 이므로 X

$l=5$, $m+n=4$ 일 때

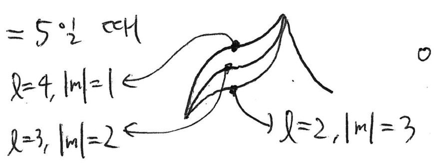


이므로 $l=5$, $m=1$, $n=3$일 때 $4\pi+3$으로 최대.

②에서 $l+(-m)=n+1 \longrightarrow n\ge 5$ 이면 $l+|m|\ge 6$, $l+|m|+n>10$ 이므로 X

$-m = |m|$

$n=4$, $l+|m|=5$일 때



이므로 $l=4$, $m=-1$, $n=4$일 때 $5\pi-1$로 최대.

$4\pi+3=15.xx$,

$5\pi-1=14.xx$ 이므로 최대는 $l=5$, $m=1$, $n=3$일 때. $l+2m+3n=5+2+9=\boxed{16}$.

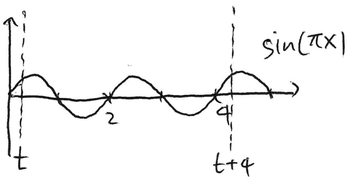
[변형문제] 해설.

(다)에 따라 $f(x)$는 함숫값이 1, 2, 3, 4 인 '구간'이 모두 존재해야 한다.

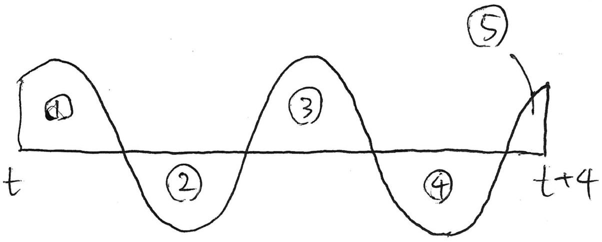
이때 (가)에 따라 $f(x)$가 불연속인 점이 3개뿐이므로

이런 식으로 함숫값이 1,2,3,4인 구간이 한 번씩만 등장해야 한다.

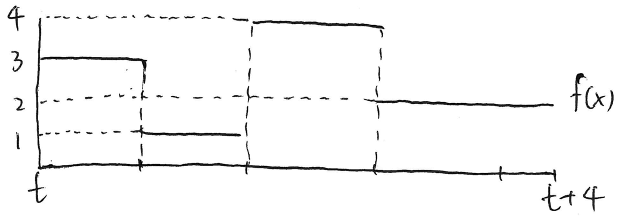
$f(x)\sin(\pi x)$의 정적분 값이 최대가 될 때를 생각해보자.



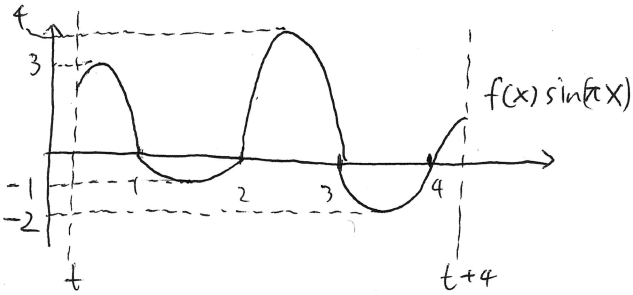
$\sin(\pi x)$는 왼쪽과 같이 x가 정수일 때를 경계로 양수인 부분(⌒)과 음수인 부분(◡)이 있다.
따라서 $f(x)$를 곱했을 때 최대가 되려면
⌒ 부분에서는 $f(x)$가 크고, ◡ 부분에서는 작아야 한다.



왼쪽과 같이 각각의 구간에 ①~⑤의 번호를 붙인다면,
①,③,⑤에서는 $f(x)$가 크고 ②,④에서는 $f(x)$가 작아야 한다.
그런데 $f(x)$가 1, 2, 3, 4 인 구간이 한 번씩만 등장해야 하므로
①,③,⑤ 에서는 각각 4, 3, 2 중 하나, ②,④에서는 각각 1, 2 중 하나여야 한다.



$0<t<\frac{1}{2}$일 때 $\sin(\pi x)$의 넓이는 ③>①>⑤이므로,
③에서 $f(x)=4$, ①에서 $f(x)=3$, ⑤에서 $f(x)=2$ 여야 한다.



$\int_0^1 \sin(\pi x)dx = \frac{2}{\pi}$ 임을 이용하면 $0<t<\frac{1}{2}$일 때

$$g(t) = \int_t^1 3\sin(\pi x)dx - \frac{2}{\pi} + \frac{8}{\pi} - \frac{4}{\pi} + \int_4^{t+4} 2\sin(\pi x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\cos\pi t + \frac{7}{\pi}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{1}{2}} g(t)dt = \left[\frac{1}{\pi^2}\sin(\pi t) + \frac{7}{\pi}t\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{7}{2\pi} + \frac{1}{\pi^2}, \quad 10a+b = \boxed{36}.$$

---

* 공통점

[20190921]:

① 삼각함수의 각 구간을 '서로 다른 상수 배'

② 각 구간의 상수 사이 관계를 파악해 정적분의 최댓값 기하적으로 추론

③ 삼각함수 넓이는 간단히 계산하기!

[20181130]:

① '정지한 함수' x '이동하는 함수' 일정 구간에서의 적분값.

② 상수함수 x 삼각함수 꼴 최댓값 기하적으로 파악.

* 추가점

① 논리.